ROBERT FRICKE

ANALYTISCH-FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN


BG

M. W. Haskell



M. W. Haskell.

KURZGEFASSTE VORLESUNGEN

ÜBER VERSCHIEDENE GEBIETE DER

HÖHEREN MATHEMATIK

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGEN.

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ANALYTISCH-FUNCTIONENTHEORETISCHER TEIL.

MIT 102 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1900.

Vorrede.

Als ich im Herbst 1898 den Plan zur Veröffentlichung der vorliegenden Vorlesungen fasste, waren es namentlich zwei Gesichtspunkte, die mich hierbei leiteten.

Erstlich war der damalige Stand unserer neueren deutschen Lehrbuchlitteratur für mich massgeblich. Wir verfügen über einen besonderen Reichtum an eingehenden Specialwerken über die verschiedensten Gebiete der höheren Mathematik. Es ist andererseits kein Mangel an brauchbaren Büchern über die Elemente, vor allem die Differential- und Integralrechnung. Etwas dürftiger dagegen schien mir jenes mittlere Gebiet bedacht zu sein, welches sich dem Studierenden der Mathematik unmittelbar nach den Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung öffnet, noch ehe er an das Studium der Specialwerke herangeht. Die neueren französischen Lehrbücher über höhere Analysis stehen in dieser Hinsicht etwas günstiger da. Es ist die Regel, dass sich dieselben über das engere Gebiet der Differential- und Integralrechnung hinaus auch über elliptische Functionen, lineare Differentialgleichungen, partielle Differentialgleichungen u. a. eingehender äussern. Natürlich ist die compendiöse Form, in welcher diese Disciplinen dabei zur Darstellung gelangen, nur zur Einführung und ersten Orientierung geeignet. Dem Wunsche, ein dem gleichen Zwecke dienendes deutsches Lehrbuch zu besitzen, entsprang der Plan zur Herausgabe dieser Vorlesungen.

In den letzten anderthalb Jahren haben sich die Verhältnisse nun freilich nicht unwesentlich geändert und günstiger gestaltet. Verschiedene grosse Verlagsanstalten sind Hand in Hand mit berufenen Autoren daran gegangen, ganze Reihen mathematischer Lehrbücher zu planen und haben die Pläne zum Teil bereits zur Ausführung gebracht. Es ist sehr wohl möglich, dass im weiteren Fortgang dieser Unternehmungen auch speciell denjenigen Zielen, denen das vorliegende Buch dienen soll, Rechnung getragen wird. Wahrscheinlicher ist mir

nach dem, was ich bis jetzt sehen kann, dass mein Buch auch neben den in Rede stehenden Unternehmungen seine selbständige Bedeutung bewahrt; und vielleicht werde ich wagen, die gleiche Bemerkung auch von einem weiteren Bande auszusprechen, in welchem ich eine Reihe von Disciplinen der Algebra und Geometrie zu behandeln beabsichtige.

Fürs zweite möchte ich mit dem vorliegenden Buche und namentlich auch mit seiner eben angedeuteten Fortsetzung gewissen Wünschen dienen, welche sich mir bei meiner Lehrthätigkeit an einer technischen Hochschule lebhaft aufgedrängt haben. In der That ist es ein berechtigter und oft ausgesprochener Wunsch, die technischen Hochschulen möchten in der Heranziehung und Ausbildung ihrer künftigen mathematischen Docenten mehr als bisher in freien Wettbewerb mit den Universitäten treten. Das wäre gewiss von heilsamen Folgen; und es ist auch keinem Zweifel unterworfen, dass, wenn man den technischen Hochschulen eine Entwicklung in der gekennzeichneten Richtung noch mehr als jetzt ermöglicht, hier ein lebenskräftiger Zweig derselben gewonnen werden wird. Ich kann den gelegentlich gehörten und gelesenen Äusserungen von den so verschiedenen Beanlagungen zur Technik einerseits und zur Mathematik andererseits durchaus nicht beistimmen. Wohl noch keiner Generation von Studierenden, die ich in die höhere Analysis einzuführen hatte, hat es an Solchen gefehlt, die, obwohl sie die Technik zu ihrem Lebensberuf wählten, den mathematischen Wissenschaften ausgesprochene Anlage und namentlich auch diejenige Liebe entgegenbrachten, ohne welche zumal der Lehrer der Mathematik nicht gedacht werden kann. Es würde unzweifelhaft nützlich sein, solchen Studierenden auch innerhalb des geordneten Lehrgangs der technischen Hochschulen in noch etwas erhöhtem Masse, als es bis jetzt geschieht, Gelegenheit zu einer weitergehenden mathematischen Ausbildung zu geben.

Diese Worte wollen nicht so verstanden sein, dass ich an den technischen Hochschulen Pflegestätten abstract mathematischer Ausbildung zu sehen wünschte. Vielmehr soll sich die Mathematik in lebendiger Wechselwirkung zumal mit ihrer nächsten Nachbarin, der Mechanik, dem Organismus der technischen Hochschulen einordnen*). Dass die Mechanik die wesentlichste Grundwissenschaft der Technik ist, wird kaum einen Widerspruch erfahren; und man kann nur

---

*) Wir stehen in einer Zeit, wo diese Wechselwirkung zwischen Technik und Mathematik trotz mancher Hindernisse an Boden gewinnt. Unter anderen Erscheinungen spricht hierfür die allseitig beifällige Aufnahme, welche die der angewandten Mathematik zugekehrte Tendenz der unter Mehmke's Leitung stehenden Zeitschrift für Mathematik und Physik gefunden hat.

wünschen, dass diese so vielgegliederte und reich entwickelte Wissenschaft der Mechanik an den technischen Hochschulen möglichst allseitig zur Pflege und Geltung gelangt. Die Mathematik sollte daneben aber insoweit zum regelmässigen Lehrgegenstand werden, als sie zum Verständnis der Mechanik (und selbstverständlich auch anderer Teile der technischen Wissenschaften) erforderlich ist. Allerdings wird man ja heutigestags in Deutschland noch nicht an allen massgeblichen Stellen die Meinung Lord Kelvin's teilen, die uns Perry in den Worten übermittelt, „...... there is no useful mathematical weapon which an engineer may not learn to use"*). Aber ich darf wohl auf Zustimmung hoffen, wenn ich die Meinung äussere, dass zu einem tiefer gehenden Verständnis der Mechanik sowohl in ihren Grundproblemen als in ihren Einzelausführungen verschiedene mathematische Disciplinen erforderlich sind, die zur Zeit leider eine regelmässige Pflege an den technischen Hochschulen nicht finden. Ich glaube, dass die im vorliegenden Buche zur Behandlung kommenden Gegenstände den gemeinten Disciplinen mittelbar oder unmittelbar zugehören; die Ausführungen an Beispielen aus der Mechanik, welche ich einigen Kapiteln beigefügt habe, mögen hierfür sprechen.

Diese Bezugnahme auf die Anwendungen hält sich in den nachfolgenden Vorlesungen einstweilen noch in bescheidenen Grenzen. In Amerika und England sehen wir vielfach ein Unterrichtssystem in Kraft, bei welchem mit relativ geringfügigen mathematischen Hilfsmitteln höchst ausgedehnte Gebiete der Anwendungen berührt werden. Der richtige Weg liegt auch hier gewiss in der Mitte. Um ihn mit Erfolg zu betreten, wird die Mathematik mit den technischen Wissenschaften unter gegenseitiger bereitwilliger Förderung Hand in Hand gehen müssen. —

Die Tafeln der Kugelfunctionen etc. (pg. 69 ff.) habe ich dem pg. 26 genannten Werke von Byerly entlehnt, desgl. die Tafeln der elliptischen Functionen (pg. 273 ff.) dem pg. 272 genannten Werke von Lucien Lévy. Beide Herren Verfasser haben mir hierzu freundlichst die Erlaubnis erteilt, wofür ich auch hier danke.

Ein paar Verbesserungen und Ergänzungen sind am Schlusse des Buches angefügt; ich bitte den Leser hiervon gleich anfangs Notiz zu nehmen, damit bei der Lectüre der einzelnen in Betracht kommenden Stelle die Ergänzung sogleich mit zu seiner Kenntnis gelangt.

Braunschweig, den 10. April 1900. **Robert Fricke.**

---

*) Cf. Perry, *The calculus for engineers* (London 1899), pg. 5.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Fourier'sche Reihen.

Zweites Kapitel.

Kugel- und Cylinderfunctionen.

Drittes Kapitel.

Functionen einer complexen Variabelen.

Viertes Kapitel.

Elliptische Functionen.

Fünftes Kapitel.

Anwendungen der elliptischen Functionen.

Sechstes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen.

Siebentes Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren Variabelen.

Erstes Kapitel.

Fourier'sche Reihen.

Für die anregende Wirkung, welche die Probleme der theoretischen Naturbetrachtung auf die Entwicklung der Mathematik ausgeübt haben, ist das Beispiel der sogen. „Fourier'schen Reihen" ein sehr lehrreiches.

Es war um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, als eine Anzahl hervorragendster Mathematiker, unter ihnen d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, das Problem der Schwingungen einer elastischen gespannten Saite zu untersuchen begann. Handelt es sich um ebene und rein transversale Schwingungen und entfernen sich die einzelnen Punkte der Saite nur sehr wenig aus ihrer Gleichgewichtslage, so ist die Schwingung nahehin eine solche, dass für sie beständig die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

gültig ist*). Hierbei sind x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Saite, t bedeutet die Zeit und α^2 ist eine gewisse positive Constante; es liegt ferner der Differentialgleichung die Annahme zu Grunde, dass die Saite in ihrer Ruhelage auf der x-Axe gelegen sei, etwa zwischen $x = 0$ und $x = l$, unter l die Saitenlänge in der Ruhelage verstanden.

Mathematisch kleidete sich daraufhin das vorliegende Problem folgendermassen ein: Zur Zeit $t = 0$ habe die Saite die durch $y = f(x)$ gegebene Gestalt, wo $f(x)$ eine im Intervall $0 < x < l$ *willkürlich gewählte* stetige Function ist, welche wegen der festgehaltenen Endpunkte der Saite für $x = 0$ und $x = l$ verschwindet; es sei ferner zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit jedes Punktes der Saite durch $\frac{\partial y}{\partial t} = g(x)$

---

*) Man findet eine Ableitung dieser Differentialgleichung z. B. in den von K. Hattendorf herausgegebenen Vorlesungen B. Riemann's über „*Partielle Differentialgleichungen*" (Braunschweig 1882) pg. 190 ff.

gegeben, wo von $g(x)$ dieselben Bemerkungen gelten, wie von $f(x)$: Welches ist alsdann die Gestalt der Saite zu irgend einer beliebigen Zeit t? Dieselbe würde durch ein Integral $y = F(x, t)$ der obigen partiellen Differentialgleichung (1) gegeben sein, welches den vorliegenden Anfangsbedingungen:

$$(2) \qquad F(x, 0) = f(x), \qquad \left(\frac{\partial F(x, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x)$$

zu genügen haben würde.

Hier war es nun D. Bernoulli*), welcher eine Bemerkung Taylor's verwertete, dass nämlich der fraglichen Differentialgleichung jedes der beiden Producte:

$$(3) \qquad \cos\frac{n\pi\alpha}{l}t \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad \sin\frac{n\pi\alpha}{l}t \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

und zwar für jede ganze Zahl n Genüge leiste (wobei übrigens sogleich für $x = 0$ und $x = l$ die Werte dieser particulären Integrale in Übereinstimmung mit der Forderung des Problems verschwinden). Bei der Bauart der Gleichung (1), welche in den Ableitungen von y „linear" und „homogen" ist, folgerte Bernoulli a. a. O. hieraus, dass auch jede Summe:

$$\sum_n \left(a_n \cos\frac{n\pi\alpha}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

mit beliebigen Constanten a_n, b_n der Gleichung (1) genüge; und es entstand insbesondere die lange umstrittene Meinung, dass in der unendlichen Reihe:

$$(4) \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi\alpha}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

das „allgemeine Integral" unserer Differentialgleichung vorliege**).

Hieraus nun ergab sich das Grundproblem, welches die Theorie der Fourier'schen Reihen beschäftigt hat. Liegt unter (4) wirklich das oben gesuchte Integral $F(x, t)$ vor, so erhält man für $t = 0$:

$$(5) \qquad f(x) = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin 2\frac{\pi x}{l} + a_3 \sin 3\frac{\pi x}{l} + \cdots;$$

und also muss es möglich sein, die im Intervall $0 < x < l$ „willkürlich gewählte" Function $f(x)$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach den Sinus

*) Siehe die „Mémoires de l'académie de Berlin" von 1753 pg. 147.

**) Man vergl. die ausführlichen Angaben Riemann's über die Geschichte der Fourier'schen Reihen am Anfang der Abhandlung *„Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe"*, B. Riemanns gesammelte Werke (Leipzig, 1876) pg. 213.

der Vielfachen von $\frac{\pi x}{l}$ fortschreitet. Unter unwesentlicher Verallgemeinerung werden wir hier zu folgendem Probleme geführt: *Im Intervall* $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ *sei eine willkürlich zu wählende Function* $f(x)$ *eindeutig definiert; giebt es für dieselbe eine Darstellung durch die Reihe:*

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \\ + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots,$$

welche nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von x *fortschreitet, und welches ist für diesen Fall das Bildungsgesetz der Coefficienten* a, b?

Dieses Bildungsgesetz war in Specialfällen bereits bei Lagrange angegeben; es handelt sich um Darstellungen der a_n, b_n durch gewisse *„bestimmte Integrale"*, wie wir sie alsbald kennen lernen werden. Fourier*) behauptete 1807 die Allgemeingültigkeit des fraglichen Bildungsgesetzes für willkürliche Functionen; sein Eingreifen ist so entscheidend für die Theorie der Reihen (6) geworden, dass man sie nach ihm als *„Fourier'sche Reihen"* bezeichnet.

Der einwurfsfreie Beweis für die Richtigkeit der Fourier'schen Angabe ist aber erst 1829 durch eine äusserst scharfsinnige Convergenzbetrachtung Dirichlet's**) für eine grosse Classe von Functionen $f(x)$ geführt worden, und zumal für alle diejenigen Functionen, welche bislang für die Anwendungen eine Bedeutung gewonnen haben.

§ 1. Integralgestalt der Coefficienten einer Fourier'schen Reihe.

Die im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ willkürlich gegebene eindeutige Function $f(x)$ gestatte die Darstellung in einer unendlichen Reihe:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \\ + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots.$$

Zur Bestimmung von b_n multiplicieren wir mit $\cos nx \cdot dx$ und integrieren zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$. Darf man die unendliche Reihe rechter Hand gliedweise integrieren, so folgt:

$$(2) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{2} b_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\, dx \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[b_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx + a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx \right].$$

*) Cf. „Bulletin des sciences pour la société philomatique" t. 1, pg. 112.

**) Journ. f. Math. Bd. 4, pg. 158.

Das erste rechts auftretende Integral verschwindet für $n > 0$ und ist $= 2\pi$ für $n = 0$. Für das zweite Integral gilt:

$$2\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos (m+n) x \cdot dx + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos (m-n) x \cdot dx.$$

Da aber m eine positive und n eine nicht-negative ganze Zahl bedeutet, so verschwindet in der letzten Gleichung rechter Hand das erste Integral stets, und das zweite ist nur für $m = n$ von 0 verschieden, und zwar dann $= 2\pi$. Das dritte Integral auf der rechten Seite von (2) verschwindet stets, da der Integrand $\sin mx \cos nx$ eine ungerade Function von x ist. Man folgert somit aus (2) für jede nicht-negative ganze Zahl n:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = b_n \cdot \pi.$$

Die Multiplication der Gleichung (1) mit $\sin nx \cdot dx$ führt vermöge Integration zwischen den gleichen Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ in entsprechender Art zur Berechnung der Coefficienten a_n.

Man gelangt auf diese Weise zu den von Fourier a. a. O. angegebenen *Integralgestalten für die Coefficienten* a_n, b_n:

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Für die Brauchbarkeit dieser Formeln ist offenbar erforderlich, dass für die Function $f(x)$ und damit auch für die Producte $f(x) \sin nx$, $f(x) \cos nx$ bestimmte Integrale (3) überhaupt existieren, dass also in $f(x)$ eine sogen. *„integrierbare Function“* vorliege. Diese Voraussetzung, welche bei den für die Anwendungen bislang wichtig gewordenen Functionen erfüllt ist, soll für jede weiterhin in Betracht kommende Function $f(x)$ als gültig angesehen werden.

Wie aber die andere oben gestellte Bedingung, dass nämlich die Reihe (1) zur Berechnung der Integrale $\int f(x) \cos nx\, dx$ u. s. w. gliedweise integriert werden dürfe, in Dirichlet's Behandlung der Fourier'schen Reihen aufgelöst wird, soll in § 3 erklärt werden. Einige hierzu nötige Hilfssätze werden in § 2 vorausgesandt.

§ 2. Dirichlet's Hilfssätze zum Convergenztheorem der Fourier'schen Reihen.

Bildet man die Gleichung:

$$\sin (2k+1) u - \sin (2k-1) u = 2 \sin u \cos 2ku$$

für $k = 1, 2, \cdots, n$ und addiert alle n so entstehenden Gleichungen, so folgt:

(1) $$\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2ku,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du - \frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ku\,du.$$

Da hier jedes der rechts stehenden Integrale einzeln verschwindet, so ergiebt sich:

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{2}\cdot -$$

Die wesentlichste Grundlage für die Dirichlet'sche Behandlung der Fourier'schen Reihen wird nun geliefert durch folgenden

Hilfssatz I: *Ist a eine dem Intervall $0 < a \leqq \frac{\pi}{2}$ angehörende Zahl, und bedeutet $\varphi(u)$ eine Function, die im Intervall $0 \leqq u \leqq a$ eindeutig, stetig, positiv und mit u niemals gleichändrig ist*), so gilt die Grenzformel:*

(A) $$\lim_{n=\infty} \int_0^a \varphi(u)\,\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0)\cdot$$

Der etwas umständliche Beweis dieser Behauptung lässt sich folgendermassen gliedern:

1) Unter n eine positive ganze Zahl verstanden, setze man zur Abkürzung:

(3) $$\int_0^a \varphi(u)\,\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du = \Phi_n.$$

Das Integrationsintervall werde in $(k+1)$ durch

$$0,\ \frac{\pi}{2n+1},\ \frac{2\pi}{2n+1},\ \frac{3\pi}{2n+1},\ \cdots,\ \frac{k\pi}{2n+1},\ a$$

fixierte Teilintervalle zerlegt, wobei die ganze nicht-negative Zahl k so gewählt sein soll, dass

$$\frac{k\pi}{2n+1} < a \leqq \frac{(k+1)\pi}{2n+1}$$

zutrifft. Setzt man:

---

*) d. h. mit wachsendem u niemals selber wächst.

(4) $$\sigma_\nu = (-1)^\nu \int\limits_{\frac{\nu\pi}{2n+1}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{2n+1}} \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du,$$

wobei jedoch für $\nu = k$ die obere Integralgrenze durch a ersetzt werden soll, so ist offenbar jedes σ_ν positiv, und man hat für Φ_n die Darstellung:

(5) $$\Phi_n = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \cdots + (-1)^k \sigma_k.$$

Transformiert man Formel (4) in die Gestalt:

$$\sigma_\nu = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \varphi\left(v + \frac{\nu\pi}{2n+1}\right) \frac{\sin(2n+1)v}{\sin\left(\frac{\pi\nu}{2n+1} + v\right)}\, dv,$$

so folgt aus der Eigenschaft von $\varphi(u)$, im Intervall $0 \leqq u \leqq a$ mit u niemals gleichändrig zu sein, die Ungleichung $\sigma_\nu > \sigma_{\nu+1}$ für alle Indices $\nu = 0, 1, \cdots, k-1$.

Hieraus und aus der Formel (5) ziehen wir den Schluss, dass für jeden Index $2\mu \leqq k$ die Ungleichungen gelten:

(6) $$\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \cdots - \sigma_{2\mu-1} < \Phi_n < \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \cdots + \sigma_{2\mu}.$$

2) Diesen Ansatz specialisiere man für den zulässigen Fall $\varphi(u) = 1$ und $a = \frac{\pi}{2}$, wobei $k = n$ wird. Bezeichnen wir die speciellen hier eintretenden Integralwerte σ_ν etwa durch τ_ν und berücksichtigen, dass zufolge (2) gegenwärtig das Integral $\Phi_n = \frac{\pi}{2}$ wird, so tritt an Stelle von (6) im speciellen:

(7) $$\tau_0 - \tau_1 + \tau_2 - \cdots - \tau_{2\mu-1} < \frac{\pi}{2} < \tau_0 - \tau_1 + \tau_2 - \cdots + \tau_{2\mu},$$

wo 2μ in derselben Bedeutung wie unter (6) gebraucht ist.

3) Da $\varphi(u)$ im ganzen Intervall des Integrals σ_ν nirgends grösser als $\varphi\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)$ und nirgends kleiner als $\varphi\left(\frac{(\nu+1)\pi}{2n+1}\right)$ ist, so ergiebt sich aus (4)

$$\varphi\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right) \cdot \tau_\nu \geqq \sigma_\nu \geqq \varphi\left(\frac{(\nu+1)\pi}{2n+1}\right) \cdot \tau_\nu.$$

Man schliesst hieraus leicht auf die Richtigkeit von:

$$\varphi\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu) \leqq \sigma_{\nu-1} - \sigma_\nu.$$

Wendet man diese Bedingungen auf die beiden in (6) vereinten Ungleichungen für Φ_n an, so folgt:

$$\Phi_n > \varphi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)(\tau_0 - \tau_1) + \varphi\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)(\tau_2 - \tau_3)$$
$$+ \cdots + \varphi\left(\frac{(2\mu-1)\pi}{2n+1}\right)(\tau_{2\mu-2} - \tau_{2\mu-1}),$$

$$\Phi_n < \varphi(0)\,\tau_0 - \varphi\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)(\tau_1 - \tau_2) - \varphi\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)(\tau_3 - \tau_4)$$
$$- \cdots - \varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)(\tau_{2\mu-1} - \tau_{2\mu}).$$

Da aber keiner der hier vorkommenden Werte $\varphi\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)$ kleiner als $\varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)$ ist, so werden um so mehr die beiden folgenden Ungleichungen richtig sein:

$$\Phi_n > \varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)(\tau_0 - \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \cdots + \tau_{2\mu-2} - \tau_{2\mu-1}),$$

$$\Phi_n < \left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)\right]\tau_0 + \varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)(\tau_0 - \tau_1 + \tau_2 - \cdots + \tau_{2\mu}).$$

Unter Vermittlung von (7) schliessen wir von hieraus auf:

(8) $$\frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) - \tau_{2\mu}\,\varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) < \Phi_n$$

$$\Phi_n < \frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) + \left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)\right]\tau_0 + \tau_{2\mu}\,\varphi\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right).$$

4) Man lasse jetzt die ganze Zahl n grössere und grössere Werte annehmen und wähle dabei insbesondere μ stets als die grösste unterhalb $\frac{a\sqrt{2n+1}}{2\pi}$ gelegene ganze Zahl, so dass man hat:

(9) $$\lim_{n=\infty}\mu = \infty, \qquad \lim_{n=\infty}\frac{\mu}{2n+1} = 0.$$

Für τ_ν folgt aus (4), indem man $\varphi(u) = 1$ setzt:

$$\tau_\nu < \frac{(-1)^\nu}{\sin\frac{\nu\pi}{2n+1}} \int\limits_{\frac{\nu\pi}{2n+1}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{2n+1}} \sin(2n+1)u \cdot du = \frac{2}{\nu\pi}\,\frac{\frac{\nu\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\nu\pi}{2n+1}},$$

woraus man für $\nu = 2\mu$ vermöge (9) den Grenzwert $\lim_{n=\infty}\tau_{2\mu} = 0$ entnimmt, während für $\nu = 1$ unter Gebrauch von (7) folgt:

$$\tau_0 < \frac{\pi}{2} + \tau_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\,\frac{\frac{\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}.$$

Da hiernach τ_0 für lim. $n = \infty$ unterhalb einer angebbaren endlichen Zahl bleibt, so haben wegen der Stetigkeit der Function $\varphi(u)$ die beiden Ausdrücke, zwischen welche der Betrag Φ_n in den Formeln (8) eingeschlossen wurde, für lim. $n = \infty$ den gemeinsamen Grenzwert $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$. Hiermit aber ist die Gleichung (A) bewiesen.

Hilfssatz II: *Ist* $0 < a < b \leqq \frac{\pi}{2}$, *und genügt* $\varphi(u)$ *im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *den beim Hilfssatz I genannten Bedingungen, so gilt die Grenzformel:*

$$\text{(B)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = 0 \cdot$$

Definiert man nämlich die Function $\varphi(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq a$ dahin, dass sie daselbst constant $= \varphi(a)$ sei, so hat zufolge (A) jedes der Integrale:

$$\int_0^b \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du, \qquad \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

für lim. $n = \infty$ den Grenzwert $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$. Ihre Differenz hat demnach in der That den Grenzwert 0.

Zusatz I: *Die Formeln* (A), (B) *bleiben gültig, falls man von der Forderung,* $\varphi(u)$ *sei im Integrationsintervall überall positiv, absieht.*

Da nämlich $\varphi(u)$ im Intervall überall stetig und also endlich ist, so kann man eine positive Constante c so wählen, dass $c + \varphi(u)$ im Intervall überall positiv ist. Dann knüpfe man z. B. für Formel (A) an:

$$c\int_0^a \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du + \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \int_0^a \left[c + \varphi(u)\right] \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du,$$

woraus sich für lim. $n = \infty$ ergiebt:

$$c\frac{\pi}{2} + \lim_{n=\infty} \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \left[c + \varphi(0)\right]\frac{\pi}{2},$$

d. i. die Gültigkeit der Formel (A) für $\varphi(u)$.

Zusatz II: *Man kann ferner an Stelle der Forderung,* $\varphi(u)$ *sei mit* u *niemals gleichändrig, die entgegengesetzte treten lassen, dass* $\varphi(u)$ *im Integrationsintervall mit* u *niemals ungleichändrig ist.*

Im letzteren Falle gelten nämlich die Formeln (A), (B) für die Function $-\varphi(u)$ und also zufolge ihrer Bauart auch für $\varphi(u)$.

Hilfssatz III: *Die Formel* (A) *bleibt gültig, falls die Function* $\varphi(u)$ *im Intervall* $0 \leqq u \leqq a$ *eindeutig und endlich ist und ebenda nur endlich*

viele Maxima und Minima besitzt, sowie nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen (mit endlichen Sprüngen) aufweist.

Durch die Argumente u mit den Maximal- und Minimalwerten $\varphi(u)$ sowie durch die Unstetigkeitsstellen ist das Intervall $0 \leqq u \leqq a$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt. Für das am Punkte $u = 0$ liegende Teilintervall gilt Formel (A), für die übrigen Formel (B). Die Addition dieser einzelnen Formeln ergiebt die Richtigkeit der Behauptung. —

Ist u_0 eine Unstetigkeitsstelle von $\varphi(u)$, so werde symbolisch durch $\varphi(u_0 + 0)$ resp. $\varphi(u_0 - 0)$ der Grenzwert der Function bei Annäherung an u_0 von rechtsher resp. von linksher bezeichnet. Im gleichen Sinne wird man den in Formel (A) gemeinten Functionswert $\varphi(0)$ genauer durch $\varphi(+0)$ zu bezeichnen haben.

Hilfssatz IV: *Ist* $\frac{\pi}{2} < a \leqq \pi$, *während übrigens die Voraussetzungen des Satzes III erhalten bleiben, so gilt:*

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2} \varphi(+0),$$

falls $a < \pi$ *gilt; dagegen hat man für* $a = \pi$:

$$\text{(C)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2} \left[\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)\right].$$

Man hat nämlich gegenwärtig:

$$\int_0^a \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du,$$

oder wenn im letzten Integral $u = \pi - v$ geschrieben und zugleich der Grenzübergang für $\lim. n = \infty$ vollzogen wird:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2} \varphi(+0) + \lim_{n=\infty} \int_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\pi - v) \frac{\sin(2n+1)v}{\sin v} dv.$$

Hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf die vorangehenden Sätze die Behauptungen des Hilfssatzes IV.

§ 3. Dirichlet's Convergenztheorem der Fourier'schen Reihen.

Man setze jetzt für irgend ein x des Intervalles $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ die unendliche Fourier'sche Reihe:

(1) $$\frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots$$

an; die Coefficienten sollen in Übereinstimmung mit (3) pg. 4 durch:

(2) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt \cdot dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \cdot dt.$$

gegeben sein, unter $f(x)$ eine gleich näher zu bezeichnende Funktion verstanden. Die Reihe (1) soll auf Convergenz und Summenwert untersucht werden. Man verstehe zu diesem Zwecke unter S_n die Summe der $(2n+1)$ ersten Glieder:

$$S_n = \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx.$$

Trägt man für die a_k, b_k ihre Werte (2) ein, so folgt:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right] dt,$$

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] dt$$

und unter Benutzung von (1) pg. 5:

(3) $$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt.$$

Man kann hierfür auch schreiben:

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{+\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt - \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{-\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt$$

oder, wenn man im ersten Integral $t = x + 2u$, im zweiten $t = x - 2v$ setzt:

(4) $$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2u) \frac{\sin (2n+1) u}{\sin u} du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2v) \frac{\sin (2n+1) v}{\sin v} dv.$$

Um auf diese Integrale die Hilfssätze des § 2 anwenden zu können, formulieren wir folgende

Dirichlet'sche Bedingungen: *Die Function $f(x)$ soll im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ überall eindeutig, endlich und integrierbar sein; sie soll daselbst höchstens endlich viele Maxima und Minima darbieten und höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen (mit endlichen Sprüngen) besitzen.*

Ist nun $x \neq \pm\pi$, so findet auf jedes der Integrale in (4) für $\lim. n = \infty$ die Grenzformel (A) pg. 5 bez. 9 Anwendung; man gewinnt:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{2}\Big[f(x+0) + f(x-0)\Big]. \tag{5}$$

Ist hingegen $x = +\pi$ oder $-\pi$, so ist beide Male eines der Integrale in (4) gleich 0, während das andere nach der Grenzformel (C) pg. 9 zu berechnen ist; man findet in beiden Fällen:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{2}\Big[f(\pi-0) + f(-\pi+0)\Big]. \text{ —} \tag{6}$$

Diese Ergebnisse gestatten den einfachsten Ausdruck, falls man $f(x)$ über das bisherige Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ hinaus für unbeschränkt veränderliches x definiert; und zwar hat man zu setzen:

$$f(x) = f(x \pm 2\pi) = f(x \pm 4\pi) = \cdots,$$

so dass $f(x)$ eine *periodische Function mit der Periode* 2π wird. Es wird alsdann die rechte Seite von (6) z. B. für $x = +\pi$ in der Gestalt $\frac{1}{2}\Big[f(\pi-0) + f(\pi+0)\Big]$ geschrieben werden können und sich der rechten Seite von (5) unterordnen. Wir gelangen solchergestalt zu

Dirichlet's Convergenzsatz: *Jede den „Dirichlet'schen Bedingungen" genügende periodische Function $f(x)$ von der Periode 2π gestattet die Darstellung durch eine convergente Reihe* (1), *für deren Coefficienten das „Lagrange-Fourier'sche Integralgesetz"* (2) *gilt, und zwar ist der Summenwert der Reihe für jede Stetigkeitsstelle x gleich $f(x)$, für jede Unstetigkeitsstelle x gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Grenzwerten $f(x+0)$ und $f(x-0)$**).

§ 4. Zwei Specialgestalten Fourier'scher Reihen.

Ist $f(x)$ nur für das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ und zwar in Übereinstimmung mit den Dirichlet'schen Bedingungen gegeben, so liegt es

*) Das Ziel neuerer Entwicklungen ist gewesen, zu untersuchen, inwieweit convergente Reihen von der Gestalt (1) für solche Functionen existieren mögen, welche nicht oder nur zum Teil den Dirichlet'schen Bedingungen genügen. Vergl. hierüber z. B. die Darstellung in Serret-Harnack, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung* (Leipzig, 1885) Bd. 2, Teil 1, pg. 343.

besonders nahe, den Definitionsbereich der Function auf das Intervall $-\pi \leqq x \leqq 0$ dadurch auszudehnen, dass man entweder $f(-x) = -f(x)$ oder $f(-x) = f(x)$ vorschreibt.

Im ersten Falle wird man für die so vervollständigte Function eine Darstellung (1) pg. 10 gewinnen, in der alle Coefficienten b verschwinden; im zweiten Falle werden entsprechend alle Coefficienten a verschwinden. Man erkennt von hieraus leicht die Richtigkeit des Satzes: *Eine im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ definierte und den Dirichlet'schen Bedingungen daselbst genügende Function lässt sich ebenda durch die convergente Fourier'sche Reihe:*

$$(1) \qquad f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots$$

darstellen, und zwar ist dabei:

$$(2) \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t) \sin nt \cdot dt\,;$$

sie ist gleichfalls dortselbst durch die convergente Fourier'sche Reihe:

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots$$

darstellbar, und zwar gilt alsdann:

$$(4) \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t) \cos nt \cdot dt.$$

Jedoch ist hier der Zusatz zu machen, *dass der Summenwert der Reihe* (1) *sowohl im Anfangspunkte* 0 *wie Endpunkte* π *des Intervall nur dann den richtigen Funktionswert liefert, wenn letzterer gleich* 0 *ist.*

Die Reihe (1) bezeichnen wir kurz als eine „*Fourier'sche Sinusreihe*" und entsprechend (3) als eine „*Fourier'sche Cosinusreihe*".

§ 5. Beispiele Fourier'scher Reihen.

1) Die im Intervall $-\pi < x < \pi$ durch $f(x) = x$ gegebene ungerade Function lässt sich durch eine Fourier'sche Sinusreihe darstellen, deren Coefficienten geliefert werden durch:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \sin nt \cdot dt = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}\,.$$

Man hat also im Innern des genannten Intervalles:

$$(1) \qquad x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right).$$

Allgemein ist der Summenwert der Reihe durch die in Figur 1 stark markierten Geraden und Punkte versinnlicht, wenn wir hier und weiterhin zur Veranschaulichung unserer Functionen rechtwinklige Coordinaten x und $y = f(x)$ benutzen.

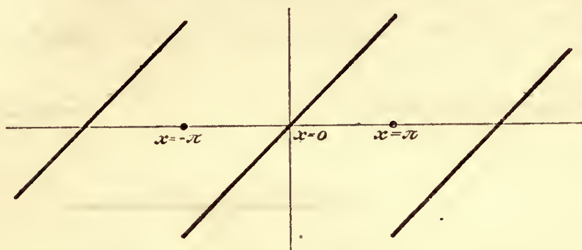


Fig. 1.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt die Gleichung (1) und liefert:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

2) Die im Intervall $0 < x < \pi$ durch $f(x) = \frac{\pi}{4}$ definierte Function gestattet die Darstellung durch eine Fourier'sche Sinusreihe, in welcher:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin nt \cdot dt = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n}$$

ist. Man hat also als in dem genannten Intervall gültig:

$$(2) \qquad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots.$$

Versteht man unter $S_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der einzelnen Reihe, so ist es interessant zu beobachten, wie schnell z. B. im vorliegenden Falle die durch $y_1 = S_1(x), y_2 = S_2(x), \ldots$ dargestellten Curven sich der dem Summenwerte der Reihe entsprechenden, aus lauter geradlinigen Strecken und isolierten Punkten bestehenden Curve annähern. Man kann hierbei aus der einzelnen Curve die nächstfolgende stets leicht durch „Composition" mit einer einfachen Sinuscurve $y = \frac{\sin nx}{n}$ herstellen; hierbei besteht der Process der Composition zweier gegebenen Curven einfach in der Herstellung einer neuen Curve, deren Ordinate beim einzelnen x gleich der „Summe" der zugehörigen Ordinaten der gegebenen Curven ist. In Figur 2 findet man für das Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ die vier ersten Annäherungen für die Reihe (2) zusammengestellt. Die jeweils punktierten Curven sind die zu componierenden; die Annäherungs-

curve ist ausgezogen, die den Summenwert der Reihe (2) darstellenden Geraden und Punkte sind stark markiert*).

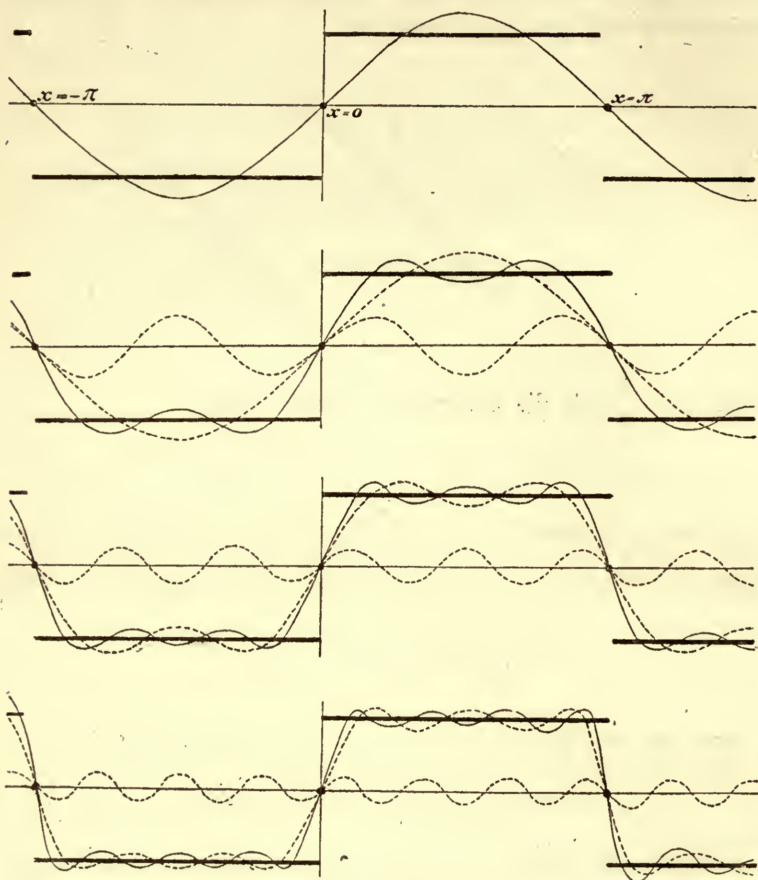


Fig. 2.

3) Definieren wir eine Function für das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ durch $f(x) = x$, sowie für $\frac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ durch $f(x) = \pi - x$, so ist bei der Entwicklung in eine Fourier'sche Sinusreihe:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin nt\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t) \sin nt\, dt.$$

*) Man findet diese und analoge Figuren sowie eine reiche Auswahl weiterer Beispiele in dem Werk von W. E. Byerly, *„An elementary treatise on Fourier's series etc."* (Boston 1893).

Die Darstellung der vorgelegten Function $f(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ ist somit zufolge einer leichten Zwischenrechnung gegeben durch:

$$(3)\quad f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \frac{1}{49}\sin 7x + \cdots\right).$$

Da hier die Quadrate der ungeraden Zahlen in den Nennern auftreten, so ist die Convergenz der Reihe eine besonders schnelle. Die in Figur 3

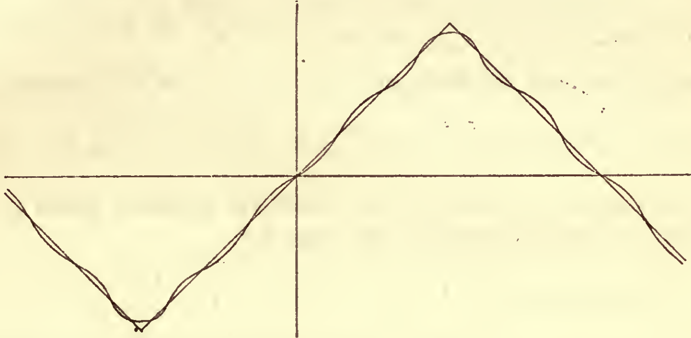


Fig. 3.

gezeichnete Näherungscurve, welche der Summe der ersten vier Glieder entspricht, schliesst sich an die der Function $y = f(x)$ zugehörige Zickzacklinie bereits sehr eng an.

Nimmt man in (3) für x speciell $\frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$(4)\qquad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

4) Die im Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$ durch $f(x) = x \cdot \sin x$ gegebene gerade Function von x wird sich in eine Fourier'sche Cosinusreihe entwickeln lassen. Für dieselbe gilt:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \sin t \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t \sin(n+1)\, t\, dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t \sin(n-1)\, t\, dt,$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n^2-1} \text{ für } n \neq 1.$$

Man hat also im genannten Intervall die Entwicklung:

$$(5)\quad x \cdot \sin x = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \cdots\right).$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt:

$$(6)\qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots.$$

5) Wir setzen endlich $f(x) = \cos \mu x$, unter μ eine beliebige positive oder negative, jedoch nicht ganzzahlige Constante verstanden.

Diese Function gestattet im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ die Darstellung durch eine Fourier'sche Cosinusreihe, wobei der Coefficient b_n gegeben ist durch:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu t \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big[\cos(\mu+n)t + \cos(\mu-n)t\Big]\, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\mu+n)\pi}{\mu+n} + \frac{\sin(\mu-n)\pi}{\mu-n}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi}\sin\mu\pi\,\frac{2\mu}{\mu^2-n^2}.$$

Es gilt hiernach im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ die Darstellung:

$$(7) \qquad \cos\mu x = \frac{2\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left[\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2-1} + \frac{\cos 2x}{\mu^2-2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2-3^2} + \cdots\right].$$

Setzt man $x = \pi$ und ersetzt demnächst μ wieder durch x, so ergiebt sich die Partialbruchreihe für $\operatorname{cotg} \pi x$:

$$(8) \qquad \frac{\pi}{2x}\operatorname{cotg}\pi x = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1^2} + \frac{1}{x^2-2^2} + \frac{1}{x^2-3^2} + \cdots.$$

Aufgabe 1. Man entwickele im Intervall $0 \leqq x < \pi$ die Function $f(x) = x^2$ in eine Fourier'sche Sinusreihe.

Aufgabe 2. Die Function $f(x) = e^x$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ in eine Cosinusreihe zu entwickeln.

Aufgabe 3. Es sei $f(x) = 0$ für $-\pi \leqq x \leqq 0$ und $f(x) = x$ für $0 \leqq x \leqq \pi$. Wie lautet die zugehörige Fourier'sche Reihe der Gestalt (1) pg. 10?

Aufgabe 4. Die Function $\sin\mu x$ für das Intervall $0 \leqq x < \pi$ in eine Fourier'sche Sinusreihe zu entwickeln.

§ 6. Allgemeinere Gestalt der Fourier'schen Reihen.

Man setze in den Formeln der §§ 3 und 4:

$$(1) \qquad x = \frac{\pi}{l}x_1, \quad f(x) = f\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) = f_1(x_1),$$

wobei l irgend eine positive endliche Grösse bedeutet. Das Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ liefert dabei für x_1 das Intervall $-l \leqq x_1 \leqq +l$. Lassen wir nach Transformation der Formeln (1) und (2) pg. 10 die Indices bei der Variabelen x_1 und der Function $f_1(x_1)$ wieder fort, so entspringt folgender allgemeinere Ansatz für die Fourier'schen Reihen: *Jede den „Dirichlet'schen Bedingungen" im Innern des Intervalls $-l \leqq x \leqq +l$ genügende periodische Function $f(x)$ mit der Periode $2l$ gestattet die Darstellung in Gestalt einer convergenten Fourier'schen Reihe:*

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_2\cos\frac{2\pi x}{l} + b_3\cos\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$
$$+ a_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\sin\frac{2\pi x}{l} + a_3\sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots,$$

(3) $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

wobei jedoch an jeder Unstetigkeitsstelle der Summenwert der Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Grenzwerten $f(x+0)$ *und* $f(x-0)$ *ist.*

Die besonderen Theoreme des § 4 aber kleiden sich in folgende allgemeinere Gestalt: *Eine im Intervall* $0 \leqq x \leqq l$ *definierte und daselbst den „Dirichlet'schen Bedingungen" genügende Function* $f(x)$ *lässt sich ebenda durch die convergente Fourier'sche Reihe:*

(4) $$f(x) = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

darstellen mit:

(5) $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt;$$

sie ist gleichfalls in diesem Intervall durch die convergente Reihe:

(6) $$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_2\cos\frac{2\pi x}{l} + b_3\cos\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

darstellbar, in welcher gilt:

(7) $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt.$$

Jedoch ist hier wieder der Zusatz zu machen, *dass die Formel* (4) *für* $x=0$ *und* $x=\pi$ *nur dann gilt, falls* $f(0)=0$ *bezw.* $f(\pi)=0$ *ist.*

§ 7. Die Fourier'schen Integrale.

Trägt man in (2) § 6 für a_n, b_n die Integralausdrücke (3) ein, so ergiebt sich unter Zusammenfassung jeweils der beiden Glieder mit gleichem Index n:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt.$$

Diese Formel kann man mit Benutzung des Umstandes, dass der Cosinus eine gerade Function ist, auch so schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt\right).$$

Wir nehmen nun an, dass diese Gleichung auch dann noch gültig bleibt, wenn l über alle Grenzen wächst. Die Summe geht alsdann,

indem wir $\frac{n\pi}{l} = u$, $\frac{\pi}{l} = du$ schreiben, in ein Integral über; man gewinnt nämlich:

(1) $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t - x)\ dt \right).$$

Man sagt, *es handele sich in dieser Formel um die Darstellung einer „willkürlichen" Function $f(x)$ durch ein „Fourier'sches Integral"*. In der That kann man durch eine genauere Untersuchung*) feststellen, dass die Formel (1) unter gewissen Voraussetzungen betreffs der Function $f(x)$ eine richtige ist. Hinreichende Bedingungen sind z. B. die, dass $f(x)$ eine überall stetige, eindeutige und integrierbare Function ist, die für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ verschwindet, und die im ganzen nur endlich viele Maxima und Minima aufweist.

Zwei specielle Fourier'sche Integralformeln schliessen sich an die Gleichungen (4) und (6) § 6 an. Man gewinnt für alle positiven Werte von x:

(2) $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(du \int_0^{\infty} f(t) \sin ux \sin ut\ dt \right),$$

(3) $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(du \int_0^{\infty} f(t) \cos ux \cos ut\ dt \right).$$

Bei Ausdehnung auf negative x erweist sich die in (2) dargestellte Function $f(x)$ als ungerade, die in (3) dargestellte als gerade.

§ 8. Physikalische Anwendungen der Fourier'schen Reihen und Integrale.

1) Das bereits in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel entwickelte Problem der Saitenschwingung werde für den Fall gelöst, dass die Gestalt der Saite zur Zeit $t = 0$ die in Fig. 4 angegebene ist. Es erscheint hier also die Saite an der Stelle $x = a$ etwa durch einen Stift abseits gezogen. Zur Zeit $t = 0$ denke man den Stift fortgenommen und die Saite ihrer eigenen Spannkraft überlassen. Es ist die Frage, wie sich die Saite bewegen wird.

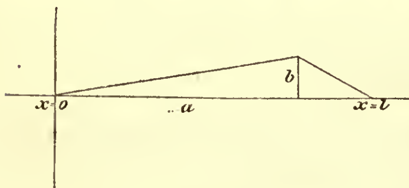


Fig. 4.

*) Siehe hierüber z. B. das pg. 11 genannte Werk von Serret-Harnack, pg. 371 ff.

Die pg. 2 mit $f(x)$ bezeichnete Function ist hier für das Intervall $0 \leqq x \leqq l$ definiert, unter l wie oben die Saitenlänge verstanden; und zwar haben wir:

$$f(x) = \frac{b}{a} x \text{ für } 0 \leqq x \leqq a, \quad f(x) = b \frac{l-x}{l-a} \text{ für } a \leqq x \leqq l,$$

wenn hierbei b die zu $x = a$ gehörige Ordinate der Saite zur Zeit $t = 0$ ist. Da ferner eine Anfangsgeschwindigkeit für keinen Punkt der Saite vorliegt, so haben wir für $g(x)$ in (2) pg. 2 die Constante 0 einzutragen.

Wir lösen nun unsere Aufgabe dadurch, dass wir eine Function $y = F(x, t)$ angeben, welche die Gestalt der Saite zu jeder beliebigen Zeit t darstellt. Als Integral der Differentialgleichung (1) pg. 1 setzen wir diese Function in der pg. 2 unter (4) gegebenen Gestalt an:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi\alpha}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi\alpha}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Die zunächst noch unbekannten Coefficienten a_n, b_n werden auf folgende Art aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Man hat zur Zeit $t = 0$:

$$y = F(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

und also ergiebt sich aus dem Ansatze (5) p. 17*):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \frac{b}{a} \int_0^a s \sin \frac{n\pi s}{l} ds + \frac{2}{l} \cdot \frac{b}{l-a} \int_a^l (l-s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds,$$

$$a_n = \frac{2bl^2}{a(l-a)n^2\pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi a}{l}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten b_n knüpfen wir an:

$$g(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{\pi\alpha}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Da nun $g(x)$ constant gleich null ist, so erkennt man mit Hilfe von (5) pg. 17, dass alle Coefficienten b_n verschwinden.

Die Bewegung der Saite ist hiernach durch folgende Formel dargestellt:

---

*) Wir haben hierbei zur Vermeidung von Verwechslungen mit der Zeit die Integrationsvariabele t durch s ersetzt.

(1) $$y = \frac{2bl^2}{a(l-a)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi\alpha t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Es handelt sich hiernach um eine periodische Bewegung; die Dauer einer einzelnen Schwingung ist $t = \frac{2l}{\alpha}$*).

2) Ein anderes wichtiges Gebiet der Anwendung der Fourier'schen Reihen und Integrale ist die Theorie der Wärmeleitung.

Wir denken z. B. den gesamten rechts von der yz-Ebene eines rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystems gelegenen unendlichen Raum durch eine Substanz erfüllt, welche nach allen Richtungen hin die Wärme gleichmässig zu leiten fähig ist**). Die Verteilung der Temperatur η sei eine solche, dass zur Zeit $t = 0$ jeweils in allen Punkten der einzelnen Ebene $x =$ Const. eine und dieselbe Temperatur herrscht; η wird demnach allein von x abhängig sein und möge zur Zeit $t = 0$ durch die willkürlich zu wählende stetige Function $\eta = f(x)$ gegeben sein. Für $x = 0$ werde $f(x) = 0$, und es sei eine Anordnung getroffen, dass die Temperatur der Grenzebene $x = 0$ unseres Körpers dauernd auf der Temperatur 0 erhalten bleibe. Welches wird nach Verlauf einer beliebigen Zeit t die Temperaturverteilung im Körper sein?

Die Änderung der Temperatur η wird eine solche sein, dass auch nach Verlauf einer beliebigen endlichen Zeit η von y und z unabhängig, d. i. wieder für alle Punkte der einzelnen Ebene $x =$ Const. selber constant ist. Es stellt hiernach die Temperatur η eine Function allein der Coordinate x und der Zeit t dar; und zwar ergiebt eine eingehendere Untersuchung, dass diese Function $\eta = F(x, t)$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

(2) $$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},$$

in welcher α^2 eine von der Natur der Substanz abhängende positive Constante ist.

Der Differentialgleichung (2) genügt nun die Function:

$$e^{-\alpha^2 u^2 t}\sin ux,$$

unter u eine beliebige, von x und t unabhängige Grösse verstanden.

---

*) Vergl. wegen der akustischen Bedeutung dieser und ähnlicher Entwicklungen H. Helmholtz, „*Die Lehre von den Tonempfindungen*" (Braunschweig, 1877) pg. 604 ff.

**) Man sehe wegen einer ausführlichen Behandlung dieses Gegenstandes sowie namentlich betreffs des Beweises der im Texte unter (2) mitgeteilten Differentialgleichung die pg. 1 genannten Vorlesungen B. Riemann's pg. 117 ff.

Da wir aber wieder mit einer homogenen linearen Gleichung (2) zu thun haben, so ist auch

$$e^{-\alpha^2 u^2 t} \sin ux \cdot \psi(u)\, du$$

ein Integral von (2), unter $\psi(u)$ eine beliebige Function von u und unter du das Differential von u verstanden. Es werden aber auch Summen solcher für verschiedene u gebildeten Ausdrücke die Differentialgleichung (2) befriedigen, und wir setzen insbesondere die gesuchte Function η als eine solche Summe, nämlich als das folgende Integral an*):

$$\eta = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 u^2 t} \sin ux \cdot \psi(u)\, du.$$

Für $t = 0$ soll nun $\eta = f(x)$ werden. Man hat also zu fordern:

$$f(x) = \int_0^\infty \sin ux \cdot \psi(u)\, du,$$

während andrerseits zufolge (2) pg. 18 der Ansatz gilt:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\sin ux \cdot du \int_0^\infty f(s) \sin us \cdot ds\right).$$

Der Vergleich dieser beiden Darstellungen von $f(x)$ liefert:

$$\psi(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \sin us \cdot ds$$

und damit die gesuchte Function:

$$\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(e^{-\alpha^2 u^2 t} \sin ux \int_0^\infty f(s) \sin us \cdot ds\right) du.$$

Wechseln wir hier die Reihenfolge der Integrationen:

$$\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(f(s)\, ds \int_0^\infty e^{-\alpha^2 u^2 t} \sin ux \sin us \cdot du\right),$$

so lässt sich die Integration nach u ausführen. Man hat erstlich:

---

*) Da es sich im Texte nur um die Ausführung eines Beispiels handelt, so unterbleibt eine genaue Untersuchung der Frage, inwieweit die Zulässigkeit der gezogenen Schlussweise etwa an Voraussetzungen über die Functionen $\psi(u)$ und $f(x)$ gebunden ist.

$$\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big(f(s)\, ds \int_0^\infty e^{-\alpha^2 u^2 t} \big(\cos u\,(x-s) - \cos u\,(x+s)\big)\, du\Big).$$

Hier aber lässt sich die sogleich zu beweisende Gleichung:

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-pu^2} \cos qu\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}}$$

anwenden, vermöge deren wir für η das Ergebnis gewinnen:

$$(4)\qquad \eta = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(s)\left(e^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4\alpha^2 t}}\right) ds.$$

Um aber die Formel (3) zu beweisen, setzen wir, unter r einen Parameter verstanden:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos rx\, dx = \varphi(r).$$

Durch Differentiation nach dem Parameter r folgt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin rx \cdot x\, dx = -\frac{d\varphi(r)}{dr}.$$

Andrerseits folgt durch partielle Integration:

$$\int e^{-x^2} \cos rx\, dx = \frac{1}{r} e^{-x^2} \sin rx + \frac{2}{r}\int e^{-x^2} \sin rx \cdot x\, dx.$$

Setzt man hier die Grenzen 0 und $+\infty$ ein, so ergiebt sich unter Benutzung der beiden letzten Gleichungen:

$$\varphi(r) = -\frac{2}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung für $\varphi(r)$ ergiebt:

$$\varphi(r) = C \cdot e^{-\frac{r^2}{4}},$$

wo C eine von r unabhängige Constante ist. Zur Bestimmung von C setzen wir $r = 0$ und finden:

$$C = \varphi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;$$

das hier auftretende Integral pflegt man in den elementareren Anwendungen der Integralrechnung zu behandeln. Um aus der damit bewiesenen Formel:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos rx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{r^2}{4}}$$

endlich die obige Gleichung (3) abzuleiten, führe man Stelle von x die neue Integrationsvariabele u vermöge $x = u\sqrt{p}$ ein und schreibe $r\sqrt{p} = q$*).

---

*) Weitere Beispiele von physikalischen Anwendungen der Fourier'schen Reihen und Integrale findet man u. a. in dem pg. 14 genannten Werke von Byerly.

Zweites Kapitel.

Kugel- und Cylinderfunctionen.

Die in diesem Kapitel zur Behandlung kommenden Functionen werden in verschiedenen Gebieten der mathematischen Physik sowie auch in der Astronomie gebraucht. Zur Einführung ist es zweckmässig, an den Begriff des Potentials solcher Kräfte anzuknüpfen, welche dem Gesetze der allgemeinen Massenanziehung gehorchen.

Es mögen n materielle Punkte der Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ im Raume fest gegeben sein, und es seien die Coordinaten des k^{ten} Punktes dieses Systems in einem rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystem durch a_k, b_k, c_k bezeichnet. Diese n materiellen Punkte mögen nach dem Gravitationsgesetze von Newton anziehend auf einen beweglichen Angriffspunkt der Coordinaten x, y, z wirken, dem wir der Einfachheit wegen die Masse 1 erteilen. Die Entfernung r_k des Angriffspunktes vom k^{ten} Punkte des Systems ist:

$$(1) \qquad r_k = \sqrt{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 + (z-c_k)^2}.$$

Wir bilden nun die mit dem Angriffspunkte (x, y, z) veränderliche Summe:

$$(2) \qquad V(x, y, z) = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n}$$

und bezeichnen dieselbe nach Gauss*) als das *„Potential des gegebenen Massensystems"*. Bereits Lagrange**) kannte die erste Grundeigenschaft dieser Function V, dass ihre drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ den nach den Axen genommenen Componenten der auf den An-

*) Siehe die 1840 erschienene Abhandlung *„Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte"*. Gauss' Werke Bd. 5 pg. 195.

**) Vergl. den Aufsatz *„Sur l'équation séculaire de la lune"* in den „Mémoires de l'académie des sciences" (Paris, 1773) oder „Oeuvres" t. 6 pg. 349.

griffspunkt wirkenden Anziehungskraft gleich sind; und Laplace*) stellte 1787 die nach ihm benannte partielle Differentialgleichung:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

auf, welche für jeden von den Punkten m_k verschiedenen Punkt (x, y, z) richtig ist**).

Auch die Ausdehnung dieses Ansatzes auf den Fall, dass die anziehenden Massen Teile des Raumes continuierlich erfüllen, hat schon Lagrange***) ausgeführt. Hier tritt an Stelle der Summe (2) das Integral:

$$(4) \qquad V(x, y, z) = \int \frac{dm}{r},$$

wo dm ein Element der anziehenden Masse und r dessen Entfernung vom Angriffspunkt (x, y, z) ist, während das Integral über die gesamte anziehende Masse auszudehnen ist. Die oben genannten Grundeigenschaften des Potentials bleiben hier erhalten, wenn wir an der Annahme festhalten, dass der Angriffspunkt ausserhalb der anziehenden Masse gelegen ist.

Bei Untersuchungen, welche mit dem Potential von „Punkten auf einer festen Kugelfläche" zusammenhängen, wurden nun Legendre vermutlich zu Beginn der achtziger Jahre vorigen Jahrhunderts****) und Laplace 1782†) zur Einführung einer Gattung neuer Functionen geführt, welche wir nach Gauss††) als *„Kugelfunctionen"* bezeichnen. Die Definition und die Grundeigenschaften dieser Kugelfunctionen sollen in dem vorliegenden Kapitel entwickelt werden. Wir haben dabei neben den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z auch noch Polarcoordinaten im Raume zu benutzen. Die letzteren sollen gleich zu Anfang

---

*) Cf. *„Mémoire sur la théorie de l'anneau de saturne"* in den „Mémoires de l'académie etc." (Paris, 1787) oder „Oeuvres" t. 11 pg. 278.

**) Die Beweise dieser Behauptungen, welche übrigens auf Grund der Formeln (1) und (2) leicht durchführbar sind, findet man in jedem Lehrbuche der Potentialtheorie; man vergl. etwa R. Clausius, *„Die Potentialfunction und das Potential"*, 3. Aufl. (Leipzig, 1877) oder P. G. Lejeune-Dirichlet, *„Vorl. über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte"*, herausgegeben von Grube, 2. Aufl. (Leipzig, 1887).

***) An der bereits oben genannten Stelle.

****) Seine bezüglichen Veröffentlichungen finden sich in den „Mémoires des savants étrangers" (Paris 1785).

†) Vergl. die Abhandlung *„Théorie des attractions des sphéroides"* in den „Mémoires de l'académie des sciences" (Paris, 1782) oder „Oeuvres" t. 10 pg. 362.

††) Siehe den letzten Teil eines von Gauss verfassten Referates in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 10. Jan. 1828, Gauss' Werke Bd. 6 pg. 648.

des Kapitels eingeführt werden; und es soll insbesondere die Laplace'sche Differentialgleichung (3) auf Polarcoordinaten transformiert werden*).

Es kommen in der theoretischen Physik und Astronomie noch verschiedene Gattungen von Functionen vor, welche mit den Kugelfunctionen nahe verwandt sind. Am leichtesten ist von den Kugelfunctionen aus der Übergang zu den sogenannten *„Cylinderfunctionen“* zu gewinnen, welche ihren Namen daher tragen, weil sie beim Potential des Cylinders eine ähnliche Rolle spielen, wie die Kugelfunctionen beim Potential der Kugel.

Historisch treten die Cylinderfunctionen zuerst in Fourier's Untersuchungen über Wärmeleitung**) auf. Noch nachhaltiger wirkte der Gebrauch, den Bessel von diesen Functionen bei Lösung der sogen. Kepler'schen Aufgabe machte, d. i. der Aufgabe, aus der mittleren Anomalie eines Planeten die exentrische Anomalie desselben zu berechnen***). Die fraglichen Functionen werden dieserhalb vielfach auch als „Bessel-sche Functionen“ bezeichnet.

Die Grundeigenschaften der Cylinderfunctionen und die Lösung der Kepler'schen Aufgabe vermittelst derselben sollen unten behandelt werden.

Für das ausführliche Studium der Kugelfunctionen und der mit ihnen verwandten Functionen sei auf E. Heine's *„Handbuch der Kugelfunctionen“*****) verwiesen. Kürzer und an Anwendungen reich ist das schon im vorigen Kapitel mehrfach genannte Werk Byerly's *„An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics“*†).

§ 1. **Polarcoordinaten im Raume.**

Die rechtwinkligen Raumcoordinaten x, y, z sollen wie in Fig. 5 angeordnet sein. Die positiven Axenrichtungen OX, OY, OZ sind hier

---

*) In dieser auf Polarcoordinaten bezogenen Gestalt wurde die fragliche Differentialgleichung von Laplace sogar zuerst aufgestellt; siehe die schon genannte Abhandlung in den „Mémoires de l'académie des sciences“ (Paris, 1782), „Oeuvres“ t. 10 p. 362.

**) Gesammelt in der *„Théorie analytique de la chaleur“* (Paris, 1822).

***) Siehe die Abhandlungen Bessel's *„Analytische Behandlung der Kepler-schen Aufgabe“* in den „Abhandlungen der Berliner Akademie“ von 1816—1817 pg. 49 und *„Untersuchungen über den Teil der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht“* in den „Abhandlungen der Berliner Akademie“ von 1824 pg. 1.

****) Zwei Bände, 2. Aufl. (Berlin 1878 und 1881).

†) Boston, 1893.

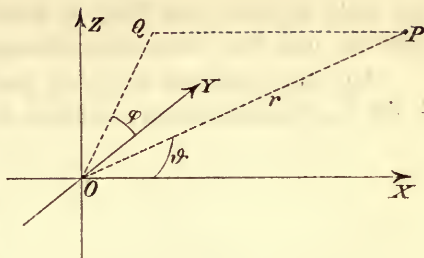


Fig. 5.

mit Pfeilen versehen. Denkt man die xz-Ebene mit der Ebene des Papiers zusammenfallend, so soll die positive y-Richtung die dem Leser abgewandte sein.

In der yz-Ebene nehme man den Nullpunkt O zum Pol und die positive y-Axe zur Axe eines Systems von Polarcoordinaten ϱ, φ, so dass z. B. für den Punkt Q dieser Ebene die Coordinaten $\varrho = \overline{OQ}$ und $\varphi = \sphericalangle\, QOY$ sind. Man hat alsdann:

$$(1) \qquad y = \varrho \cos \varphi, \quad z = \varrho \sin \varphi, \quad \varrho = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{y},$$

und es sind ϱ und φ variabel in den Intervallen $\varrho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Für einen beliebigen Punkt P des Raumes mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z fälle man das Lot $\overline{PQ}$ auf die yz-Ebene. Hat der Fusspunkt Q desselben die Polarcoordinaten ϱ, φ, so bezeichnet man x, ϱ, φ als *„Cylindercoordinaten"* des Punktes P. Durch eine einzelne Gleichung $\varrho =$ Const. ist in der That ein gerader Kreiscylinder mit der x-Axe als Axe dargestellt.

Um zu den Polarcoordinaten im Raume zu gelangen, setzen wir noch den „Radius vector" $r = \overline{OP}$ des Punktes P hinzu, sowie den Winkel $\vartheta = \sphericalangle\, POX$, welchen dieser Radius vector gegen die positive x-Axe bildet. Hierbei gilt $\varrho = r \sin \vartheta$, und es sind r und ϑ variabel in den Intervallen $r \geqq 0$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$. Man bezeichnet aber r, ϑ, φ als die *„Polarcoordinaten"* von P. Dabei heisst O der „Pol" und die bisherige positive x-Axe die „Polaraxe" des Systems; der durch $y > 0$ charakterisierte Teil der xy-Ebene, welcher eine durch die x-Axe berandete „Halbebene" darstellt, heisse die „Polarebene" des Systems.

Der Zusammenhang der rechtwinkligen mit den Polarcoordinaten ist gegeben durch:

$$(2) \qquad x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$(3) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{y}.$$

Man veranschauliche sich, dass durch $r = C$, unter C einen variabelen Parameter verstanden, das System aller concentrischen Kugeln um den Pol dargestellt ist. Weiter liefert $\vartheta = C'$ das Büschel aller Kreiskegel mit der Polaraxe als Axe und dem Pol als Spitze, und end-

lich stellt $\varphi = C''$ das Büschel aller Halbebenen dar, welche durch die Polaraxe und ihre Rückwärtsverlängerung berandet sind.

Auf der einzelnen der eben genannten Kugeln hat man in ϑ und φ ein Coordinatensystem, welches der geographischen Ortsbestimmung auf der Erdoberfläche entspricht. Wir fassen hierbei den Schnittpunkt der Polaraxe mit der Kugelfläche als den „Nordpol" der letzteren auf, so dass der durch die yz-Ebene ausgeschnittene grösste Kugelkreis der „Äquator" wird. Es wird alsdann ϑ die „Poldistanz" und φ die „Länge" darstellen, Bezeichnungen, die gelegentlich gebraucht werden sollen; durch $\vartheta = C$ ist ein „Parallelkreis", durch $\varphi = C'$ ein „Meridianhalbkreis" dargestellt, wenn hierbei C, C' constante Grössen sind.

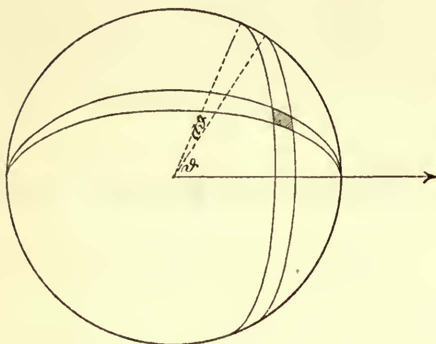


Fig. 6.

Die drei oben genannten Flächenbüschel $r = C$, $\vartheta = C'$, $\varphi = C''$ liefern eine Einteilung des ganzen Raumes in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda. Eines derselben werde eingegrenzt durch die beiden Kugeln der Radien r und $r + dr$, die beiden Kegel der Poldistanzen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, sowie die beiden Meridianebenen der Längen φ und $\varphi + d\varphi$. Der Volumeninhalt dieses Raumelementes sei $d\tau$; die auf der Kugelfläche des Radius r gelegene Grundfläche desselben habe den Flächeninhalt $d\sigma$, so dass jedenfalls $d\tau = dr \cdot d\sigma$ ist.

Zur Bestimmung des Oberflächenelementes $d\sigma$ aber dient Fig. 6, wo dasselbe durch Schraffierung ausgezeichnet ist. Man hat mit einem unendlich kleinen Rechteck zu thun, dessen eine Seite der zum Centriwinkel $d\vartheta$ gehörige Bogen des Kreises vom Radius r ist, während die andere Seite der zum Centriwinkel $d\varphi$ gehörige Bogen auf dem Parallelkreise des Radius $r \cdot \sin\vartheta$ ist. Der Inhalt des Rechtecks ist hiernach $r d\vartheta \cdot r \sin\vartheta\, d\varphi$. Wir merken als Resultat an: *Bei Gebrauch von Polarcoordinaten r, ϑ, φ stellen sich das Raumelement $d\tau$, sowie das auf der Kugel des Radius r gelegene Flächenelement $d\sigma$ wie folgt dar:*

$$(4) \qquad d\tau = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi, \quad d\sigma = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Wir lösen gleich noch die Aufgabe, den Winkel ω zwischen zwei Radien vectoren $r = \overline{OP}$ und $r' = \overline{OP'}$ zu bestimmen. Die Polarcoordinaten der Punkte P und P' seien r, ϑ, φ und r', ϑ', φ', die rechtwinkligen Coordinaten der gleichen Punkte x, y, z und x', y', z'.

Drückt man das Quadrat der Entfernung $\overline{PP'}$ einmal durch $x, y, \cdots z'$, sodann durch r, r', ω aus, so folgt:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \omega.$$

Mit Hülfe der ersten Relation (3) pg. 27 folgt hieraus weiter:

$$rr' \cos \omega = xx' + yy' + zz',$$

so dass der Gebrauch der Formeln (2) zu dem Satze führt: *Der Winkel ω zwischen irgend zwei vom Pol ausziehenden Strahlen der Coordinaten ϑ, φ und ϑ', φ' bestimmt sich aus:*

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi'). \tag{5}$$

§ 2. Transformation der Laplace'schen Differentialgleichung auf Cylinder- und Polarcoordinaten.

Die Laplace'sche Differentialgleichung (3) pg. 25 soll zunächst auf Cylindercoordinaten x, ϱ, φ transformiert werden; es sollen also an Stelle von y und z die Variabelen ϱ und φ eingeführt werden, deren Beziehung zu y und z durch die Gleichungen (1) pg. 27 gegeben ist. Man hat erstlich:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{1}$$

Aber bei partieller Abänderung von y allein folgt aus (1) pg. 27:

$$\partial y = \partial \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \, d\varphi, \quad 0 = \partial \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin \varphi}{\varrho}, \tag{2}$$

so dass sich aus (1) ergiebt:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\sin \varphi}{\varrho}.$$

Bei nochmaliger Differentiation nach y folgt, wenn man sogleich die Formeln (2) benutzt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) - \frac{\sin \varphi}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$$

oder explicite:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} - 2\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\varrho}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \, \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$
$$+ \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + 2\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\varrho^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Auf analoge Weise findet man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + 2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$
$$+ \frac{\cos^2\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial\varrho} - 2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2}\,\frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen liefert:

(3) $$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial\varrho}.$$

Fügt man noch die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ hinzu, so ergiebt sich als *Gestalt der Laplace'schen Differentialgleichung in Cylindercoordinaten:*

(4) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial\varrho} = 0.$$

Der Übergang zu Polarcoordinaten erfordert den Ersatz von x und ϱ durch r und ϑ vermöge der Formeln:

$$x = r\cos\vartheta, \quad \varrho = r\sin\vartheta.$$

Diese sind den Gleichungen (1) pg. 27 vollkommen analog gebaut. Wir werden somit aus der eben zuletzt unter (3) angegebenen Regel sogleich ablesen können:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Andrerseits findet man:

$$\frac{\partial V}{\partial\varrho} = \frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial\varrho} + \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho} = \frac{\partial V}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,\frac{\cos\vartheta}{r}.$$

Die linke Seite der Gleichung (4) liefert somit, wenn wir noch den Factor r^2 zufügen:

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = 0.$$

Unter Zusammenziehung der zwei ersten Glieder und ebenso der beiden letzten findet man als *Gestalt der Laplace'schen Differentialgleichung bei Zugrundelegung von Polarcoordinaten*:

(5) $$r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $\cos\vartheta = \mu$, so wird $\sin\vartheta\,\partial\vartheta = -\partial\mu$; die Gleichung (5) nimmt dann die Gestalt an:

(6) $$r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\,\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

§ 3. Die Legendre'schen Kugelfunctionen $P_n(\cos\vartheta)$.

Im Nordpol der Kugel des Radius 1 um den Pol O unseres Polarcoordinatensystems finde sich ein materieller Punkt der Masse 1.

Das Potential desselben auf einen beliebigen Angriffspunkt der Coordinaten (r, ϑ, φ) und der Masse 1 werde durch die besondere Bezeichnung T ausgezeichnet. Man hat nach der Definition (2) pg. 24 des Potentials:

(1) $$T = \frac{1}{+\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}}.$$

Die Weiterentwicklung entspringt aus der Aufgabe, den Ausdruck von T nach Potenzen von r zu entwickeln.

Man nehme zu diesem Ende zunächst $r < 1$ an und setze

$$T = (1 - re^{\vartheta i})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - re^{-\vartheta i})^{-\frac{1}{2}}.$$

Jeder der beiden Factoren rechter Hand lässt sich alsdann in eine wegen $r < 1$ convergente Binomialreihe entwickeln, und zwar wird der erste Factor*):

$$(1 - r e^{\vartheta i})^{-\frac{1}{2}} = \alpha_0 + \alpha_1 r e^{\vartheta i} + \alpha_2 r^2 e^{2\vartheta i} + \alpha_3 r^3 e^{3\vartheta i} + \cdots,$$

wo die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ folgende Bedeutung haben sollen:

(2) $$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad \alpha_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \cdots.$$

Man trifft nun den richtigen Wert von T mit dem positiven Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}$, wenn man setzt:

$$T = (\alpha_0 + \alpha_1 r e^{\vartheta i} + \alpha_2 r^2 e^{2\vartheta i} + \cdots)(\alpha_0 + \alpha_1 r e^{-\vartheta i} + \alpha_2 r^2 e^{-2\vartheta i} + \cdots).$$

Multipliciert man rechter Hand aus und ordnet nach ansteigenden Potenzen von r, so entspringt als Coefficient von r^n der folgende hinfort durch $P_n(\cos\vartheta)$ zu bezeichnende Ausdruck:

---

*) Dies soll heissen, dass einer der beiden Werte der an sich zweideutigen Function $(1 - r e^{\vartheta i})^{-\frac{1}{2}}$ durch den Summenwert der rechts stehenden convergenten Entwicklung gegeben ist. Findet der Leser eine Schwierigkeit im Gebrauch der binomischen Entwicklung für $(1 - z)^{-\frac{1}{2}}$ bei complexem z, so lässt sich der Ansatz des Textes so bestätigen: Ist der durch $|z|$ zu bezeichnende absolute Betrag von z kleiner als 1, so ist die Reihe $(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots)$ convergent. Berechnet man die zweite Potenz des Summenwertes dieser Reihe nach der Regel der Multiplication zweier convergenten Potenzreihen, so zeigt sich:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)^2 = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots.$$

Die hier rechts stehende für jedes reelle oder complexe z mit $|z| < 1$ convergente Reihe hat aber in der That den Summenwert $(1 - z)^{-1}$. Übrigens vergl. man die Angaben des nächst folgenden Kapitels über Potenzreihenentwicklungen complexer Funktionen.

(3) $P_n(\cos\vartheta) = \alpha_0\,\alpha_n \cos n\vartheta + \alpha_1\,\alpha_{n-1}\cos(n-2)\,\vartheta$
$+ \alpha_2\,\alpha_{n-2}\cos(n-4)\,\vartheta + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_1\cos(-n+2)\vartheta + \alpha_n\alpha_0\cos(-n)\vartheta.$

Der hiermit gewonnene Ausdruck wird in seiner Abhängigkeit von ϑ *als die „Legendre'sche Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung" bezeichnet,* eine Benennung, welche später motiviert wird.

Explicite schreibt sich die Definitionsgleichung (3) der Kugelfunction $P_n(\cos\vartheta)$ nach Division durch $\alpha_0\alpha_n$ so:

(4)
$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\,P_n(\cos\vartheta)$$
$$= \cos n\vartheta + \frac{1}{1}\cdot\frac{n}{(2n-1)}\cos(n-2)\vartheta + \frac{1\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\,\vartheta$$
$$+ \frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\,\vartheta + \cdots + \cos(-n)\,\vartheta.$$

Für die niedersten Zahlwerte n findet man insbesondere:

(5)
$$\begin{cases} P_0(\cos\vartheta) = 1, \\ P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta, \\ P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{4}(3\cos2\vartheta + 1), \\ P_3(\cos\vartheta) = \frac{1}{8}(5\cos3\vartheta + 3\cos\vartheta), \\ P_4(\cos\vartheta) = \frac{1}{64}(35\cos4\vartheta + 20\cos2\vartheta + 9), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ist $r > 1$, so setze man Gleichung (1) in die Gestalt:

$$rT = \frac{1}{+\sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{r}\right)\cos\vartheta + \left(\frac{1}{r}\right)^2}}.$$

Es wird sich hiernach rT in eine convergente Reihe nach ansteigenden Potenzen von $\frac{1}{r}$ entwickeln lassen, wobei der Coefficient von $\left(\frac{1}{r}\right)^n$ wieder $P_n(\cos\vartheta)$ wird. Unter Zusammenfassung beider Fälle merken wir das Resultat an: *Das oben bezeichnete Potential* T *gestattet für* $r < 1$ *die convergente Entwicklung:*

(6) $T = P_0(\cos\vartheta) + P_1(\cos\vartheta)\cdot r + P_2(\cos\vartheta)\cdot r^2 + P_3(\cos\vartheta)\cdot r^3 + \cdots,$

wo $P_n(\cos\vartheta)$ *die Legendre'sche Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung ist; für* $r > 1$ *tritt an Stelle von* (6) *die convergente Reihe:*

(7) $T = P_0(\cos\vartheta)\frac{1}{r} + P_1(\cos\vartheta)\frac{1}{r^2} + P_2(\cos\vartheta)\frac{1}{r^3} + P_3(\cos\vartheta)\frac{1}{r^4} + \cdots.$

Ist $\vartheta' = \pi - \vartheta$, so ist $\cos\vartheta' = -\cos\vartheta$ und $\cos\nu\vartheta' = (-1)^\nu\cos\nu\vartheta$. Man folgert daraufhin z. B. aus (3):

(8) $$P_n(-\cos\vartheta) = (-1)^n P_n(\cos\vartheta).$$

Die sämtlichen Coefficienten $\alpha_k\,\alpha_{n-k}$ in (3) sind positiv. Da nun der einzelne Cosinus höchstens gleich 1 und mindestens gleich -1 ist, so ist $P_n(\cos\vartheta)$ stets auf das durch die beiden Werte:

$$\pm(\alpha_0\alpha_n + \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\,\alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_n\alpha_0) = \pm P_n(1)$$

eingegrenzte Intervall beschränkt. Man hat aber zufolge (1) für $\cos\vartheta = 1$ und etwa $r < 1$:

$$T = \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots,$$

so dass $P_n(1) = 1$ ist. Hieraus ergiebt sich als *eine stets gültige Ungleichung:*

(9) $$-1 \leqq P_n(\cos\vartheta) \leqq +1.$$

§ 4. Differentialgleichung der Kugelfunctionen $P_n(\mu)$. Zweite Darstellung derselben.

Als Potential genügt T der Differentialgleichung (6) pg. 30; und da T von φ unabhängig ist, so hat man (unter Wiederaufnahme der Abkürzung $\cos\vartheta = \mu$):

$$r\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right) = 0.$$

Trägt man hier etwa unter der Annahme $r < 1$ für T die Entwicklung (6) pg. 32 ein und ordnet die linke Seite wieder nach ansteigenden Potenzen von r, so ergiebt sich:

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[(n+1)\,n\,P_n(\mu) + \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)\right] = 0.$$

Bei beliebig fixiertem stehenden Werte μ muss diese Gleichung für alle $r < 1$ richtig sein. Daraus geht hervor, dass notwendig der Coefficient jeder Potenz r^n einzeln verschwinden muss*). Man hat also als Ergebnis: *Die Function $P_n(\mu)$ ist ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

(2) $$n(n+1)P_n(\mu) + \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right) = 0,$$

der man auch die Gestalt geben kann:

*) Denn es liegt auf der linken Seite von (1) die für das Intervall $0 \leqq r < 1$ gültige Mac-Laurin'sche Entwicklung derjenigen Function $f(r)$ vor, welche daselbst zufolge der rechten Seite von (1) constant den Wert 0 besitzt.

$$(3) \qquad (1-\mu^2)\frac{d^2 P_n(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dP_n(\mu)}{d\mu} + n(n+1)P_n(\mu) = 0.$$

Diese Differentialgleichung soll bei einer zweiten Darstellung der Kugelfunctionen P_n Verwendung finden. Um diese neue Darstellung der P_n zu gewinnen, knüpfen wir an den Umstand, dass die Cosinus der Vielfachen von ϑ durch die höheren Potenzen von $\cos\vartheta$ ausgedrückt werden können. In der That hat man:

$$2^{n-1}\cos^n\vartheta = \frac{1}{2}(e^{\vartheta i} + e^{-\vartheta i})^n = \cos n\vartheta + \binom{n}{1}\cos(n-2)\vartheta + \cdots,$$

$$\cos n\vartheta = 2^{n-1}\cos^n\vartheta - \binom{n}{1}\cos(n-2)\vartheta - \binom{n}{2}\cos(n-4)\vartheta - \cdots.$$

Drückt man rechter Hand $\cos(n-2)\vartheta$ entsprechend durch $\cos^{n-2}\vartheta$ und $\cos(n-4)\vartheta, \cdots$ aus und fährt analog fort, so folgt für alle positiven ganzen Zahlen n:

$$(4) \qquad \cos n\vartheta = 2^{n-1}\cos^n\vartheta + c_1\cos^{n-2}\vartheta + c_2\cos^{n-4}\vartheta + \cdots,$$

wobei die Werte der Coefficienten $c_1, c_2, \cdots$ nicht näher bestimmt zu werden brauchen.

Ersetzt man nunmehr in der Darstellung (4) pg. 32 von P_n die Cosinus der Vielfachen von ϑ nach der soeben unter (4) angegebenen Regel durch ihre Ausdrücke in Potenzen von $\mu = \cos\vartheta$, so folgt, wenn man die ganze Gleichung noch durch 2^n teilt:

$$\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}P_n(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-2} + a_2\mu^{n-4} + \cdots,$$

wo $a_1, a_2, \cdots$ von μ unabhängige Coefficienten sind. $P_n(\mu)$ ist hiernach eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von μ, die je nachdem nur Potenzen mit geraden oder nur solche mit ungeraden Exponenten enthält.

Zur Bestimmung der Coefficienten $a_1, a_2, \cdots$ benutzen wir nun die Differentialgleichung (3), der mit $P_n(\mu)$ auch die rechte Seite der letzten Gleichung genügt. Tragen wir die hier stehende ganze Function n^{ten} Grades von μ in (3) ein, so ergiebt sich, falls man wiederum nach Potenzen von μ anordnet:

$$\sum_{k=0,1,2,\cdots}\mu^{n-2k-2}\Big[a_k(n-2k)(n-2k-1) + a_{k+1}(2k+2)(2n-2k-1)\Big] = 0$$

als eine für jeden Wert μ gültige Gleichung; hierbei hat man $a_0 = 1$ zu nehmen und die Summation bis $k = \frac{n-2}{2}$ bez. $\frac{n-3}{2}$ auszudehnen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es ergiebt sich, dass der Coefficient jeder einzelnen Potenz von μ verschwinden muss:

$$a_k (n-2k)(n-2k-1) + a_{k+1}(2k+2)(2n-2k-1) = 0;$$

hiermit aber ist eine Recursionsformel gewonnen, aus der wir die sämtlichen a von $a_0 = 1$ an berechnen können. *Die Legendre'sche Kugelfunction n^{ter} Ordnung P_n stellt sich in μ als ganze rationale Function n^{ten} Grades dar:*

$$(5) \quad P_n(\mu) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\Big[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\mu^{n-6} + \cdots\Big],$$

wobei die in der Klammer stehende Reihe durch das Bildungsgesetz ihrer Coefficienten von selbst bei μ^1 resp. μ^0 aufhört.

In den niedersten Fällen gelten folgende specielle Formeln:

$$(6) \quad \begin{cases} P_0(\mu) = 1, \qquad P_1(\mu) = \mu, \\ P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \\ P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \\ P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

§ 5. Satz über die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$.

Man verstehe unter x eine unbeschränkte reelle Veränderliche und definiere $P_n(x)$ aus Gleichung (5) § 4, indem man dortselbst μ durch x ersetzt. Durch binomische Entwicklung und nachherige wiederholte Differentiation erkennt man, *dass sich die ganze rationale Function $P_n(x)$ in Gestalt einer n^{ten} Ableitung so ausdrücken lässt:*

$$(1) \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}.$$

Aus dieser Formel können wir einen bemerkenswerten Schluss auf die Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades $P_n(x) = 0$ ziehen.

Eine ganze rationale Function $g(x)$ ist mit ihren sämtlichen Ableitungen für alle endlichen Werte x stetig; ein Maximum oder Minimum von $g(x)$ kann demnach nur unter Verschwinden der Ableitung $g'(x)$ eintreten. Ein einzelner Wert x heisse ein Nullpunkt von $g(x)$, falls für denselben $g(x) = 0$ ist. Da zwischen zwei Nullpunkten von $g(x)$ wenigstens ein Maximum oder Minimum dieser Function liegt, so liegt zwischen denselben auch wenigstens ein Nullpunkt von $g'(x)$.

Diese Überlegung wende man auf die Function $g(x) = (x^2-1)^n$ an. Die Ableitung $g'(x)$ hat wenigstens einen Nullpunkt im Inter-

vall $-1 < x < +1$, und da $g'(x)$ sowohl für $x = -1$ als $x = +1$ im Grade $(n-1)$ verschwindet, so treten weitere Nullpunkte überhaupt nicht auf. Durch Wiederholung des gleichen Schlussverfahrens findet man, dass $g''(x)$ zwei Nullpunkte im Intervall $-1 < x < +1$, jedoch keinen einzigen ausserhalb desselben hat. Indem man in der gleichen Weise bis zur n^{ten} Ableitung, d. i. bis $2^n \cdot n!\, P_n(x)$, fortfährt, ergiebt sich als Resultat: *Die Lösungen der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades $P_n(x) = 0$ sind sämtlich reell und im Intervall $-1 < x < +1$ gelegen.*

Dieser Satz kommt für die niedersten Fälle n in der am Schlusse des Kapitels angefügten Tafel der Werte der zugehörigen Functionen $P_n(\mu)$ direkt zum Ausdruck. Die Tafel bezieht sich freilich nur auf das Intervall $0 \leqq \mu \leqq 1$; doch schliesst man von hieraus auf das Intervall $-1 \leqq \mu < 0$ sofort vermöge der Relation $P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu)$, die in (8) p. 33 gewonnen wurde.

§ 6. Recursionsformeln für die Functionen $P_n(\mu)$.

Ist $r < 1$, so gilt zufolge (6) pg. 32:

$$(1-2\mu r+r^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0(\mu) + P_1(\mu) r + P_2(\mu) r^2 + P_3(\mu) r^3 + \cdots.$$

Durch Differentiation nach r folgt hieraus:

$$\frac{\mu - r}{(1-2\mu r+r^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(\mu) + 2P_2(\mu) r + 3P_3(\mu) r^2 + 4P_4(\mu) r^3 + \cdots.$$

Durch Combination dieser beiden Gleichungen schliesst man auf die Gültigkeit von:

$$\begin{aligned}(1-2\mu r+r^2)&(P_1(\mu) + 2P_2(\mu) r + 3P_3(\mu) r^2 + \cdots)\\ &+ (r-\mu)(P_0(\mu) + P_1(\mu) r + P_2(\mu) r^2 + \cdots) = 0,\end{aligned}$$

eine Gleichung, welche bei Anordnung nach ansteigenden Potenzen von r folgende Gestalt annimmt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[(n+1) P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu)\right] = 0.$$

Wie oben schliessen wir hier wieder, dass der Coefficient jeder Potenz von r verschwinden muss. *Die Legendre'schen Kugelfunctionen je drei auf einander folgender Ordnungen sind hiernach durch die Recursionsformel verknüpft:*

$$(1) \qquad (n+1) P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0.$$

Vermöge dieser Formel kann man die am Schlusse des Kapitels mitgeteilte Tafel der Werte von $P_1, P_2, \cdots P_6$ leicht auf die Functionen $P_7, P_8, \cdots$ ausdehnen.

An die Recursionsformel (1) reihen wir auch noch die folgende Gleichung an:

$$(2) \qquad \frac{dP_{n+1}(\mu)}{d\mu} - (2n+1)\, P_n(\mu) - \frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\mu} = 0.$$

Den Beweis derselben kann man auf die Formel (1) pg. 35 gründen. Zufolge derselben ist:

$$\frac{dP_{n+1}(\mu)}{d\mu} - \frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\mu}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\,\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\frac{d^2\left((\mu^2-1)^{n+1}\right)}{d\mu^2} - 4\,(n+1)\,n\,(\mu^2-1)^{n-1}\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung zieht sich nach kurzer Zwischenrechnung auf:

$$\frac{2n+1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n\left[(\mu^2-1)^n\right]}{d\mu^n} = (2n+1)\, P_n(\mu)$$

zusammen, womit Gleichung (2) bewiesen ist.

§ 7. **Zwei Integralgestalten für die Functionen $P_n(\mu)$.**

Indem man unter a und b zwei reelle Zahlen versteht, von denen $a > 0$ ist, setze man das Integral an:

$$\int_0^\pi \frac{d\eta}{a + ib\cos\eta}.$$

Dasselbe ist näher erklärt durch:

$$(1) \qquad \int_0^\pi \frac{d\eta}{a+ib\cos\eta} = \int_0^\pi \frac{a\,d\eta}{a^2+b^2\cos^2\eta} - ib\int_0^\pi \frac{\cos\eta\, d\eta}{a^2+b^2\cos^2\eta}.$$

Das zweite dieser Integrale verschwindet; denn man hat:

$$\int_0^\pi \frac{\cos\eta\, d\eta}{a^2+b^2\cos^2\eta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\eta\, d\eta}{a^2+b^2\cos^2\eta} - \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\eta\, d\eta}{a^2+b^2\cos^2\eta},$$

und hier erweist sich das letzte Integral nach Ausführung der Substitution $\eta = \pi - \zeta$ als gleich mit dem ersten Integral der rechten Seite.

Durch weitere Umwandlung des ersten Integrals auf der rechten Seite von (1) folgt:

$$\int_0^\pi \frac{d\eta}{a+ib\cos\eta} = \int_0^\pi \frac{a\,d\eta}{(a^2+b^2)\cos^2\eta + a^2\sin^2\eta} = \int_{\eta=0}^{\eta=\pi} \frac{a\,d\,\mathrm{tg}\,\eta}{(a^2+b^2)+a^2\,\mathrm{tg}^2\,\eta}.$$

Bestimmt man, dass das Vorzeichen von $\sqrt{a^2+b^2}$ positiv genommen werden soll, so findet man durch Ausführung des letzten Integrals:

$$\int_0^\pi \frac{d\eta}{a+ib\cos\eta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\operatorname{tg}\eta}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]_{\eta=0}^{\eta=\pi}.$$

Im Integrationsintervall durchläuft das Argument der Function arc tg alle Werte von 0 bis $+\infty$ und weiter von $-\infty$ bis 0. Der Wert der Klammer rechter Hand ist hiernach $+\pi$; man hat also:

(2) $$\int_0^\pi \frac{d\eta}{a+ib\cos\eta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Hier trage man nunmehr ein:

$$a = 1-\mu r, \quad b = -r\sqrt{1-\mu^2}.$$

Da $\mu = \cos\vartheta$ absolut $\leqq 1$ ist, so werden die an a und b zu stellenden Bedingungen jedenfalls erfüllt sein, wenn $r < 1$ angenommen wird. Die Gleichung (2) aber liefert alsdann mit Rücksicht auf (1) pg. 31:

$$\pi T = \int_0^\pi \frac{d\eta}{1-\mu r - r\cos\eta\sqrt{\mu^2-1}}.$$

Man kann nun das hier rechts stehende Integral auch so behandeln, dass man zunächst den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck nach ansteigenden Potenzen von r entwickelt und dann erst die Integration ausführt. Auf die Weise folgt:

$$\pi T = \sum_{n=0}^{\infty}\left[r^n \int_0^\pi (\mu + \cos\eta\sqrt{\mu^2-1})^n\, d\eta\right].$$

Der Vergleich mit der Entwicklung (6) pg. 32 für T liefert als *erste Integralgestalt der Function* $P_n(\mu)$:

(3) $$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\mu + \cos\eta\sqrt{\mu^2-1})^n\, d\eta. —$$

Nehmen wir ferner zwar $\mu \leqq 1$, aber $\mu r > 1$ an, so ist es statthaft in (2) einzutragen:

$$a = \mu r - 1, \quad b = r\sqrt{1-\mu^2}.$$

Man gewinnt so:

$$\pi T = \int_0^\pi \frac{d\eta}{\mu r + r\cos\eta\sqrt{\mu^2-1} - 1}.$$

Entwickelt man unter dem Integral nach fallenden Potenzen von r und integriert die entstehende Reihe gliedweise, so folgt:

$$\pi T = \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^{-n} \int_0^{\pi} \frac{d\eta}{(\mu + \cos\eta\sqrt{\mu^2 - 1})^n} \right].$$

Da aber diese Entwicklung von T mit derjenigen in (7) pg. 32 übereinstimmen muss, so entspringt als *eine zweite Integraldarstellung der Function* $P_n(\mu)$:

$$(4) \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\eta}{(\mu + \cos\eta\sqrt{\mu^2 - 1})^{n+1}}.$$

§ 8. Allgemeiner Begriff einer Kugelfunction der n^{ten} Ordnung.

Ein materieller Punkt der Masse 1 sei auf der um den Pol O mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel an beliebiger Stelle $(1, \vartheta', \varphi')$ gelegen. Das Potential T dieses Punktes auf einen beliebigen Angriffspunkt (r, ϑ, φ), dessen Masse gleichfalls 1 ist, stellt sich durch:

$$(1) \qquad T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\omega + r^2}}$$

dar; dabei ist ω der Winkel zwischen den beiden Strahlen der Coordinaten ϑ, φ und ϑ', φ', und man hat nach (5) pg. 29:

$$(2) \quad \cos\omega = \cos\vartheta \cdot \cos\vartheta' + \sin\vartheta\cos\varphi \cdot \sin\vartheta'\cos\varphi' + \sin\vartheta\sin\varphi \cdot \sin\vartheta'\sin\varphi'.$$

Man fasse T bei stehenden ϑ', φ' als Function von r, ϑ, φ und entwickele etwa unter der Annahme $r < 1$ nach Potenzen von r. Der Coefficient $P_n(\cos\omega)$ von r^n wird eine Function von ϑ und φ allein und werde als solche $X_n(\vartheta, \varphi)$ genannt:

$$(3) \qquad T = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi)\, r^n.$$

Aus dem Bildungsgesetz der Functionen P_n folgt mit Rücksicht auf (2), dass X_n eine ganze rationale Function n^{ten} Grades der drei Grössen:

$$(4) \qquad \xi = \cos\vartheta, \quad \eta = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \zeta = \sin\vartheta\sin\varphi$$

ist, welche bei gleichzeitigem Zeichenwechsel dieser drei Argumente, d. i. beim Übergange von ϑ, φ zu $\pi - \vartheta$, $\varphi + \pi$ den Factor $(-1)^n$ annimmt:

$$(5) \qquad X_n(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^n X_n(\vartheta, \varphi).$$

Als Potential genügt T der Laplace'schen Differentialgleichung (5) pg. 30. Hieraus ergiebt sich, wenn man in die genannte Differential-

gleichung für T seinen in (3) rechter Hand gegebenen Ausdruck einträgt, die Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial X_n}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} \right] = 0.$$

Wie früher schliesst man, dass diese nach Potenzen von r entwickelte Reihe nur dann beständig mit 0 identisch sein kann, wenn der Coefficient jeder Potenz von r einzeln verschwindet. Es folgt somit, dass $X_n(\vartheta, \varphi)$ der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$(6) \qquad n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial X_n}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Wir erweitern nun diesen Ansatz in folgender Weise: *Als eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung $X_n(\vartheta, \varphi)$ zweier Variabelen ϑ, φ soll jede Function bezeichnet werden, welche folgende Eigenschaften besitzt:*

1) *X_n ist als ganze rationale Function n^{ten} Grades in den drei unter* (4) *definierten Grössen ξ, η, ζ darstellbar;*

2) *X_n genügt der Relation* (5), *d. h. es kommen bei der Darstellung in ξ, η, ζ nur Glieder geraden (ungeraden) Grades vor, wenn die Ordnung n eine gerade (ungerade) Zahl ist.*

3) *X_n ist ein Integral der linearen homogenen Differentialgleichung* (6).

Versieht man die Glieder $(n-2\nu)^{ten}$ Grades im rationalen Ausdruck von X_n durch ξ, η, ζ mit dem Factor $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^\nu$, dessen Wert 1 ist, so geht X_n ohne Wertänderung in eine „homogene" Function n^{ten} Grades der ξ, η, ζ über. Daraufhin wird $r^n X_n = V$ eine ganze rationale homogene Function n^{ten} Grades von $x = r\xi$, $y = r\eta$, $z = r\zeta$; und es ist das Bestehen der Differentialgleichung (6) für X_n gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Laplace'schen Differentialgleichung für V, wie man auf's directeste beim Gebrauch der Gestalt (5) pg. 30 für letztere Differentialgleichung erkennt.

Da sich diese Entwicklung auch leicht umkehren lässt, so gewinnt man den Satz: *Die gesamten Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung werden gerade von allen der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = 0$$

genügenden ganzen rationalen homogenen Functionen V des n^{ten} Grades in x, y, z geliefert, wenn man in ihnen x, y, z durch ξ, η, ζ ersetzt.

Die Benennung „Kugelfunction" erscheint jetzt dadurch motiviert, dass die gesamten mit $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ vereinbaren Wertsysteme der ξ, η, ζ den Punkten der Kugeloberfläche des Radius 1 um O correspondieren. Man kann direct, wenn man ϑ, φ zur Coordinatenbestim-

mung auf dieser Oberfläche benutzt, $X_n(\vartheta, \varphi)$ als eine „Function auf der Kugeloberfläche" auffassen.

Eine von φ unabbängige Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist notwendig von der Gestalt:

$$a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-2} + a_2 \xi^{n-4} + \cdots.$$

Die Differentialgleichung (6) reduciert sich hier auf die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$n(n+1) X_n + \frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX_n}{d\xi}\right) = 0,$$

welche wir oben (pg. 33) für P_n als Function von μ aufstellten. Vermöge dieser Gleichung waren nun, wie in § 4 pg. 34 u. f. gezeigt wurde, alle Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \cdots$ eindeutig bestimmt; a_0 hingegen bleibt hier willkürlich wählbar. *Die allgemeinste von φ unabhängige Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist das Product einer beliebigen Constanten mit der Legendre'schen Function $P_n(\cos\vartheta)$.*

§ 9. Mannigfaltigkeit der Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung. Die zugeordneten Functionen $P_n^{(s)}(\cos\vartheta)$.

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Differentialgleichung der Kugelfunctionen linear und homogen ist, sowie auf Grund der beiden Fundamentaleigenschaften 1) und 2) der Kugelfunctionen erkennt man den Satz, dass mit $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \cdots, X_n^{(\nu)}$ stets auch:

$$(1) \qquad X_n = c_1 X_n^{(1)} + c_2 X_n^{(2)} + \cdots + c_\nu X_n^{(\nu)}$$

eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist, wenn hierbei $c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ irgend welche ν Constante sind.

Es entspringt hier die Frage, wie gross die Anzahl der von einander linear-unabhängigen Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung ist, in denen jede weitere dieser Ordnung angehörende Kugelfunction X_n linear in der Gestalt (1) darstellbar ist. Die Beantwortung dieser Frage ist in einem wichtigen Theoreme enthalten, welches zugleich eine charakteristische Darstellung der $X_n(\vartheta, \varphi)$ in ϑ und φ zum Gegenstande hat.

Schreibt man $X_n(\vartheta, \varphi)$ als homogene Function n^{ten} Grades von ξ, η, ζ, so kann man explicite setzen:

$$(2) \qquad X_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{s,t} C_{s,t} \cos^{n-s}\vartheta \sin^s\vartheta \cdot \cos^t\varphi \sin^{s-t}\varphi,$$

wo man für s von $s=0$ bis $s=n$ und bei stehendem s für t von $t=0$ bis $t=s$ zu summieren hat; die $C_{s,t}$ sind Constante. *Umgekehrt*

stellt jede Summe dieser Art, für welche die Differentialgleichung (6) *pg.* 40 *erfüllt ist, eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung dar.*

Nun hat man aber allgemein für irgend zwei nicht-negative ganze Zahlen l, m:

$$2^{l+m} \cdot i^m \cos^l \varphi \sin^m \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^l (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^m$$
$$= e^{(l+m)i\varphi} + (l-m)\, e^{(l+m-2)i\varphi} + \cdots + (-1)^m e^{-(l+m)i\varphi}.$$

Mit Rücksicht auf das Verhalten dieses Ausdrucks bei Zeichenwechsel von φ schliesst man bei geradem m auf die Gültigkeit der Formel:

$$\cos^l \varphi \cdot \sin^m \varphi = a_0 \cos (l+m)\varphi + a_1 \cos (l+m-2)\varphi$$
$$+ a_2 \cos (l+m-4)\varphi + \cdots,$$

wogegen man bei ungeradem m hat:

$$\cos^l \varphi \cdot \sin^m \varphi = b_0 \sin (l+m)\varphi + b_1 \sin (l+m-2)\varphi$$
$$+ b_2 \sin (l+m-4)\varphi + \cdots;$$

die a und b sind Constante, und in beiden Fällen beziehen sich die Reihen auf alle nicht-negativen Vielfachen $(l+m-2k)\varphi$ von φ.

Unter Benutzung dieser Ansätze schreibe man auf der rechten Seite von (2) für $\cos^t \varphi \sin^{s-t} \varphi$

$$\sum_k a_k \cos (s-2k)\varphi \quad \text{resp.} \quad \sum_k b_k \sin (s-2k)\varphi.$$

Im einzelnen Gliede des damit für X_n entspringenden Ausdrucks ersetze man $\cos^{n-s} \vartheta \sin^s \vartheta \cos (s-2k)\varphi$ durch:

$$\sin^{s-2k}\vartheta \cdot [(1-\cos^2\vartheta)^k \cos^{n-s}\vartheta] \cos (s-2k)\varphi$$

bezw. $\cos^{n-s} \vartheta \sin^s \vartheta \sin (s-2k)\varphi$ durch:

$$\sin^{s-2k}\vartheta \cdot [(1-\cos^2\vartheta)^k \cos^{n-s}\vartheta] \sin (s-2k)\varphi.$$

Den ganzen so entspringenden Ausdruck von X_n wolle man schliesslich nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ entwickeln. Auf diese Weise gewinnt man:

$$(3) \quad X_n(\vartheta, \varphi) = \Phi_0 + \Phi_1 \cos \varphi + \Phi_2 \cos 2\varphi + \cdots + \Phi_n \cos n\varphi$$
$$+ \Psi_1 \sin \varphi + \Psi_2 \sin 2\varphi + \cdots + \Psi_n \sin n\varphi,$$

wobei die Abkürzungen Φ und Ψ gebraucht sind für:

$$\Phi_s = \sin^s\vartheta\, (c_0 \cos^{n-s}\vartheta + c_1 \cos^{n-s-2}\vartheta + c_2 \cos^{n-s-4}\vartheta + \cdots),$$
$$\Psi_s = \sin^s\vartheta\, (d_0 \cos^{n-s}\vartheta + d_1 \cos^{n-s-2}\vartheta + d_2 \cos^{n-s-4}\vartheta + \cdots).$$

Die Umkehrung dieser Entwicklung, d. i. die Umsetzung eines beliebigen Ausdrucks X_n von der Gestalt (3) in eine ganze rationale Function von ξ, η, ζ, ist ziemlich leicht vollzogen, indem man rückwärts

$\cos s\varphi$ und $\sin s\varphi$ als homogene Functionen s^{ten} Grades von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ darstellt*) und daraufhin $\sin^s\vartheta\cos s\varphi$ und $\sin^s\vartheta\sin s\varphi$ als homogene Ausdrücke s^{ten} Grades in η, ζ schreibt. Da offenbar auch die Relation (5) pg. 39 erfüllt ist, so ergiebt sich, *dass jeder Ausdruck* (3) *eine Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung darstellt, falls er der Differentialgleichung* (6) *pg.* 40 *genügt.*

Setzt man aber in diese Differentialgleichung den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) ein, so ergiebt sich:

$$(4)\quad Q_0 + Q_1\cos\varphi + \cdots + Q_n\cos n\varphi + R_1\sin\varphi + \cdots + R_n\sin n\varphi = 0,$$

wobei Q, R Abkürzungen für folgende Ausdrücke sind:

$$Q_s = \left[n(n+1) - \frac{s^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Phi_s + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Phi_s}{d\vartheta}\right),$$
$$R_s = \left[n(n+1) - \frac{s^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Psi_s + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Psi_s}{d\vartheta}\right).$$

Interpretiert man nun die Gleichung (4) für beliebig gewähltes ϑ und veränderliches φ, so zeigt die Theorie der Fourier'schen Reihen (cf. (3) pg. 4), dass diese Gleichung stets und nur dann erfüllt ist, wenn die sämtlichen Q und R einzeln verschwinden. *Man hat also in* (3) *die allgemeinste Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung, wenn* Φ_s *die Gleichung befriedigt:*

$$(5)\qquad \left[n(n+1) - \frac{s^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Phi_s + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Phi_s}{d\vartheta}\right) = 0,$$

und wenn Ψ_s *ein Integral derselben Differentialgleichung ist.*

Zur näheren Discussion dieser Differentialgleichung setzen wir:

$$(6)\qquad \Phi_s = \sin^s\vartheta\cdot T_s(\cos\vartheta),\qquad \Psi_s = \sin^s\vartheta\cdot U_s(\cos\vartheta).$$

Es sind alsdann T_s und U_s Functionen von $\cos\vartheta$ allein, die sich bei Gebrauch der Abkürzung $\cos\vartheta = \mu$ so schreiben:

$$T_s = c_0\,\mu^{n-s} + c_1\,\mu^{n-s-2} + c_2\,\mu^{n-s-4} + \cdots,$$
$$U_s = d_0\,\mu^{n-s} + d_1\,\mu^{n-s-2} + d_2\,\mu^{n-s-4} + \cdots,$$

wobei sich die rechts stehenden Reihen auf alle nicht-negativen ganzzahligen Exponenten $(n - s - 2k)$ beziehen. Die Gleichung (5) aber rechnet sich um auf:

$$(7)\quad (1-\mu^2)\frac{d^2T_s}{d\mu^2} - 2(s+1)\,\mu\frac{dT_s}{d\mu} + [n(n+1) - s(s+1)]\,T_s = 0,$$

und derselben Differentialgleichung genügt auch U_s.

---

*) Die damit postulierte homogene Darstellung wird man z. B. für $\cos s\varphi$ durch eine sehr einfache Umwandlung der Formel (4) pg. 34 gewinnen.

Diese Gleichung wird für $s = 0$ direct die Differentialgleichung (3) pg. 34 der Legendre'schen Kugelfunction $P_n(\cos\vartheta)$. Vermöge der ebenda durchgeführten Rechnung ziehen wir bei der Gestalt von T_0 die Folgerung, *dass T_0 von $P_n(\mu)$ nur um einen constanten Factor abweicht.*

Aber die damalige Überlegung ist auch bei beliebigem s durchführbar. Trägt man in (7) für T_s seinen Ausdruck in μ ein und ordnet nach Ausführung der Differentiation nach fallenden Potenzen von μ, so muss wieder der Coefficient jeder Potenz von μ einzeln verschwinden. Die Rechnung zeigt, dass dies zu der Recursionsformel führt:

$$c_k \cdot 2k(2n-2k+1) + c_{k-1} \cdot (n-s-2k+2)(n-s-2k+1) = 0,$$

welche die eindeutige Bestimmung aller Quotienten $\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}, \frac{c_3}{c_0}, \cdots$ gestattet. Auf diese Art haben wir gefunden, dass die allgemeinste zulässige Function T_s das Product einer beliebigen Constanten in die ganze rationale Function:

$$(8)\quad \mu^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-s-2} + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2\cdot 4\cdot (2n-1)(2n-3)}\mu^{n-s-4} - \cdots$$

ist, welche zufolge des Bildungsgesetzes ihrer Coefficienten von selber bei μ^1 resp. μ^0 abbricht.

Indem wir jetzt wieder $\cos\vartheta$ statt μ schreiben, den Factor $\sin^s\vartheta$ zufügen, sowie einen weiteren geeignet gewählten numerischen Factor zusetzen, schreiben wir:

$$(9)\quad P_n^{(s)}(\cos\vartheta) = \frac{(2n)!}{2^n(n+s)!\,(n-s)!}\cdot \sin^s\vartheta\left[\cos^{n-s}\vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-s-2}\vartheta + \cdots\right].$$

Für $s = 0$ hat man alsdann nach (5) pg. 35 direct $P_n^{(0)}(\cos\vartheta) = P_n(\cos\vartheta)$. Es reihen sich aber weitere n Functionen $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, \cdots, P_n^{(n)}$ an, welche wir als die der Ordnung n *„zugeordneten Functionen"* bezeichnen*).

Von $P_n^{(s)}$ weichen nun die beiden Functionen Φ_s und Ψ_s nur um unbestimmt bleibende constante Factoren ab. Damit aber haben wir das fundamentale Ergebnis gewonnen: *Die allgemeinste Kugelfunction n^{ter} Ordnung gestattet vermöge der zugeordneten Functionen die Darstellung:*

---

*) Cf. das pg. 26 genannte Handbuch Heine's Bd. 1 pg. 200.

$$(10)\quad X_n(\vartheta,\varphi) = A_0 P_n(\cos\vartheta) + (A_1\cos\varphi + B_1\sin\varphi) P_n^{(1)}(\cos\vartheta) + (A_2\cos 2\varphi + B_2\sin 2\varphi) P_n^{(2)}(\cos\vartheta) + \cdots \cdots + (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) P_n^{(n)}(\cos\vartheta);$$

hierbei sind die $A_0, A_1, \cdots, B_n$ *willkürlich wählbare Constante.* Die am Anfang des Paragraphen aufgeworfene Frage beantwortet sich also dahin, *dass der Ausdruck der allgemeinsten Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung* $(2n+1)$ *willkürliche Constante linear und homogen enthält, oder dass sich jede Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung aus* $(2n+1)$ *particulären und von einander linear-unabhängigen Functionen ihrer Ordnung linear und homogen mit constanten Coefficienten aufbaut.*

§ 10. **Verschiedene Darstellungen der zugeordneten Functionen $P_n^{(s)}$.**

Bildet man die unter (8) pg. 44 angesetzte Function für irgend ein $s < n$ und differenziert nach μ, so entspringt die mit $(n-s)$ multiplicierte Function der nächst folgenden Zahl $(s+1)$. Geht man auf Grund der Formel (9) pg. 44 zu den zugeordneten Functionen über, so kleidet sich diese Regel nach Fortheben überflüssiger Factoren in die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{d}{d\mu}\left(\frac{P_n^{(s)}}{\sin^s\vartheta}\right) = (n+s+1)\frac{P_n^{(s+1)}}{\sin^{s+1}\vartheta},$$

welcher man auch die Gestalt geben kann:

$$s\operatorname{ctg}\vartheta\, P_n^{(s)} - \frac{dP_n^{(s)}}{d\vartheta} = (n+s+1)P_n^{(s+1)}.$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel (1) findet man als *Darstellung der zugeordneten Function* $P_n^{(s)}(\cos\vartheta)$ *durch die Legendre'sche Kugelfunction* P_n:

$$(2)\qquad P_n^{(s)}(\cos\vartheta) = \frac{n!\sin^s\vartheta}{(n+s)!}\frac{d^sP_n(\mu)}{d\mu^s}.$$

Setzt man den Differentialausdruck (1) pg. 35 für $P_n(\mu)$ hier ein, so entspringt als ein weiterer *Differentialausdruck der zugeordneten Function* $P_n^{(s)}(\cos\vartheta)$:

$$(3)\qquad P_n^{(s)}(\cos\vartheta) = \frac{\sin^s\vartheta}{2^n(n+s)!}\frac{d^{n+s}\left[(\mu^2-1)^n\right]}{d\mu^{n+s}}. -$$

Weit wichtiger (wegen der späteren Anwendung auf die Cylinderfunctionen) ist eine „Integraldarstellung“ von $P_n^{(s)}$, welche die Formel (3) pg. 38 als Specialfall einschliesst.

Man knüpfe an den Umstand, dass jedenfalls $V = (x+iy)^n$ und damit sowohl der reelle wie der vom Factor i befreite imaginäre Be-

standteil dieses Ausdrucks der Laplace'schen Differentialgleichung (3) pg. 25 genügt. Es wird demnach:

$$(\xi + i\eta)^n = \left(\mu + \cos\varphi \sqrt{\mu^2 - 1}\right)^n$$

als Kugelfunction n^{ter} Ordnung in dem Sinne bezeichnet werden dürfen, dass sowohl der reelle als der von i befreite imaginäre Bestandteil eine solche Function darstellt (cf. pg. 40).

Drücken wir nun diese Kugelfunction mit Hilfe complexer Coefficienten $A_0, A_1, \cdots, B_n$ in der Gestalt (10) pg. 45 aus, so werden alle B verschwinden, da es sich in $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^n$ in jedem Falle um eine „gerade" Function von φ handelt. Man hat also den Ansatz:

$$\left(\mu + \cos\varphi\sqrt{\mu^2-1}\right)^n = A_0 P_n(\mu) + A_1 P_n^{(1)}(\mu)\cos\varphi + \cdots + A_n P_n^{(n)}(\mu)\cos n\varphi.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten A_s verfahren wir nach (4) pg. 12, d. h. wir multiplicieren diese Gleichung mit $\cos s\varphi\, d\varphi$ und integrieren zwischen den Grenzen 0 und π; es folgt:

$$(4) \qquad A_s P_n^{(s)}(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\mu + \cos\varphi\sqrt{\mu^2-1}\right)^n \cos s\varphi\, d\varphi.$$

Diese in μ identische Gleichung bilde man für einen sehr grossen Wert μ, wobei das höchste Glied linker Hand nach (9) pg. 44 zu berechnen ist; es ergiebt sich nach Division durch μ^n:

$$(5) \qquad A_s \cdot \frac{(2n)!\, i^s}{2^n (n+s)!\,(n-s)!} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^n \cos s\varphi\, d\varphi.$$

Man hat aber:

$$(1+\cos\varphi)^n = 2^n \cos^{2n}\frac{\varphi}{2} = 2^n \left(\frac{e^{\frac{\varphi i}{2}} + e^{-\frac{\varphi i}{2}}}{2}\right)^{2n},$$

$$(1+\cos\varphi)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\varphi + \binom{2n}{1}\cos(n-1)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right].$$

Trägt man aber den so berechneten Ausdruck in (5) rechter Hand ein, so kommt vermöge einer bereits pg. 4 (oben) durchgeführten Rechnung für $s > 0$:

$$A_s \cdot \frac{(2n)!\, i^s}{2^n (n+s)!\,(n-s)!} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2^{n-1}}\binom{2n}{n-s}\int_0^\pi \cos^2 s\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{2n}{n-s}.$$

Diese Formel vereinfacht man leicht zu $A_s \cdot i^s = 2$. Gleichung (4) liefert daraufhin den Satz: *Die zugeordnete Function* $P_n^{(s)}(\cos\vartheta)$ *oder* $P_n^{(s)}(\mu)$ *gestattet die Integraldarstellung:*

$$P_n^{(s)}(\mu) = \frac{i^s}{\pi}\int_0^\pi \left(\mu + \cos\varphi\sqrt{\mu^2 - 1}\right)^n \cos s\varphi\, d\varphi.$$

Für $s = 0$ ordnet sich die Formel (3) pg. 38 ein.

§ 11. Integralsätze der Kugelfunctionen.

Nach einer pg. 41 erwähnten Auffassung können wir eine beliebige Kugelfunction $X_n(\vartheta, \varphi)$ als eine Function des Ortes auf der Oberfläche der Kugel des Radius 1 um den Pol O ansehen. Sei $X_m(\vartheta, \varphi)$ irgend eine zweite Kugelfunction, so bilde man das Product von $X_n \cdot X_m$ und dem an der Stelle ϑ, φ der Kugeloberfläche gelegenen Flächenelement $d\sigma$, welches sich nach (4) pg. 28 explicite in der Gestalt $d\sigma = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ darstellen lässt. Integriert man $X_n(\vartheta, \varphi)\, X_m(\vartheta, \varphi)\, d\sigma$ über die ganze Kugeloberfläche, so entspringt das fundamentale Ergebnis, *dass der Wert dieses Integrales, so oft $m \neq n$ ist, stets gleich null ist:*

(1) $$\int X_n\, X_m\, d\sigma = 0, \qquad (m \neq n),$$

eine Formel, die man ausführlicher so zu schreiben hat:

(2) $$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} X_n(\vartheta, \varphi) \cdot X_m(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 0.$$

Hierbei bezieht sich das erste Integral auf ϑ, das zweite auf φ.

Diesen „*ersten Integralsatz*" der Kugelfunctionen beweist Laplace*) so: Zufolge der Differentialgleichung für $X_n(\vartheta, \varphi)$ ist:

$$n(n+1)\sin\vartheta\, X_n = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit $X_m\, d\vartheta\, d\varphi$ und integriert über die Kugelfläche, so folgt:

(3) $$n(n+1)\int_0^\pi\int_0^{2\pi} X_n\, X_m \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= -\int_0^\pi\int_0^{2\pi} X_m \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right) d\vartheta\, d\varphi - \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}\, X_m\, d\vartheta\, d\varphi\text{**)}.$$

---

*) Siehe die pg. 25 gegebenen Litteraturnachweise.

**) Im letzten Integral wird zwar der erste Factor $\frac{1}{\sin\vartheta}$ für $\vartheta = 0$ unendlich; indessen enthält $\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}$ zufolge (10) pg. 45 bei dem Bildungsgesetz der zugeordneten Functionen $P_n^{(s)}$ den Factor $\sin\vartheta$.

Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$\int X_m \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{d X_n}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta = X_m \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} \sin\vartheta - \int \frac{\partial X_m}{\partial \vartheta} \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta,$$

$$(4) \qquad \int_0^\pi X_m \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta = -\int_0^\pi \frac{\partial X_m}{\partial \vartheta} \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Weiter folgt gleichfalls durch partielle Integration:

$$\int X_m \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} d\varphi = X_m \frac{\partial X_n}{\partial \varphi} - \int \frac{\partial X_m}{\partial \varphi} \frac{\partial X_n}{\partial \varphi} d\varphi,$$

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} X_m \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} d\varphi = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial X_m}{\partial \varphi} \frac{\partial X_n}{\partial \varphi} d\varphi;$$

denn man bemerke, dass sich die Integration nach φ bei stehendem ϑ auf einen vollen Parallelkreis erstreckt, wobei $X_m \frac{\partial X_n}{\partial \varphi}$ an der unteren und oberen Integralgrenze gleich ausfällt. Unter Benutzung der Formeln (4) und (5) nimmt die Gleichung (3) die nachfolgende Gestalt an:

$$(6) \qquad \begin{aligned} & n(n+1) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_n X_m \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ & = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\sin\vartheta \frac{\partial X_m}{\partial \vartheta} \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial X_m}{\partial \varphi} \frac{\partial X_n}{\partial \varphi}\right) d\vartheta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Die Durchführung der analogen Betrachtung im Anschluss an die für X_m gültige Differentialgleichung führt entsprechend auf:

$$\begin{aligned} & m(m+1) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_n X_m \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ & = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\sin\vartheta \frac{\partial X_m}{\partial \vartheta} \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial X_m}{\partial \varphi} \frac{\partial X_n}{\partial \varphi}\right) d\vartheta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung mit derjenigen in (6) genau übereinstimmt, so sind auch die linken Seiten gleich, was für $m \neq n$ die Formel (2) und also den „ersten Integralsatz" zur Folge hat.

In Falle $m = n$ setzen wir die eine der beiden Kugelfunctionen speciell gleich $P_n(\cos\omega)$. Hierbei soll für $\cos\omega$ die Formel (2) pg. 39 gelten, d. h. es soll ω der Richtungsunterschied des vom Pole O nach dem variabelen Punkte ϑ, φ ziehenden Strahles gegen den Strahl nach einem festen Punkte ϑ', φ' sein. Man zeigt durch direkte Rechnung,

dass $P_n(\cos\omega)$ in Abhängigkeit von ϑ, φ eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist. Als *„zweiten Integralsatz"* formulieren wir jetzt, *dass das über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnte Integral des Differentials $X_n(\vartheta, \varphi)\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma$ gleich dem im Punkte ϑ', φ' vorliegenden Werte $X_n(\vartheta', \varphi')$ der Function X_n multipliciert mit $\frac{4\pi}{2n+1}$ ist:*

$$(7)\qquad \int X_n(\vartheta, \varphi)\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta', \varphi'),$$

oder ausführlicher:

$$(8)\qquad \int_0^\pi\!\!\int_0^{2\pi} X_n(\vartheta, \varphi)\, P_n(\cos\omega)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta', \varphi').$$

Zum Beweise führen wir zunächst eine Drehung des Coordinatensystems um den Pol O aus, wobei an Stelle von ϑ, φ die Coordinaten η, ψ treten mögen; und zwar soll die Drehung eine solche sein, dass der festgewählte Punkt ϑ', φ' im neuen System den Nordpol unserer Kugelfläche darstellt. Man hat zu setzen:

$$(9)\quad X_n(\vartheta, \varphi) = Y_n(\eta, \psi), \quad P_n(\cos\omega) = P_n(\cos\eta), \quad d\sigma = \sin\eta\, d\eta\, d\psi.$$

Hier gilt es alsdann, zunächst einzusehen, dass $Y_n(\eta, \psi)$ eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung von η und ψ ist. In der That erkennt man die Fundamentaleigenschaften 1) und 2) (pg. 40) der Kugelfunctionen bei der Gestalt der Transformationsformeln der Coordinaten an $Y_n(\eta, \psi)$ sofort. Dass aber auch die Differentialgleichung der Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung für $Y_n(\eta, \psi)$ besteht, leiten wir am leichtesten unter Rückgang auf rechtwinklige Coordinaten auf Grund der Überlegungen von pg. 40 aus dem Umstande her, dass die Laplace'sche Differentialgleichung (3) pg. 25 unverändert ihre Gestalt behält, wenn man das Coordinatensystem um den Nullpunkt O dreht*).

---

*) Eine solche Drehung ist nämlich dargestellt durch:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z',$$

wo für die neun Coefficienten die sechs bekannten Gleichungen bestehen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

Hieraus ergeben sich nach leichter Zwischenrechnung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \beta_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \gamma_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\beta_1\gamma_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + 2\gamma_1\alpha_1 \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} + 2\alpha_1\beta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$$

und zwei entsprechende Gleichungen für $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$. Die Addition dieser drei

Das Integral auf der linken Seite von (7) kleidet sich vermöge der Formeln (9) in die Gestalt:

$$(10)\qquad \int_0^{\pi} [P_n(\cos\eta)\sin\eta\, d\eta \int_0^{2\pi} Y_n(\eta,\psi)\, d\psi].$$

Y_n kann man nach der Formel (10) pg. 45 so darstellen:

$$Y_n(\eta,\psi) = A_0 P_n(\cos\eta) + \sum_{s=1}^{n} (A_s \cos s\psi + B_s \sin s\psi)\, P_n^{(s)}(\cos\eta),$$

so dass wir für das innere Integral unter (10) gewinnen:

$$\int_0^{2\pi} Y_n\, d\psi = 2\pi A_0 P_n(\cos\eta) + \sum_{s=1}^{n} P_n^{(s)}(\cos\eta) \int_0^{2\pi} (A_s \cos s\psi + B_s \sin s\psi)\, d\psi.$$

Hier verschwindet nun jedes der rechts unter dem Summenzeichen stehenden Integrale einzeln, so dass wir gewinnen:

$$\int_0^{2\pi} Y_n(\eta,\psi)\, d\psi = 2\pi A_0 P_n(\cos\eta).$$

Specialisiert man aber die eben für Y_n angegebene Formel für den Nordpol $\eta = 0$, so werden an dieser Stelle alle zugeordneten Functionen wegen ihrer Factoren $\sin^s \eta$ verschwinden, während P_n nach pg. 33 den Wert 1 annimmt. Es ist somit A_0 der Wert von Y_n im Nordpol $\eta = 0$ und also zufolge der ersten Gleichung (9) der Wert $X_n(\vartheta', \varphi')$. Der Rückgang zum Integral (10) liefert daraufhin:

$$(11)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\eta,\psi)\, P_n(\cos\eta)\sin\eta\, d\eta\, d\psi$$

$$= 2\pi X_n(\vartheta', \varphi') \int_0^{\pi} [P_n(\cos\eta)]^2 \sin\eta\, d\eta.$$

In dem rechts noch übrig bleibenden Integral setze man $\cos\eta = \mu$, wodurch man erhält:

$$\int_0^{\pi} [P_n(\cos\eta)]^2 \sin\eta\, d\eta = \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)^2\, d\mu.$$

Gleichungen liefert bei Benutzung der für $\alpha_1, \cdots, \gamma_3$ angegebenen Relationen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

was bewiesen werden sollte.

Nun ist aber nach (1) pg. 35:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)^2 \, d\mu = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \cdot \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \, d\mu,$$

wo das Integral rechter Hand durch partielle Integration reducibel ist. Man hat nämlich:

$$\int \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \cdot \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \, d\mu = \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \cdot \frac{d^{n-1}[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^{n-1}} - \int \frac{d^{n+1}[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1}[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^{n-1}} \, d\mu.$$

Nun verschwindet $(\mu^2 - 1)^n$ für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ je n-fach, also die $(n-1)^{\text{ste}}$ Ableitung je einfach; es folgt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \cdot \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n} \, d\mu = -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n+1}[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1}[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^{n-1}} \, d\mu.$$

Durch weitere $(n-1)$-malige Anwendung der partiellen Integration werden wir zu

$$(-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2n}[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^{2n}} \cdot (\mu^2-1)^n \, d\mu = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{+1} (\mu^2-1)^n \, d\mu$$

geführt. Bei Wiedereinführung von η findet man:

$$\int_0^\pi [P_n(\cos\eta)]^2 \sin\eta \, d\eta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^\pi \sin^{2n+1}\eta \, d\eta.$$

Das letzte Integral behandelt man gleichfalls durch partielle Integration und findet als dessen Wert $2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$. Setzt man diesen Wert in die voraufgehende Formel ein, so zieht sich deren rechte Seite auf $\frac{2}{2n+1}$ zusammen. Hiermit aber gewinnt die rechte Seite der Formel (11) die Gestalt $\frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta', \varphi')$, so dass der „zweite Integralsatz" der Kugelfunctionen bewiesen ist.

Aufgabe 1. Man beweise die Formel $\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu) \, d\mu = 0$ für $m \gtrless n$ durch die am Schlusse des vorliegenden Paragraphen verwendete Methode der partiellen Integration.

Aufgabe 2. Man beweise die Formel $\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)^2 \, d\mu = \frac{2}{2n+1}$, indem man

einmal T^2 nach (6) pg. 32 in eine Reihe nach Potenzen von r entwickelt und bei der Integration auf die in Aufgabe 1 bewiesene Regel Bezug nimmt, während man andrerseits $\int_{-1}^{+1} T^2 d\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1 - 2\mu r + r^2}$ direct ausführt und darauf nach Potenzen von r entwickelt.

§ 12. Entwicklung einer Function $f(\vartheta, \varphi)$ nach Kugelfunctionen.

Die Sätze über die Werte der Integrale $\int X_m X_n \, d\sigma$, ausgedehnt über die ganze Kugelfläche, sind analog den pg. 4 benutzten Formeln über $\int \cos mx \cos nx \, dx$ und ähnliche Integrale, ausgedehnt über die ganze Peripherie des Kreises, d. i. von $-\pi$ bis $+\pi$. Waren nun damals die eben genannten Formeln bei Entwicklung einer willkürlich gegebenen Function $f(x)$ in eine Reihe nach „Kreisfunctionen" $\cos nx$, $\sin nx$ dienlich, so werden wir hier bei dem jetzt zu behandelnden Probleme, *eine auf der Kugeloberfläche willkürlich gewählte Function $f(\vartheta, \varphi)$ in eine Reihe nach Kugelfunctionen $X_n(\vartheta, \varphi)$ zu entwickeln*, einen entsprechenden Gebrauch von den Integraltheoremen des vorigen Paragraphen machen.

Dabei nehmen wir sogleich an, dass die in jedem Punkte (ϑ, φ) der Kugeloberfläche *endlich* und *eindeutig* definierte Function $f(\vartheta, \varphi)$ in eine convergente Reihe:

(1) $$f(\vartheta, \varphi) = X_0(\vartheta, \varphi) + X_1(\vartheta, \varphi) + X_2(\vartheta, \varphi) + \cdots$$

nach Kugelfunctionen ansteigender Ordnungen entwickelbar sei, und dass die sogleich gliedweise auszuführende Integration der rechten Seite dieser Gleichung gestattet sei.

Um alsdann die Bedeutung der hier zur Verwendung kommenden Kugelfunctionen zu erkennen, verstehe man unter (ϑ, φ) einen festbleibenden, unter (ϑ', φ') einen variabelen Punkt der Kugeloberfläche und gebrauche $\cos \omega$ im bisherigen Sinne (2) pg. 39. Man multipliciere $f(\vartheta', \varphi')$ mit $P_n(\cos \omega)\, d\sigma'$, unter n irgend eine nicht-negative ganze Zahl verstanden, und integriere über die ganze Kugelfläche. Man findet aus (1) unter der soeben genannten Voraussetzung:

$$\int f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos \omega)\, d\sigma' = \sum_{m=0}^{\infty} \int X_m(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos \omega)\, d\sigma'.$$

Hier verschwinden rechts sämtliche Glieder der Reihe bis auf dasjenige für $m = n$, dessen Wert sich aus (7) pg. 49 ergiebt. Man hat als Resultat: *Existiert für die auf der Kugeloberfläche willkürlich gewählte endliche und eindeutige Function $f(\vartheta, \varphi)$ eine convergente und*

gliedweise integrierbare Entwicklung (1) *nach Kugelfunctionen, so ist jede der letzteren eindeutig bestimmt und gegeben durch:*

$$(2) \qquad X_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\omega) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'.$$

Die Argumente $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ von X_n sind rechter Hand rational und ganz in $P_n(\cos\omega)$ enthalten.

Die genaue Untersuchung der Gültigkeit der in Rede stehenden Entwicklung für $f(\vartheta, \varphi)$, welche in den Rahmen der hier beabsichtigten Darstellung nicht hineinpasst*), verfolgt einen ähnlichen Gedankengang, wie die pg. 5 ff. entwickelte Convergenzuntersuchung der Fourier'schen Reihen. Man kürzt die Reihe (1) auf die $(n+1)$ ersten Glieder, welche man durch (2) definiert. Man berechnet sodann den Summenwert und sucht die Grenze des letzteren für $n = \infty$ zu bestimmen.

Dieser Grenzwert aber lässt sich folgendermassen beschreiben. Um die zu untersuchende Stelle (ϑ, φ) beschreibe man mit einem kleinen Bogen ω als Radius auf der Kugeloberfläche einen Kreis. Auf der Peripherie des letzteren habe $f(\vartheta, \varphi)$ einen *Mittelwert*, der $F(\omega)$ heisse. *Hat dann $F(\omega)$ in nächster Nähe von $\omega = 0$ nicht unendlich viele Maxima und Minima, so ist* $\lim_{\omega=0} F(\omega)$ *der Summenwert* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi)$ *der unendlichen Reihe, d. i. der oben genannte Grenzwert.*

§ 13. Entwicklung beliebiger Functionen $\varphi(x)$ in Reihen nach Kugelfunctionen $P_n(x)$.

Man specialisiere die Sätze von § 12 für den Fall einer von φ unabhängigen Function $f(\vartheta)$. Der eben am Schlusse von § 12 mit $\lim_{\omega=0} F(\omega)$ bezeichnete Grenzwert wird hier, wenn anders er existiert, offenbar in die vom vorigen Kapitel her bekannte Gestalt:

$$\tfrac{1}{2}\left[f(\vartheta+0) + f(\vartheta-0)\right]$$

---

*) Auch in der Frage der Convergenz der Reihen nach Kugelfunctionen ist Dirichlet bahnbrechend gewesen (in der Abhandlung *„Sur les séries, dont le terme général dépend de deux angles etc.“*, Journ. f. Math. Bd. 17, 1837). Doch enthielt Dirichlet's Beweisführung eine Lücke, welche von Kronecker und Dini bemerkt wurde. Letzterer entwickelte eine einwurfsfreie Convergenzbetrachtung in der Abhandlung *„Sopra le serie di funzioni sferiche“* Annali di Matematica, 2te Ser., Bd. 6 (1874). Vergl. übrigens die Darstellung in dem pg. 26 genannten Handbuche von Heine, Bd. 1, pg. 432 ff.

gesetzt werden können. Es gilt also der Ansatz:

$$(1)\qquad \frac{1}{2}\Big[f(\vartheta+0)+f(\vartheta-0)\Big]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{2\pi}P_n(\cos\omega)\,d\varphi'\Big).$$

Als Kugelfunction von ϑ', φ' gestattet $P_n(\cos\omega)$ nach (10) pg. 45 die Darstellung:

$$P_n(\cos\omega) = A_0 P_n(\cos\vartheta') + (A_1\cos\varphi' + B_1\sin\varphi')\,P_n^{(1)}(\cos\vartheta') + \cdots$$
$$\cdots + (A_n\cos n\varphi' + B_n\sin n\varphi')\,P_n^{(n)}(\cos\vartheta'),$$

wo die Coefficienten A, B von ϑ und φ allein abhängen. Für $\vartheta'=0$ wird $\omega=\vartheta$, so dass man für diesen Fall wegen $P_n(1)=1$ und Formel (9) pg. 44 aus der letzten Gleichung $P_n(\cos\vartheta)=A_0$ abliest.

Integriert man hiernach $P_n(\cos\omega)\,d\varphi'$ für φ' zwischen den Grenzen 0 und 2π, so ergiebt sich, da alle von φ' abhängenden Glieder im Ausdruck von $P_n(\cos\omega)$, also sämtliche Glieder bis auf das erste zufolge ihrer Bauart verschwindende Beträge liefern:

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos\omega)\,d\varphi' = 2\pi\,P_n(\cos\vartheta)\,P_n(\cos\vartheta').$$

Die Gleichung (1) führt hiernach auf die wichtige Formel:

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\Big[f(\vartheta+0)+f(\vartheta-0)\Big]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\vartheta)\int_0^{\pi}f(\vartheta')\,P_n(\cos\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta'.$$

Man setze hier endlich noch $\cos\vartheta'=\mu$, $\cos\vartheta=x$ und schreibe $f(\vartheta')=f(\operatorname{arc}\cos\mu)=\varphi(\mu)$ und $f(\vartheta)=\varphi(x)$. Es gilt alsdann das folgende Theorem: *Die im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$ willkürlich gewählte eindeutige Function $\varphi(x)$, welche ebenda nicht unendlich viele Maxima und Minima annimmt und Unstetigkeitsstellen jedenfalls auch höchstens in endlicher Anzahl besitzen soll, gestattet in diesem Intervall die convergente Entwicklung:*

$$(3)\qquad \varphi(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)+\cdots,$$

$$(4)\qquad c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu,$$

jedoch mit dem Zusatze, dass für alle Unstetigkeitsstellen x von $\varphi(x)$

der Summenwert der Reihe das durch $\frac{1}{2}\left[\varphi(x+0)+\varphi(x-0\right]$ *zu bezeichnende Mittel der zugehörigen beiderseitigen Grenzwerte ist.*

Beispiel 1. Durch directe Rechnung findet man aus (6) pg. 35:

$$x = P_1(x)$$
$$x^2 = \frac{2}{3} P_1(x) + \frac{1}{3} P_0(x),$$
$$x^3 = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{3}{5} P_1(x),$$
$$x^4 = \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{4}{7} P_2(x) + \frac{1}{5} P_0(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Um das in diesen Formeln enthaltene allgemeine Gesetz zu erkennen, setze man an:

$$x^m = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots,$$
$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \mu^m P_n(\mu)\, d\mu = \frac{2n+1}{2^{n+1}\cdot n!}\int_{-1}^{+1} \mu^m \frac{d^n\left[(\mu^2-1)^n\right]}{d\mu^n}\, d\mu\,.$$

Man findet nun vermöge einer schon pg. 51 benutzten Überlegung durch k-malige partielle Integration:

$$\int_{-1}^{+1} \mu^m \frac{d^n\left[(\mu^2-1)^n\right]}{d\mu^n}\, d\mu \tag{5}$$
$$= (-1)^k\, m(m-1)\cdots(m-k+1)\int_{-1}^{+1} \mu^{m-k} \frac{d^{n-k}\left[(\mu^2-1)^n\right]}{d\mu^{n-k}}\, d\mu,$$

wobei k keine der beiden Zahlen m und n übertreffen soll. Ist nun $n > m$, so setze man $k = m$ und erkennt, dass das rechts in (5) stehende Integral verschwindet; die Coefficienten $c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$ sind also alle $= 0$. Ist $m \geqq n$, so setze man $k = n$ und hat das Integral auszuwerten:

$$\int_{-1}^{+1} \mu^{m-n}(\mu^2-1)^n\, d\mu\,.$$

Dasselbe verschwindet, falls $(m-n)$ ungerade ist, da in diesem Falle die zu integrierende Function $\mu^{m-n}(\mu^2-1)^n$ mit μ das Zeichen wechselt. Bei geradem $(m-n)$ findet man durch erneute n-malige partielle Integration:

$$\int_{-1}^{+1} \mu^{m-n}(\mu^2-1)^n\, d\mu = (-1)^n \frac{2^n\cdot n!}{(m-n+1)(m-n+3)\cdots(m+n-1)}\int_{-1}^{+1} \mu^{m+n}\, d\mu,$$

Nach Auswertung des letzten Integrals und Zusammenfassung entspringt für die Coefficienten c_m, c_{m-2}, c_{m-4}, $\cdots$ allgemein:

$$c_{m-2k} = (2m - 4k + 1) \cdot \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{(2k+1)(2k+3) \cdots (2m-2k+1)}.$$

Hiernach gilt als allgemeine Formel:

$$(6) \quad x^m = \frac{m!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} \Big[(2m+1) P_m(x) + (2m-3) \frac{2m+1}{2} P_{m-2}(x) + (2m-7) \frac{(2m+1)(2m-1)}{2 \cdot 4} P_{m-4}(x) + \cdots \Big].$$

Nimmt man noch hinzu, dass $x^0 = 1 = P_0(x)$ ist, so wird hiernach jede ganze rationale Function von x in eine endliche Reihe nach Kugelfunctionen $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$ entwickelt werden können.

Beispiel 2. Ist y absolut > 1, so gilt unser in den Formeln (3) und (4) zum Ausdruck kommender Ansatz offenbar für die Function $\varphi(x) = \frac{1}{y-x}$; wir gewinnen:

$$(7) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) Q_n(y),$$

wo zufolge (4) gilt:

$$Q_n(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu)}{y-\mu} d\mu.$$

Da y absolut > 1 ist, so entwickele man nach fallenden Potenzen von y und findet:

$$Q_n(y) = \frac{1}{2y} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{y^m} \int_{-1}^{+1} \mu^m P_n(\mu) \, d\mu.$$

Die hier rechts auftretenden Integrale sind in Beispiel 1 bestimmt. Sie sind von 0 verschieden nur für $m = n$, $n+2$, $n+4$, $\cdots$, und die elementare Zwischenrechnung ergiebt:

$$(8) \quad Q_n(y) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \Big[\frac{1}{y^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} \frac{1}{y^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{1}{y^{n+5}} + \cdots \Big].$$

Diese Functionen $Q_n(y)$ werden als *„Kugelfunctionen zweiter Art“* bezeichnet. $Q_n(y)$ genügt der Differentialgleichung:

$$(9) \qquad (1 - y^2) \frac{d^2 Q_n}{dy^2} - 2y \frac{dQ_n}{dy} + n(n+1) Q_n = 0,$$

welche in anderer Bezeichnung wieder die für P_n gültige Differentialgleichung (3) pg. 34 darstellt. Trägt man nämlich in die linke Seite

der Differentialgleichung (9) für Q_n die Reihe (8) ein und ordnet nach Ausführung der Differentiationen nach fallenden Potenzen von y, so verschwindet der Coefficient jeder Potenz von y einzeln*).

Aufgabe 1. Man beweise nach Formel (2):

$$\sin\vartheta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\vartheta) - 5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2(\cos\vartheta) - 9\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 P_4(\cos\vartheta) - \cdots\right].$$

Aufgabe 2. Aus der Darstellung von $\sin\vartheta$ entwickele man durch Differentiation und Benutzung von (2) pg. 37 die Formel:

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{\pi}{2}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)P_1(\cos\vartheta) + 7\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_3(\cos\vartheta) + 11\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 P_5(\cos\vartheta) + \cdots\right].$$

§ 14. Elektrostatische Anwendung der Kugelfunctionen.

Es sei eine für Elektricität leitende Kugel des Radius 1 gegeben und ausserhalb derselben ein irgendwie elektrisierter Isolator J. Der Kugel sei freie Elektricität in der Gesamtmenge M mitgeteilt. Es soll untersucht werden, welche Verteilung diese letztere Menge auf der Oberfläche der Kugel durch die vom Isolator J herrührende Influenz erfährt.

Nach den Grundgesetzen der Elektrostatik wird sich freie Elektricität ausser im Isolator J nur unmittelbar an der Oberfläche der Kugel finden. Indem wir ein Polarcoordinatensystem mit dem Pol im Kugelmittelpunkt einführen, sei an der Stelle (ϑ, φ) der Kugeloberfläche die Dichtigkeit der dortselbst lagernden Elektricität durch $f(\vartheta, \varphi)$ bezeichnet. Die Aufgabe ist alsdann, diese Function $f(\vartheta, \varphi)$ wirklich anzugeben.

Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir den Grundsatz, dass das Potential V aller vorliegenden freien Elektricitätsmengen im Innern der leitenden Kugel allenthalben einen und denselben Wert haben muss**). Dieses Potential V setzt sich aber additiv zusammen aus dem Potential V' des Isolators J und demjenigen V'' der Kugeloberfläche. Berechnen wir also zunächst diese beiden Potentiale V' und V''.

An der Stelle $(r', \vartheta', \varphi')$ von J sei δ' die Dichtigkeit der elektrischen Ladung. In einem dortselbst gelegenen Volumelement $d\tau'$ wird sich somit die Elektricitätsmenge $\delta' d\tau'$ finden. Ist also (r, ϑ, φ)

---

*) Siehe wegen der Kugelfunctionen zweiter Art $Q_n(y)$ das pg. 26 genannte Handbuch Heine's Bd. 1 pg. 125 ff.

**) Die physikalische Bedeutung dieses Grundsatzes kann man noch deutlicher dahin aussprechen, dass im Innern der Kugel die drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ allenthalben verschwinden müssen.

irgend ein Punkt im Innern der Kugel, so wird das Potential $V'(r, \vartheta, \varphi)$ für diesen Punkt gegeben sein durch:

$$V'(r, \vartheta, \varphi) = \int \frac{\delta' \, d\tau'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\omega + r'^2}},$$

wenn hierbei $\cos\omega$ im bisherigen Sinne von:

$$\cos\omega = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$$

gebraucht ist und sich die Integration auf den gesamten von J eingenommenen Raum erstreckt. Da $r < r'$ ist, so schreibe man V' so:

$$V'(r, \vartheta, \varphi) = \int \frac{\delta' \, d\tau'}{r'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r'} \cos\omega + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}}$$

und findet, indem man den Wurzelausdruck nach (6) pg. 32 entwickelt und gliedweise integriert:

$$V'(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[r^n \int \frac{\delta'}{r'^{n+1}} P_n(\cos\omega) \, d\tau' \right].$$

Das bei r^n als Factor auftretende Integral stellt in Abhängigkeit von von ϑ und φ als Summe von Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung selber eine Kugelfunction dieser Ordnung dar, welche $X_n(\vartheta, \varphi)$ heissen möge. Wir gewinnen damit:

(1) $$V'(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi).$$

Da der elektrische Zustand des Isolators J als bekannt gilt, so hat man die $X_n(\vartheta, \varphi)$ als gegebene Functionen anzusehen.

Die auf der Kugeloberfläche gesuchte Function $f(\vartheta, \varphi)$ denke man nach § 12 in eine Reihe nach Kugelfunctionen:

(2) $$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\vartheta, \varphi)$$

entwickelt. Die zu lösende Aufgabe kann dann dahin formuliert werden, dass man die Functionen $Y_m(\vartheta, \varphi)$ finden soll.

Das Potential V'' der Kugelbelegung für den innern Punkt (r, ϑ, φ) wird gegeben sein durch:

$$V''(r, \vartheta, \varphi) = \int \frac{f(\vartheta', \varphi') \, d\sigma'}{\sqrt{1 - 2r\cos\omega + r^2}},$$

wo das Integral über alle Stellen (ϑ', φ') der Kugeloberfläche auszudehnen ist. Durch analoge Rechnung wie oben finden wir:

$$V''(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[r^n \int f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega) \, d\sigma' \right].$$

Setzt man den Ausdruck (2) für $f(\vartheta', \varphi')$ ein, so folgt:

$$\int f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = \sum_{m=0}^{\infty} \int Y_m(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma'.$$

Zufolge des ersten Integralsatzes der Kugelfunctionen fallen aber hier rechter Hand alle Glieder der Summe als verschwindend aus bis auf das eine mit $m = n$. Dieses eine Glied bestimmt man sofort nach dem zweiten Integralsatze (7) pg. 49 und findet für V'':

$$V''(r, \vartheta, \varphi) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Das Gesamtpotential V ist nun $= V' + V''$ und gestattet somit für das Kugelinnere die Entwicklung:

(3) $$V(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi)\right].$$

Da dieser Ausdruck nach dem oben erwähnten Grundsatze constant und also von r unabhängig sein muss, so verschwinden die Coefficienten aller Potenzen $r, r^2, r^3, \cdots$ einzeln, d. h. für alle Indices $n \geqq 1$ gilt:

(4) $$Y_n(\vartheta, \varphi) = -\frac{2n+1}{4\pi} X_n(\vartheta, \varphi).$$

Wir haben jetzt allein noch das Anfangsglied $Y_0(\vartheta\, \varphi)$ der Reihenentwicklung (2) zu bestimmen. Zu diesem Ende bemerken wir, dass die eben schon zur Benutzung gekommene Gleichung:

$$\int f(\vartheta'\, \varphi')\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

doch auch für den Fall $n = 0$ gültig ist. Aber in diesem Falle kommt links $\int f(\vartheta', \varphi')\, d\sigma'$, wo $f(\vartheta', \varphi')\, d\sigma'$ die im Element $d\sigma'$ befindliche Elektricitätsmenge ist und die Integration sich auf die ganze Kugeloberfläche bezieht. Das Integral hat hiernach, da im Kugelinnern freie Elektricität nicht auftritt, den Wert M der der Kugel mitgeteilten freien Elektricitätsmenge, und man hat:

$$Y_0(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{4\pi}.$$

Die Antwort auf die vorgelegte Frage ist also dahin zu erstatten, *dass die gesuchte Dichtigkeit der Kugelbelegung an der einzelnen Stelle* ϑ, φ *gegeben ist durch:*

(5) $$f(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, X_n(\vartheta, \varphi). —$$

Als einfachsten Specialfall betrachte man den, dass J ein einzelner Punkt der Masse 1 in der Entfernung $\varrho > 1$ vom Kugelmittelpunkt ist. Legt man die Polaraxe durch diesen Punkt hindurch, so wird:

$$V'(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\, r \cos\vartheta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{P_n(\cos\vartheta)}{\varrho^{n+1}},$$

womit die Kugelfunctionen $X_n(\vartheta, \varphi)$ für diesen Fall bestimmt sind. Die Eintragung in Formel (5) liefert für das vorliegende Beispiel als Lösung:

$$(6) \qquad f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\left[M - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{P_n(\cos\vartheta)}{\varrho^{n+1}}\right].$$

Übrigens kann man die hier rechts stehende unendliche Reihe in einen endlichen Ausdruck zusammenziehen. Differenziert man nämlich die Formel:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\vartheta)$$

nach r und multipliciert hernach mit $2r$, so folgt:

$$\frac{2r\cos\vartheta - 2r^2}{(1 - 2r\cos\vartheta + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{=0}^{\infty} 2n\, r^n P_n(\cos\vartheta).$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen entspringt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\, r^n P_n(\cos\vartheta) = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\vartheta + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mit Hilfe dieser Formel giebt man der Gleichung (6) ohne Mühe die Gestalt:

$$(7) \qquad f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\left[M + \frac{1}{\varrho} - \frac{\varrho^2 - 1}{(\varrho^2 - 2\varrho\cos\vartheta + 1)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Wählt man z. B. $M = 0$, $\varrho = 2$, so sammelt sich am Nordpol negative Elektricität der Dichtigkeit $\frac{5}{8\pi}$, am Südpol positive von der Dichtigkeit $\frac{7}{72\pi}$.

§ 15. Definition, Potenzreihenentwicklung und Differentialgleichung der Cylinderfunctionen.

Die am Schlusse der Einleitung (pg. 26) erwähnten beim Potential des Cylinders auftretenden „*Cylinderfunctionen*“ lassen sich durch einen Grenzübergang aus den in § 9 und 10 untersuchten zugeordneten Functionen $P_n^{(s)}(\cos\vartheta)$ herstellen. Man setze nämlich in $P_n^{(s)}$ an Stelle von

ϑ den Wert $\frac{\vartheta}{n}$ ein. *Als Definition der Cylinderfunction* s^{ter} *Ordnung* $J_s(\vartheta)$ *soll alsdann gelten:*

(1) $$J_s(\vartheta) = (-1)^s \cdot \lim_{n=\infty} P_n^{(s)}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) \cdot$$

Aus der pg. 47 angegebenen Integralgestalt von $P_n^{(s)}$ folgt zunächst:

$$P_n^{(s)}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = \frac{i^s}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\cos\varphi\right)^n \cos s\varphi\, d\varphi.$$

Lässt man hier bei stehendem s die Zahl n weiter und weiter wachsen, so wird für den Grenzübergang $\lim. n = \infty$

$$\cos\frac{\vartheta}{n} = 1, \quad \sin\frac{\vartheta}{n} = \frac{\vartheta}{n}, \quad \lim_{n=\infty}\left[\left(1 + \frac{i\vartheta\cos\varphi}{n}\right)^n\right] = e^{i\vartheta\cos\varphi}$$

zu setzen sein*). Daraus geht der Satz hervor, *dass sich die Cylinderfunction* s^{ter} *Ordnung durch folgenden Integralausdruck darstellen lässt:*

(2) $$J_s(\vartheta) = \frac{(-i)^s}{\pi}\int_0^\pi e^{i\vartheta\cos\varphi}\cos s\varphi\, d\varphi.$$

Setzt man für die Exponentialfunction unter dem Integral (2) die Potenzreihenentwicklung derselben ein und integriert gliedweise, so folgt:

---

*) Die Regel $\lim_{n=\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right] = e^x$ wird in den einführenden Vorlesungen meist nur erst für reelles x bewiesen. Setzt man aber $\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = r_n e^{\alpha_n i}$, unter r_n den absoluten Betrag des links stehenden Ausdrucks und unter α_n dessen Amplitude verstanden, so folgt erstlich:

$$r_n^2 = \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}};$$

und da der Ausdruck in der grossen Klammer rechts mit wachsendem n der Grenze e^{x^2} zustrebt, so wird:

$$\lim_{n=\infty} r_n^2 = \lim_{n=\infty} e^{\frac{x^2}{n}} = 1.$$

Die Amplitude α_n aber berechnet sich aus:

$$\alpha_n = n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5x^5} - \cdots\right),$$

woraus man $\lim. \alpha_n = x$ direct abliest. Damit ist die Gültigkeit der fraglichen Grenzformel für rein imaginäres Argument bewiesen.

$$J_s(\vartheta) = \frac{(-i)^s}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \vartheta^m}{m!} \int_0^\pi \cos^m \varphi \cos s\varphi \, d\varphi.$$

Nun wurde bereits pg. 34 die Formel:

$$\cos^m \varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos m\varphi + \binom{m}{1} \cos (m-2)\varphi + \binom{m}{2} \cos (m-4)\varphi + \cdots \right]$$

benutzt, wobei das letzte Glied der Klammer $\frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}}$ oder $\binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos \varphi$ ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Mit Rücksicht auf die Integralformeln von pg. 4 ergiebt sich hieraus, dass das Integral:

$$\int_0^\pi \cos^m \varphi \cos s\varphi \, d\varphi$$

stets verschwindet, wenn $m < s$ ist, sowie wenn $(m - s)$ ungerade ist. Hat man aber $m = s + 2k$, wo k eine nicht-negative ganze Zahl ist, so ist $\frac{\pi}{2^m}\binom{m}{k}$ der Wert jenes Integrals. Unter Benutzung dieses Ergebnisses findet man nach kurzer Rechnung als *Potenzreihenentwicklung der Cylinderfunction* $J_s(\vartheta)$:

(3) $$J_s(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{s+2k}}{2^{s+2k} k! (s+k)!},$$

gültig für alle Ordnungen $s = 0, 1, 2, \cdots$, *oder explicite:*

(4) $$J_s(\vartheta) = \frac{\vartheta^s}{2^s s!} \left[1 - \frac{\vartheta^2}{2(2s+2)} + \frac{\vartheta^4}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)(2s+4)} - \cdots \right].$$

Speciell für $s = 0$ *hat man:*

$$J_0(\vartheta) = 1 - \frac{\vartheta^2}{2^2} + \frac{\vartheta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\vartheta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

Die zugeordnete Function $P_n^{(s)}(\cos \vartheta) = \Phi_s$ genügte der unter (5) pg. 43 angegebenen Differentialgleichung. Trägt man in dieselbe $\frac{\vartheta}{n}$ statt ϑ ein und teilt durch n^2, so folgt:

$$\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{s^2}{n^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{n}}\right) P_n^{(s)}\left(\cos \frac{\vartheta}{n}\right)$$
$$+ \frac{1}{n \sin \frac{\vartheta}{n}} \frac{d}{d\vartheta} \left(n \sin \frac{\vartheta}{n} \frac{d P_n^{(s)}\left(\cos \frac{\vartheta}{n}\right)}{d\vartheta} \right) = 0.$$

Setzen wir noch den Factor $(-1)^s$ hinzu und lassen n über alle Grenzen wachsen, so folgt:

$$\left(1-\frac{s^2}{\vartheta^2}\right)J_s(\vartheta)+\frac{1}{\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\vartheta\frac{dJ_s(\vartheta)}{d\vartheta}\right)=0.$$

Hieraus geht der Satz hervor: *Die Cylinderfunction* $J_s(\vartheta)$ *ist ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung:*

(5) $$\frac{d^2J_s}{d\vartheta^2}+\frac{1}{\vartheta}\frac{dJ_s}{d\vartheta}+\left(1-\frac{s^2}{\vartheta^2}\right)J_s=0.$$

Das Bestehen dieser Gleichung kann man durch Eintragen der Potenzreihe (4) für J_s direct bestätigen.

§ 16. Verschiedene Integralausdrücke der Cylinderfunctionen.

Ersetzt man auf der rechten Seite von (2) p. 61 die unter dem Integral auftretende Exponentialfunction durch ihren Ausdruck $\cos(\vartheta\cos\varphi)+i\sin(\vartheta\cos\varphi)$, so zerlegt sich die ganze rechte Seite der genannten Gleichung in einen reellen und einen imaginären Bestandteil. Ersterer giebt den Wert von $J_s(\vartheta)$, während letzterer verschwindet. Man muss hierbei unterscheiden, ob die Ordnung s eine gerade oder ungerade Zahl ist. *Die Cylinderfunctionen gerader Ordnung* $J_{2s}(\vartheta)$ *gestatten die Integraldarstellung:*

(1) $$J_{2s}(\vartheta)=\frac{(-1)^s}{\pi}\int_0^\pi\cos(\vartheta\cos\varphi)\cos 2s\varphi\,d\varphi,$$

diejenigen ungerader Ordnungen $J_{2s+1}(\vartheta)$:

(2) $$J_{2s+1}(\vartheta)=\frac{(-1)^s}{\pi}\int_0^\pi\sin(\vartheta\cos\varphi)\cos(2s+1)\varphi\,d\varphi.$$

Zugleich merke man die beiden Gleichungen an:

(3) $$\int_0^\pi\sin(\vartheta\cos\varphi)\cos 2s\varphi\,d\varphi=0,$$
$$\int_0^\pi\cos(\vartheta\cos\varphi)\cos(2s+1)\varphi\,d\varphi=0.$$

Die hier auftretenden bestimmten Integrale sind nun im wesentlichen gerade diejenigen, welche nach den im vorigen Kapitel pg. 12 entwickelten Ansätzen als Coefficienten der nach Cosinus der Vielfachen von φ fortschreitenden Reihen für $\cos(\vartheta\cos\varphi)$ und $\sin(\vartheta\cos\varphi)$ auftreten. Der Vergleich der vorstehenden Formeln (1), (2) und (3) mit den damaligen liefert den Satz: *Die Cylinderfunctionen gerader Ordnung*

treten als Coefficienten der Fourier'schen Entwicklung von $\cos(\vartheta \cos\varphi)$ *auf, indem man hat:*

$$(4)\qquad \cos(\vartheta\cos\varphi) = J_0(\vartheta) - 2J_2(\vartheta)\cos 2\varphi + 2J_4(\vartheta)\cos 4\varphi - 2J_6(\vartheta)\cos 6\varphi + \cdots;$$

entsprechend stellen sich die Functionen ungerader Ordnung bei der Entwicklung ein:

$$(5)\qquad \sin(\vartheta\cos\varphi) = 2J_1(\vartheta)\cos\varphi - 2J_3(\vartheta)\cos 3\varphi + 2J_5(\vartheta)\cos 5\varphi - \cdots.$$

Man kann diese Entwicklungen zum Beweise einer wichtigen Recursionsformel der Functionen J benutzen: *Die Cylinderfunctionen irgend dreier auf einander folgender Ordnungen sind nämlich durch die Gleichung verbunden:*

$$(6)\qquad 2sJ_s(\vartheta) = \vartheta\, J_{s-1}(\vartheta) + \vartheta\, J_{s+1}(\vartheta).$$

Auf Grund dieser Relation kann man aus den Werten von J_0 und J_1 successive diejenigen aller weiteren Functionen J berechnen.

Zum Beweise der Gleichung (6) differenziere man die Formel (4) nach φ:

$$(7)\qquad \sin(\vartheta\cos\varphi)\cdot\vartheta\sin\varphi = 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\,2sJ_{2s}\sin 2s\varphi.$$

Formel (5) aber liefert:

$$\sin(\vartheta\cos\varphi)\cdot\vartheta\sin\varphi = 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\vartheta J_{2s-1}\sin\varphi\,\cos(2s-1)\varphi.$$

Schreibt man hier:

$$2\sin\varphi\cos(2s-1)\varphi = \sin 2s\varphi - \sin 2(s-1)\varphi$$

und fasst je die beiden Glieder mit dem gleichen Multiplum von φ zusammen, so folgt:

$$\sin(\vartheta\cos\varphi)\cdot\vartheta\sin\varphi = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\vartheta(J_{2s-1}+J_{2s+1})\sin 2s\varphi.$$

Da nach den Grundeigenschaften der Fourier'schen Reihen die rechte Seite dieser Gleichung mit derjenigen unter (7) gliedweise übereinstimmen muss, so ergiebt sich die Richtigkeit der Recursionsformel (6) für alle geraden Ordnungen s.

Knüpft man die vorstehende Entwicklung an die Differentiation der Gleichung (5), so folgt entsprechend die Gültigkeit von (6) für die ungeraden s.

Eine ganz analoge Überlegung lässt sich an die Differentiation der Gleichungen (4) und (5) nach ϑ anknüpfen. Hierbei entspringen die nachfolgenden *Relationen für die Ableitungen der Cylinderfunctionen:*

(8) $\frac{dJ_0(\vartheta)}{d\vartheta} = -J_1(\vartheta), \quad 2\frac{dJ_s(\vartheta)}{d\vartheta} = J_{s-1}(\vartheta) - J_{s+1}(\vartheta)$ *für* $s > 0$.

Wir merken endlich noch *zwei weitere Integraldarstellungen der Cylinderfunctionen* an. Die erste lautet:

$$(9) \qquad J_s(\vartheta) = \frac{\vartheta^s}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\vartheta\cos\varphi)\sin^{2s}\varphi\, d\varphi.$$

Zum Beweise dieser Gleichung entwickele man $\cos(\vartheta\cos\varphi)$ nach Potenzen von $\vartheta\cos\varphi$ und findet, wenn man gliedweise integriert:

$$\int_0^\pi \cos(\vartheta\cos\varphi)\sin^{2s}\varphi\, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!}\int_0^\pi \sin^{2s}\varphi\cos^{2k}\varphi\, d\varphi.$$

Nun erhält man aber durch wiederholte partielle Integration:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2s}\varphi\cos^{2k}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2^{k+s}(k+s)!},$$

so dass die voraufgehende Gleichung liefert:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\vartheta\cos\varphi)\sin^{2s}\varphi\, d\varphi = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\vartheta^{2k}}{2^{s+2k}k!(s+k)!}.$$

Der Vergleich mit Formel (3) pg. 62 lässt die zu beweisende Darstellung (9) von J_s als richtig erscheinen.

Der letzte hier mitzuteilende Integralausdruck für J_s ist:

$$(10) \qquad J_s(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(s\varphi - \vartheta\sin\varphi)d\varphi.$$

Diese Formel zeigt man sehr leicht durch Reduction auf die ursprünglichen Integraldarstellungen (1) und (2). Handelt es sich z. B. um eine gerade Ordnung $2s$, so ergiebt sich durch die Substitution $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\pi \cos(2s\varphi - \vartheta\sin\varphi)d\varphi = (-1)^s\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos(2s\psi - \vartheta\cos\psi)d\psi$$

und durch Entwicklung der rechten Seite:

$$\int_0^\pi \cos(2s\varphi - \vartheta \sin\varphi)\,d\varphi = (-1)^s \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta\cos\psi)\cos 2s\psi\,d\psi$$
$$+ (-1)^s \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta\cos\psi)\sin 2s\psi\,d\psi.$$

Das letzte Integral rechter Hand verschwindet, weil die zu integrierende Function $\sin(\vartheta\cos\psi)\sin 2s\psi$ bei Zeichenwechsel von ψ selber das Zeichen wechselt. Beim ersten Integral darf man das Intervall $-\frac{\pi}{2}$ bis 0 durch dasjenige von $\frac{\pi}{2}$ bis π ersetzen, weil die zu integrierende Function bei Vermehrung von ψ um π unverändert bleibt. Hiernach gilt:

$$\int_0^\pi \cos(2s\varphi - \vartheta \sin\varphi)\,d\varphi = (-1)^s \int_0^\pi \cos(\vartheta\cos\psi)\cos 2s\psi\,d\psi.$$

Daraus aber folgt mit Rücksicht auf die Formel (1) pg. 63 die Gültigkeit der Darstellung (10) für alle Cylinderfunctionen gerader Ordnung. Bei den ungeraden Ordnungen s führt eine ähnliche Rechnung zum Ziele*).

§ 17. Bessel's Lösung der Kepler'schen Aufgabe.

Die in Figur 7 über der grossen Axe $\overline{FN}$ errichtete Ellipse sei die Bahn eines Planeten; die grosse Halbaxe der Ellipse heisse a, die kleine b. Die Sonne befinde sich im Brennpunkte S der Ellipse. Die Zeit werde vom Durchgange des Planeten durch die Sonnennähe N gemessen; zur Zeit t befinde sich der Planet an der Stelle P seiner Bahn. Man errichte über der

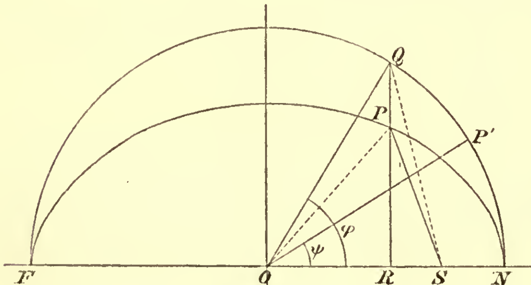


Fig. 7.

*) Weitere Ausführungen über die Cylinderfunctionen findet man ausser in den pg. 26 genannten Werken u. a. auch noch in folgenden Monographien: C. Neumann, *„Theorie der Bessel'schen Functionen, ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen"* (Leipzig, 1868); E. Lommel, *„Studien über die Bessel'schen Functionen"* (Leipzig, 1868); J. H. Graf und E. Gubler, *„Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen"* I (Bern, 1898).

grossen Axe der Ellipse als Durchmesser einen mit der Ellipse concentrischen Kreis und verlängere die Ellipsenordinate $\overline{PR}$ zur Kreisordinate $\overline{QR}$, welche letztere sich zur ersten bekanntlich verhält wie a zu b. Der in der Figur mit φ bezeichnete Winkel $\sphericalangle\, QON$ heisst die *„excentrische Anomalie“* des Planeten zur Zeit t.

Wir lassen nun P durch einen die Peripherie des Kreises mit *gleichförmiger* Geschwindigkeit durchlaufenden Punkt P' begleitet werden, welcher mit P jedesmal in der Sonnennähe N und der Sonnenferne F zusammentrifft. Zur Zeit t befinde sich der begleitende Punkt an der in Figur 7 mit P' bezeichneten Stelle der Kreisperipherie. Der Winkel $\psi = \sphericalangle\, P'ON$, welcher der Zeit t proportional ist, heisst alsdann die *„mittlere Anomalie“* unseres Planeten zur Zeit t.

Das von Kepler zu Anfang des 17. Jahrhunderts aufgestellte Problem, welches hier besprochen werden soll, war nun, *aus der Zeit t oder*, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, *aus der mittleren Anomalie ψ eines Planeten dessen excentrische Anomalie φ zu berechnen.* Nach einer grossen Reihe wenig befriedigender Behandlungen dieser Kepler'schen Aufgabe*) war es Bessel, welcher in den pg. 26 namhaft gemachten Arbeiten die endgültige Lösung gab. Um die Bessel-sche Lösung zu entwickeln, formulieren wir zunächst die Aufgabe näher.

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze ist der vom Radius vector $\overline{SP}$ beschriebene Sector PSN der Zeit t und also der mittleren Anomalie ψ proportional:

$$\text{Sect.}(PSN) = C \cdot \psi. \tag{1}$$

Um einen anderen Ausdruck für den Flächeninhalt dieses Sectors zu gewinnen, knüpfe man an den Kreissector QON, der gleich $\frac{1}{2}a^2\varphi$ ist. Dieser Kreissector verhält sich zum correspondierenden Ellipsensector PON wie a zu b; als Flächeninhalt des Ellipsensectors findet man also:

$$\text{Sect.}(PON) = \frac{1}{2}ab\varphi.$$

Zieht man hiervon den Inhalt des Dreiecks OPS ab, dessen Grundlinie die Excentricität $e = \overline{OS}$, dessen Höhe die Ellipsenordinate:

$$\overline{PR} = \frac{b}{a}\overline{QR} = \frac{b}{a}a\sin\varphi$$

ist, so restiert der zu bestimmende Sector PSN:

*) Siehe hierüber die historischen Angaben in dem pg. 66 genannten Werke von Graf und Gubler, pg. 7ff. des ersten Teiles.

$$\text{Sect.}\,(PSN) = \frac{1}{2}ab\varphi - \frac{1}{2}eb\sin\varphi.$$

Den hier rechts stehenden Ausdruck hat man nun nach (1) gleich $C\psi$ zu setzen und bestimme C etwa dadurch, dass man $\varphi = \pi$ und also auch $\psi = \pi$ einträgt. Es folgt $C = \frac{1}{2}ab$ und:

(2) $$\psi = \varphi - \frac{e}{a}\sin\varphi.$$

Die Lösung der Kepler'schen Aufgabe besteht hiernach in der Berechnung von φ aus der Gleichung (2).

Da φ der Natur der Sache nach eine ungerade Function von ψ ist, so soll φ im Intervall $0 \leqq \psi < \pi$ nach dem pg. 12 entwickelten Ansatze in eine nach Sinus der Vielfachen von ψ fortschreitende Reihe:

$$\varphi = b_1 \sin\psi + b_2 \sin 2\psi + b_3 \sin 3\psi + \cdots$$

entwickelt werden, eine Darstellung, die im ganzen Intervall $0 \leqq \psi < \pi$ unter Ausschluss der oberen Grenze $\psi = \pi$ gelten wird. Der einzelne Coefficient b_s ist hierbei gegeben durch:

$$b_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi \sin s\psi\, d\psi.$$

Man findet aber durch partielle Integration:

$$\int \varphi \sin s\psi\, d\psi = -\frac{1}{s}\varphi\cos s\psi + \frac{1}{s}\int d\varphi \cos s\psi.$$

Setzt man die Integralgrenzen ein und berücksichtigt, dass für $\psi = 0$ auch $\varphi = 0$ ist und für $\psi = \pi$ auch $\varphi = \pi$, so folgt unter Benutzung der Gleichung (2):

$$\int_0^\pi \varphi \sin s\psi\, d\psi = (-1)^{s-1}\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\pi \cos\left(s\varphi - \frac{se}{a}\sin\varphi\right)d\varphi.$$

Das letzte rechts auftretende Integral ist aber nach (10) pg. 65 gleich $\pi J_s\left(\frac{se}{a}\right)$; man hat also zunächst:

$$\varphi = 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\cdot\frac{\sin s\psi}{s} + 2\sum_{s=1}^{\infty}J_s\left(\frac{se}{a}\right)\frac{\sin s\psi}{s}.$$

Die erste hier auf der rechten Seite stehende Summe hat nach (1) pg. 12 für $0 \leqq \psi < \pi$ den Wert ψ, so dass man gewinnt:

(3) $$\varphi = \psi + 2\sum_{s=1}^{\infty}J_s\left(\frac{se}{a}\right)\frac{\sin s\psi}{s}.$$

Dies ist aber die Bessel'sche Darstellung der excentrischen Anomalie φ; sie gilt in dieser Gestalt auch für $\psi = \pi$, und da sie offenbar auch für das Intervall von 0 bis $-\pi$ richtig ist, so gilt sie allgemein*).

---

*) Wegen weiterer, namentlich physikalischer Anwendungen der Cylinderfunctionen sehe man z. B. das pg. 26 genannte Werk Byerly's pg. 226 ff. Es wird daselbst angeknüpft an die Integration der auf Cylindercoordinaten umgerechneten Laplace'schen Differentialgleichung (cf. (4) pg. 30) vermöge der Cylinderfunctionen. Bei Untersuchungen dieser Art spielen die Wurzeln der Gleichungen $J_s(\vartheta) = 0$ eine wichtige Rolle. Für einige Anfangswerte s ist unten eine Tabelle der kleinsten in Betracht kommenden Wurzeln ϑ mitgeteilt.

I. Tafel für die Functionen $P_1(\mu), P_2(\mu), \cdots, P_6(\mu)$.

μ	$P_1(\mu)$	$P_2(\mu)$	$P_3(\mu)$	$P_4(\mu)$	$P_5(\mu)$	$P_6(\mu)$
0,00	0,0000	— 0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	— 0,3125
0,01	0,0100	— 0,4998	— 0,0150	0,3746	0,0187	— 0,3118
0,02	0,0200	— 0,4994	— 0,0300	0,3735	0,0374	— 0,3099
0,03	0,0300	— 0,4986	— 0,0449	0,3716	0,0560	— 0,3066
0,04	0,0400	— 0,4976	— 0,0598	0,3690	0,0744	— 0,3021
0,05	0,0500	— 0,4962	— 0,0747	0,3657	0,0927	— 0,2962
0,06	0,0600	— 0,4946	— 0,0895	0,3616	0,1106	— 0,2891
0,07	0,0700	— 0,4926	— 0,1041	0,3567	0,1283	— 0,2808
0,08	0,0800	— 0,4904	— 0,1187	0,3512	0,1455	— 0,2713
0,09	0,0900	— 0,4878	— 0,1332	0,3449	0,1624	— 0,2606
0,10	0,1000	— 0,4850	— 0,1475	0,3379	0,1788	— 0,2488
0,11	0,1100	— 0,4818	— 0,1617	0,3303	0,1947	— 0,2360
0,12	0,1200	— 0,4784	— 0,1757	0,3219	0,2101	— 0,2220
0,13	0,1300	— 0,4746	— 0,1895	0,3129	0,2248	— 0,2071
0,14	0,1400	— 0,4706	— 0,2031	0,3032	0,2389	— 0,1913
0,15	0,1500	— 0,4662	— 0,2166	0,2928	0,2523	— 0,1746
0,16	0,1600	— 0,4616	— 0,2298	0,2819	0,2650	— 0,1572
0,17	0,1700	— 0,4566	— 0,2427	0,2703	0,2769	— 0,1389
0,18	0,1800	— 0,4514	— 0,2554	0,2581	0,2880	— 0,1201
0,19	0,1900	— 0,4458	— 0,2679	0,2453	0,2982	— 0,1006
0,20	0,2000	— 0,4400	— 0,2800	0,2320	0,3075	— 0,0806
0,21	0,2100	— 0,4338	— 0,2918	0,2181	0,3159	— 0,0601
0,22	0,2200	— 0,4274	— 0,3034	0,2037	0,3234	— 0,0394
0,23	0,2300	— 0,4206	— 0,3146	0,1889	0,3299	— 0,0183
0,24	0,2400	— 0,4136	— 0,3254	0,1735	0,3353	0,0029

μ	$P_1(\mu)$	$P_2(\mu)$	$P_3(\mu)$	$P_4(\mu)$	$P_5(\mu)$	$P_6(\mu)$
0,25	0,2500	— 0,4062	— 0,3359	0,1577	0,3397	0,0243
0,26	0,2600	— 0,3986	— 0,3461	0,1415	0,3431	0,0456
0,27	0,2700	— 0,3906	— 0,3558	0,1249	0,3453	0,0669
0,28	0,2800	— 0,3824	— 0,3651	0,1079	0,3465	0,0879
0,29	0,2900	— 0,3738	— 0,3740	0,0906	0,3465	0,1087
0,30	0,3000	— 0,3650	— 0,3825	0,0729	0,3454	0,1292
0,31	0,3100	— 0,3558	— 0,3905	0,0550	0,3431	0,1492
0,32	0,3200	— 0,3464	— 0,3981	0,0369	0,3397	0,1686
0,33	0,3300	— 0,3366	— 0,4052	0,0185	0,3351	0,1873
0,34	0,3400	— 0,3266	— 0,4117	— 0,0000	0,3294	0,2053
0,35	0,3500	— 0,3162	— 0,4178	— 0,0187	0,3225	0,2225
0,36	0,3600	— 0,3056	— 0,4234	— 0,0375	0,3144	0,2388
0,37	0,3700	— 0,2946	— 0,4284	— 0,0564	0,3051	0,2540
0,38	0,3800	— 0,2834	— 0,4328	— 0,0753	0,2948	0,2681
0,39	0,3900	— 0,2718	— 0,4367	— 0,0942	0,2833	0,2810
0,40	0,4000	— 0,2600	— 0,4400	— 0,1130	0,2706	0,2926
0,41	0,4100	— 0,2478	— 0,4427	— 0,1317	0,2569	0,3029
0,42	0,4200	— 0,2354	— 0,4448	— 0,1504	0,2421	0,3118
0,43	0,4300	— 0,2226	— 0,4462	— 0,1688	0,2263	0,3191
0,44	0,4400	— 0,2096	— 0,4470	— 0,1870	0,2095	0,3249
0,45	0,4500	— 0,1962	— 0,4472	— 0,2050	0,1917	0,3290
0,46	0,4600	— 0,1826	— 0,4467	— 0,2226	0,1730	0,3314
0,47	0,4700	— 0,1686	— 0,4454	— 0,2399	0,1534	0,3321
0,48	0,4800	— 0,1544	— 0,4435	— 0,2568	0,1330	0,3310
0,49	0,4900	— 0,1398	— 0,4409	— 0,2732	0,1118	0,3280
0,50	0,5000	— 0,1250	— 0,4375	— 0,2891	0,0898	0,3232
0,51	0,5100	— 0,1098	— 0,4334	— 0,3044	0,0673	0,3166
0,52	0,5200	— 0,0944	— 0,4285	— 0,3191	0,0441	0,3080
0,53	0,5300	— 0,0786	— 0,4228	— 0,3332	0,0204	0,2975
0,54	0,5400	— 0,0626	— 0,4163	— 0,3465	— 0,0037	0,2851
0,55	0,5500	— 0,0462	— 0,4091	— 0,3590	— 0,0282	0,2708
0,56	0,5600	— 0,0296	— 0,4010	— 0,3707	— 0,0529	0,2546
0,57	0,5700	— 0,0126	— 0,3920	— 0,3815	— 0,0779	0,2366
0,58	0,5800	0,0046	— 0,3822	— 0,3914	— 0,1028	0,2168
0,59	0,5900	0,0222	— 0,3716	— 0,4002	— 0,1278	0,1953
0,60	0,6000	0,0400	— 0,3600	— 0,4080	— 0,1526	0,1721
0,61	0,6100	0,0582	— 0,3475	— 0,4146	— 0,1772	0,1473
0,62	0,6200	0,0766	— 0,3342	— 0,4200	— 0,2014	0,1211
0,63	0,6300	0,0954	— 0,3199	— 0,4242	— 0,2251	0,0935
0,64	0,6400	0,1144	— 0,3046	— 0,4270	— 0,2482	0,0646
0,65	0,6500	0,1338	— 0,2884	— 0,4284	— 0,2705	0,0347
0,66	0,6600	0,1534	— 0,2713	— 0,4284	— 0,2919	0,0038
0,67	0,6700	0,1734	— 0,2531	— 0,4268	— 0,3122	— 0,0278
0,68	0,6800	0,1936	— 0,2339	— 0,4236	— 0,3313	— 0,0601
0,69	0,6900	0,2142	— 0,2137	— 0,4187	— 0,3490	— 0,0926

μ	$P_1(\mu)$	$P_2(\mu)$	$P_3(\mu)$	$P_4(\mu)$	$P_5(\mu)$	$P_6(\mu)$
0,70	0,7000	0,2350	— 0,1925	— 0,4121	— 0,3652	— 0,1253
0,71	0,7100	0,2562	— 0,1702	— 0,4036	— 0,3796	— 0,1578
0,72	0,7200	0,2776	— 0,1469	— 0,3933	— 0,3922	— 0,1899
0,73	0,7300	0,2994	— 0,1225	— 0,3810	— 0,4026	— 0,2214
0,74	0,7400	0,3214	— 0,0969	— 0,3666	— 0,4107	— 0,2518
0,75	0,7500	0,3438	— 0,0703	— 0,3501	— 0,4164	— 0,2808
0,76	0,7600	0,3664	— 0,0426	— 0,3314	— 0,4193	— 0,3081
0,77	0,7700	0,3894	— 0,0137	— 0,3104	— 0,4193	— 0,3333
0,78	0,7800	0,4126	0,0164	— 0,2871	— 0,4162	— 0,3559
0,79	0,7900	0,4362	0,0476	— 0,2613	— 0,4097	— 0,3756
0,80	0,8000	0,4600	0,0800	— 0,2330	— 0,3995	— 0,3918
0,81	0,8100	0,4842	0,1136	— 0,2021	— 0,3855	— 0,4041
0,82	0,8200	0,5086	0,1484	— 0,1685	— 0,3674	— 0,4119
0,83	0,8300	0,5334	0,1845	— 0,1321	— 0,3449	— 0,4147
0,84	0,8400	0,5584	0,2218	— 0,0928	— 0,3177	— 0,4120
0,85	0,8500	0,5838	0,2603	— 0,0506	— 0,2857	— 0,4030
0,86	0,8600	0,6094	0,3001	— 0,0053	— 0,2484	— 0,3872
0,87	0,8700	0,6354	0,3413	0,0431	— 0,2056	— 0,3638
0,88	0,8800	0,6616	0,3837	0,0947	— 0,1570	— 0,3322
0,89	0,8900	0,6882	0,4274	0,1496	— 0,1023	— 0,2916
0,90	0,9000	0,7150	0,4725	0,2079	— 0,0411	— 0,2412
0,91	0,9100	0,7422	0,5189	0,2698	0,0268	— 0,1802
0,92	0,9200	0,7696	0,5667	0,3352	0,1017	— 0,1077
0,93	0,9300	0,7974	0,6159	0,4044	0,1842	— 0,0229
0,94	0,9400	0,8254	0,6665	0,4773	0,2744	0,0751
0,95	0,9500	0,8538	0,7184	0,5541	0,3727	0,1875
0,96	0,9600	0,8824	0,7718	0,6349	0,4796	0,3151
0,97	0,9700	0,9114	0,8267	0,7198	0,5954	0,4590
0,98	0,9800	0,9406	0,8830	0,8089	0,7204	0,6204
0,99	0,9900	0,9702	0,9407	0,9022	0,8552	0,8003
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

II. Tafel der Anfangswerte der Functionen $J_0(\vartheta)$ und $J_1(\vartheta)$.

ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$	ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$
0,0	1,0000	0,0000	0,5	0,9385	0,2423
0,1	0,9975	0,0499	0,6	0,9120	0,2867
0,2	0,9900	0,0995	0,7	0,8812	0,3290
0,3	0,9776	0,1483	0,8	0,8463	0,3688
0,4	0,9604	0,1960	0,9	0,8075	0,4060

ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$	ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$
1,0	0,7652	0,4401	5,5	— 0,0068	— 0,3414
1,1	0,7196	0,4709	5,6	0,0270	— 0,3343
1,2	0,6711	0,4983	5,7	0,0599	— 0,3241
1,3	0,6201	0,5220	5,8	0,0917	— 0,3110
1,4	0,5669	0,5419	5,9	0,1220	— 0,2951
1,5	0,5118	0,5579	6,0	0,1506	— 0,2767
1,6	0,4554	0,5699	6,1	0,1773	— 0,2559
1,7	0,3980	0,5778	6,2	0,2017	— 0,2329
1,8	0,3400	0,5815	6,3	0,2238	— 0,2081
1,9	0,2818	0,5812	6,4	0,2433	— 0,1816
2,0	0,2239	0,5767	6,5	0,2601	— 0,1538
2,1	0,1666	0,5683	6,6	0,2740	— 0,1250
2,2	0,1104	0,5560	6,7	0,2851	— 0,0953
2,3	0,0555	0,5399	6,8	0,2931	— 0,0652
2,4	0,0025	0,5202	6,9	0,2981	— 0,0349
2,5	— 0,0484	0,4971	7,0	0,3001	— 0,0047
2,6	— 0,0968	0,4708	7,1	0,2991	0,0252
2,7	— 0,1424	0,4416	7,2	0,2951	0,0543
2,8	— 0,1850	0,4097	7,3	0,2882	0,0826
2,9	— 0,2243	0,3754	7,4	0,2786	0,1096
3,0	— 0,2601	0,3391	7,5	0,2663	0,1352
3,1	— 0,2921	0,3009	7,6	0,2516	0,1592
3,2	— 0,3202	0,2613	7,7	0,2346	0,1813
3,3	— 0,3443	0,2207	7,8	0,2154	0,2014
3,4	— 0,3643	0,1792	7,9	0,1944	0,2192
3,5	— 0,3801	0,1374	8,0	0,1717	0,2346
3,6	— 0,3918	0,0955	8,1	0,1475	0,2476
3,7	— 0,3992	0,0538	8,2	0,1222	0,2580
3,8	— 0,4026	0,0128	8,3	0,0960	0,2657
3,9	— 0,4018	— 0,0272	8,4	0,0692	0,2708
4,0	— 0,3972	— 0,0660	8,5	0,0419	0,2731
4,1	— 0,3887	— 0,1033	8,6	0,0146	0,2728
4,2	— 0,3766	— 0,1386	8,7	— 0,0125	0,2697
4,3	— 0,3610	— 0,1719	8,8	— 0,0392	0,2641
4,4	— 0,3423	— 0,2028	8,9	— 0,0653	0,2559
4,5	— 0,3205	— 0,2311	9,0	— 0,0903	0,2453
4,6	— 0,2961	— 0,2566	9,1	— 0,1142	0,2324
4,7	— 0,2693	— 0,2791	9,2	— 0,1367	0,2174
4,8	— 0,2404	— 0,2985	9,3	— 0,1577	0,2004
4,9	— 0,2097	— 0,3147	9,4	— 0,1768	0,1816
5,0	— 0,1776	— 0,3276	9,5	— 0,1939	0,1613
5,1	— 0,1443	— 0,3371	9,6	— 0,2099	0,1395
5,2	— 0,1103	— 0,3432	9,7	— 0,2218	0,1166
5,3	— 0,0758	— 0,3460	9,8	— 0,2323	0,0928
5,4	— 0,0412	— 0,3453	9,9	— 0,2403	0,0684

ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$
10,0	— 0,2459	0,0435
10,1	— 0,2490	0,0184
10,2	— 0,2496	— 0,0066
10,3	— 0,2477	— 0,0313
10,4	— 0,2434	— 0,0555
10,5	— 0,2366	— 0,0789
10,6	— 0,2276	— 0,1012
10,7	— 0,2164	— 0,1224
10,8	— 0,2032	— 0,1422
10,9	— 0,1881	— 0,1604
11,0	— 0,1712	— 0,1768
11,1	— 0,1528	— 0,1913
11,2	— 0,1330	— 0,2039
11,3	— 0,1121	— 0,2143
11,4	— 0,0902	— 0,2225
11,5	— 0,0677	— 0,2284
11,6	— 0,0446	— 0,2320
11,7	— 0,0213	— 0,2333
11,8	0,0020	— 0,2323
11,9	0,0250	— 0,2290
12,0	0,0477	— 0,2234
12,1	0,0697	— 0,2157
12,2	0,0908	— 0,2060
12,3	0,1108	— 0,1943
12,4	0,1296	— 0,1807
12,5	0,1469	— 0,1655
12,6	0,1626	— 0,1487
12,7	0,1766	— 0,1307
12,8	0,1887	— 0,1114
12,9	0,1988	— 0,0912
13,0	0,2069	— 0,0703
13,1	0,2129	— 0,0489
13,2	0,2167	— 0,0271
13,3	0,2183	— 0,0052
13,4	0,2177	0,0166
13,5	0,2150	0,0380
13,6	0,2101	0,0590
13,7	0,2032	0,0791
13,8	0,1943	0,0984
13,9	0,1836	0,1166
14,0	0,1711	0,1334
14,1	0,1570	0,1488
14,2	0,1414	0,1626
14,3	0,1245	0,1747
14,4	0,1065	0,1850

ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$
14,5	0,0875	0,1934
14,6	0,0679	0,1999
14,7	0,0476	0,2043
14,8	0,0271	0,2066
14,9	0,0064	0,2069
15,0	— 0,0142	0,2051
15,1	— 0,0345	0,2013
15,2	— 0,0544	0,1955
15,3	— 0,0736	0,1879
15,4	— 0,0919	0,1784
15,5	— 0,1092	0,1672
15,6	— 0,1253	0,1544
15,7	— 0,1401	0,1402
15,8	— 0,1533	0,1247
15,9	— 0,1650	0,1080
16,0	— 0,1749	0,0904
16,1	— 0,1830	0,0720
16,2	— 0,1893	0,0530
16,3	— 0,1936	0,0335
16,4	— 0,1960	0,0139
16,5	— 0,1964	— 0,0058
16,6	— 0,1948	— 0,0252
16,7	— 0,1913	— 0,0444
16,8	— 0,1860	— 0,0629
16,9	— 0,1788	— 0,0807
17,0	— 0,1699	— 0,0977
17,1	— 0,1593	— 0,1135
17,2	— 0,1472	— 0,1281
17,3	— 0,1337	— 0,1414
17,4	— 0,1190	— 0,1532
17,5	— 0,1031	— 0,1634
17,6	— 0,0863	— 0,1719
17,7	— 0,0688	— 0,1787
17,8	— 0,0506	— 0,1837
17,9	— 0,0321	— 0,1868
18,0	— 0,0134	— 0,1880
18,1	0,0054	— 0,1873
18,2	0,0241	— 0,1848
18,3	0,0423	— 0,1805
18,4	0,0601	— 0,1744
18,5	0,0772	— 0,1666
18,6	0,0934	— 0,1572
18,7	0,1086	— 0,1463
18,8	0,1226	— 0,1340
18,9	0,1353	— 0,1204

ϑ	$J_0(\vartheta)$	$J_1(\vartheta)$
19,0	0,1466	— 0,1057
19,1	0,1564	— 0,0900
19,2	0,1646	— 0,0735
19,3	0,1711	— 0,0564
19,4	0,1759	— 0,0388
19,5	0,1789	— 0,0209
19,6	0,1800	— 0,0029
19,7	0,1794	0,0151
19,8	0,1770	0,0328
19,9	0,1729	0,0501
20,0	0,1670	0,0668

III. Tafel für die kleinsten Lösungen von $J_s(\vartheta) = 0$.

$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
2,405	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
18,071	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813
27,494	29,047	30,571	32,050	33,512	34,983

Anmerkung. Die vorstehende Tafel II über die Cylinderfunctionen $J_0(\vartheta)$, $J_1(\vartheta)$ ist Lommel's *„Studien über die Bessel'schen Functionen"* (cf. Fussnote pg. 66) entlehnt; die Tafeln I und III stammen aus dem mehrfach genannten Werke Byerly's. Im letzteren Buche finden sich folgende Quellenangaben. Tafeln für die ersten sieben Functionen $P_n(\mu)$ wurden unter Leitung Glaisher's berechnet und 1879 im „Report of the British Association for the Advancement of Science" veröffentlicht. Die Tafel III verdankt man J. Bourget, der dieselbe in den „Annales de l'École Normale", Bd. 3 (1866) mitteilte.

Drittes Kapitel.

Functionen einer complexen Variabelen.

Die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen ist im wesentlichen als eine Schöpfung des neunzehnten Jahrhunderts anzusehen. Bereits zu Beginn desselben kannte Gauss eine Reihe wichtigster Grundsätze dieser Theorie. In seiner *Dissertation**) hatte derselbe aufgewiesen, welch' einfache Gestalt die Lehre von den rationalen ganzen Functionen gewinnt, falls man dem Argumente der Function gestattet, beliebige complexe Werte anzunehmen; und in seinen vielleicht noch früher liegenden Untersuchungen über das *arithmetisch-geometrische Mittel***) hat er, durch richtige Erkenntnis des Wesens der hierbei eintretenden Functionen geleitet, die Betrachtung alsbald von reelle auf complexe Variabele ausgedehnt. Doch erst 1811 nahm Gauss in einem oft genannten Briefe an Bessel***) Gelegenheit, seine Auffassungen über das Wesen der Functionen einer complexen Variabelen auszusprechen; die Bedeutung der *Integrationen im complexen Gebiete* (cf. unten §§ 8 ff.) und der klar erfasste Begriff der *ganzen transcendenten Functionen* (cf. §§ 13 und 20) sind die wesentlichsten Gesichtspunkte dieses Briefes. Die geometrische Deutung einer Function complexen Argumentes durch *winkeltreue oder conforme Abbildung einer Ebene auf eine andere* (cf. §§ 1 ff.) ergiebt sich aus Art. 8 einer im Jahre 1822 von Gauss behandelten Preisaufgabe der Gesellsch. der Wiss. in Kopenhagen†), wobei die Bedeutung dieses Gegenstandes für die Geodäsie kurz erwähnt wird. Doch hatte bereits in den siebziger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts Lagrange die Beziehung der

---

*) *„Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse“* (Helmstedt 1799), Gauss' Werke, Bd. 3 pg. 1.

**) Cf. Gauss' Werke, Bd. 3 pg. 361 bis 402.

***) Vergl. den Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel (Leipzig 1880) pg. 155 ff.

†) *„Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf eine andere gegebene Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird“* (Altona 1825), Gauss' Werke, Bd. 4 pg. 189.

complexen Functionen zu den Aufgaben der conformen Abbildung gefunden und auf geodätische Zwecke angewendet.

Gegenüber diesem universellen Gauss'schen Standpunkte haben die späteren Forscher jeweils nur nach speciellen Richtungen hin die Functionentheorie weiter ausgebildet.

Später als Gauss, jedoch unabhängig von ihm hat Cauchy die Bedeutung der *bestimmten Integrale mit complexen Variabelen und Grenzen* als fundamental für die Theorie der Functionen einer complexen Variabelen erkannt. Cauchy's bezügliche Hauptarbeit *„Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires“* ist 1825 erschienen; doch reichen seine Untersuchungen hierüber bis 1814 zurück. Cauchy's Methoden sind namentlich durch Puiseux weitergebildet und haben zu einer vor allem in Frankreich lange Zeit vorherrschenden Gestalt der Functionentheorie geführt*).

Riemann's**) Forschungen sind zunächst denjenigen Cauchy's nahe verwandt, stellen jedoch Gauss' Princip der conformen Abbildung mehr in den Vordergrund. Auf dieser Basis gelangt Riemann zu einer *allgemeinen Begriffsdefinition einer analytischen Function* und nimmt vor allem, überall mehr von Anschauungen als Rechnungen geleitet, mit dem grössten Erfolge das Studium der *mehrdeutigen Functionen* in Angriff.

Etwa gleichzeitig mit Riemann beginnt Weierstrass seine functionentheoretischen Forschungen. Derselbe knüpft den allgemeinen Begriff *„analytischer Functionen“* an deren analytische Darstellungen durch „Potenzreihen“ und „unendliche Producte“***) und entwickelt für die Rechnung mit solchen Gebilden gesicherte Grundlagen. Die *„ganzen transcendenten Functionen“*, deren Bedeutung bereits Gauss erkannte, kommen durch Weierstrass zur Ausbildung und allgemeinen Geltung.

Die deutschen Lehrbücher der Functionentheorie haben bis vor ganz kurzer Zeit in der Regel eine nur einseitige Darstellung derselben vermittelt. So steht Durège's Werk *„Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse“*†) auf Cauchy-Riemann-

---

*) Vergl. z. B. Briot et Bouquet *„Théorie des fonctions elliptiques“* (Paris, 1875) pg. 19 ff.

**) *„Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse“* (Göttingen 1851); *„Theorie der Abel'schen Functionen“* Journ. f. Math. Bd. 54 (1857). Cf. Riemann's Werke pg. 1 und 81.

***) Vergl. namentlich die beiden folgenden Abhandlungen von Weierstrass *„Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“*, Abhandlungen der Berl. Akademie von 1876, und *„Über die Theorie der analytischen Facultäten“*, Journal f. Math. Bd. 51; ges. Werke, Bd. 2 pg. 75 und Bd. 1 pg. 153.

†) 3. Aufl., Leipzig, 1882.

schem Standpunkte, während z. B. die *„Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen“* von J. Thomae, welche jüngst in zweiter Auflage erschien*), den Weierstrass'schen Auffassungen angehört. Erst neuestens sind nach dem Vorgange des Auslands auch die deutschen Autoren umfassenderen Anforderungen gerecht geworden; es sei in dieser Hinsicht namentlich H. Burkhardt's *„Einführung in die Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen“***) genannt.

Als Anwendungen der Functionen einer complexen Variabelen haben wir neben der schon erwähnten Beziehung der conformen Abbildungen zur *Geodäsie* in erster Linie diejenigen Probleme der mathematischen Physik zu nennen, denen die für zwei Variabele x, y gedachte *Laplace'sche Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

zu Grunde liegt. Die Vermittlung ist dadurch hergestellt, dass die reellen Bestandteile unserer Functionen dieser Differentialgleichung genügen werden. Ein hierher gehörendes physikalisches Problem, den *stationären Strom einer incompressibelen Flüssigkeit in einer Ebene* betreffend, soll in § 7 behandelt werden.

Bei der Mehrzahl der Anwendungen treten allerdings nur Functionen reeller Veränderlicher auf. In dieser Hinsicht vergl. man z. B. die im übernächsten Kapitel zur Behandlung kommenden Probleme der Mechanik, bei denen die elliptischen Functionen „reeller“ Argumente Verwendung finden. Dabei aber ist zu bemerken, dass man die wahre Natur der Functionen und die wichtigsten Regeln für ihre Behandlung vielfach nur erst bei Ausdehnung der Argumente auf beliebige complexe Werte erkennt.

§ 1. Lineare Functionen und Kreisverwandtschaften.

Es sei z eine complexe Variabele, die wir unter Trennung ihres reellen und imaginären Bestandteils $z = x + iy$ schreiben werden. Von z soll zunächst eine lineare Function $Z = X + iY$, nämlich:

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

betrachtet werden. Die Coefficienten a, b, c, d sollen hierbei beliebige complexe Constante sein; nur darf nicht gerade $ad - bc = 0$ sein, weil in diesem Falle Z bei veränderlichem z constant sein würde.

*) Halle a. S., 1898. **) Leipzig, 1897.

Zur geometrischen Deutung von $z = x + iy$ legen wir in üblicher Weise eine Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y zu Grunde, wobei der Punkt mit den Coordinaten x, y als „Träger" oder „Bildpunkt" des Wertes $x + iy$ der Variabelen z gilt. Diese Ebene wird in der Folge kurz „z-Ebene" genannt*). Die Werte der Function Z deuten wir je nach Umständen entweder in der gleichen Ebene oder denken die „Z-Ebene" von derjenigen der Variabelen z getrennt liegend.

Unter Bevorzugung der letzteren Vorstellung deuten wir nun die Function (1) dahin, dass durch dieselbe jedem Punkte der z-Ebene ein bestimmter Punkt der Z-Ebene eindeutig zugeordnet sei. Wir bezeichnen dies Sachverhältnis kurz dahin, *dass die z-Ebene vermöge der Function* (1) *auf die Z-Ebene abgebildet sei.* Im speciellen handelt es sich hier in dem Sinne um eine *„ein-eindeutige Abbildung"*, als jedem Punkte der Z-Ebene auch umgekehrt nur ein Punkt der z-Ebene correspondiert.

Um den geometrischen Charakter der durch lineare Functionen vermittelten Abbildungen aufzuweisen, betrachten wir zunächst einige specielle Fälle.

I. Ganze Functionen $Z = az + b$.

Ist insbesondere $a = 1$, und schreibt man unter Trennung des reellen und imaginären Bestandteils $b = b_1 + ib_2$, so wird die Beziehung beider Ebenen durch $X = x + b_1$, $Y = y + b_2$ angegeben, eine Transformation, die aus den Elementen der analytischen Geometrie als *„Parallelverschiebung"* oder *„Translation"* bekannt ist. Das Abbild der z-Ebene auf der Z-Ebene ist mit dem Original *congruent* und erscheint gegen letzteres parallel verschoben und zwar um b_1 und b_2 im Sinne der $+ X$- bez. $+ Y$-Axe. Ein Beispiel liefert Figur 8, in welcher die

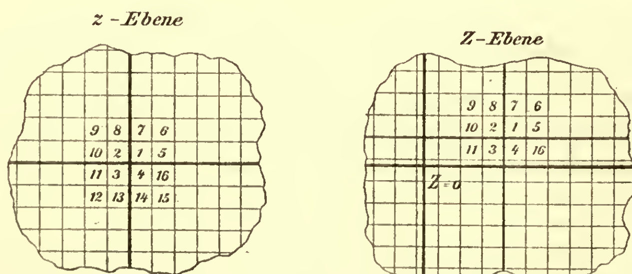


Fig. 8.

*) Über die geometrische Deutung der auf complexe Zahlen angewandten vier Grundrechnungen muss auf die einführenden Vorlesungen und Lehrbücher über höhere Analysis verwiesen werden.

z-Ebene eine Einteilung in (teilweise) numerierte Quadrate enthält; in der Z-Ebene sind ausser der reellen und imaginären Z-Axe die Abbilder jener Quadrate gezeichnet.

Ist zweitens $b = 0$, so benutze man für a die „Polardarstellung“ $a = \varkappa e^{\alpha i}$, wo $\varkappa$ der „absolute Betrag“ $|a|$ und α die „Amplitude“ von a ist. Dies giebt Anlass zu erneuter Fallunterscheidung, indem man einmal $\varkappa = 1$, sodann zweitens $\alpha = 0$ wählt. Im ersten Falle ist:

$$X = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \qquad Y = x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

eine Transformation, die gleichfalls aus den Elementen der analytischen Geometrie als „*Drehung*“ der Ebene um den Nullpunkt durch den Winkel α bekannt ist. Gilt aber $\alpha = 0$, so ist $X = \varkappa x$, $Y = \varkappa y$, und man hat dann die speciell so benannte „*Ähnlichkeitstransformation*“, bei welcher das Abbild dem Original unter Wahrung des Nullpunktes und aller Richtungen *ähnlich* ausfällt. Ist weder $\varkappa = 1$ noch $\alpha = 0$, so erscheint die Abbildung aus einer Drehung der Ebene um den Nullpunkt

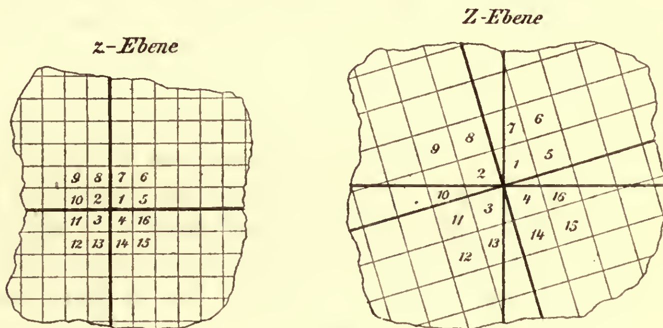


Fig. 9.

und einer Ähnlichkeitstransformation zusammengesetzt. Ein hierher gehöriges Beispiel liefert Figur 9.

Die allgemeine ganze lineare Function $Z = az + b$ ist mit dem Vorstehenden zugleich erledigt. Setzt man nämlich $z' = az$, $Z = z' + b$, so ergiebt sich, dass die der Function Z zugehörige Abbildung durch Combination einer Drehung, einer Ähnlichkeitstransformation und einer Translation hergestellt werden kann. *Bei einer linearen ganzen Function ist die Abbildung dem Original stets ähnlich; die Abbildung ist demnach conform (winkeltreu), d. h. jeder abgebildete Winkel ist seinem Original gleich, und man bemerke überdies, dass den Geraden und Kreisen der z-Ebene wieder die Geraden bez. Kreise der Z-Ebene entsprechen.*

II. Die Function $Z = \frac{1}{z}$.

Die Variabelen z und Z sollen zunächst in der gleichen Ebene

gedeutet werden, und man ziehe die „Polardarstellung" $z = re^{\vartheta i}$ für z (und entsprechend für Z) heran, wo $r = |z|$ den absoluten Betrag und ϑ die Amplitude der complexen Zahl z bedeuten. Die zur vorliegenden Function gehörende Abbildung der z-Ebene auf sich selbst weist dem Punkte (r, ϑ) den Punkt $\left(\frac{1}{r}, -\vartheta\right)$ zu. Dieser Übergang soll in der Art vollzogen werden, dass man vom Punkte (r, ϑ) zunächst zu $\left(\frac{1}{r}, \vartheta\right)$ geht, hernach von hier zu $\left(\frac{1}{r}, -\vartheta\right)$.

Die Transformation, welche dem Punkte P der Coordinaten r, ϑ den Punkt P' der Coordinaten $\frac{1}{r}, \vartheta$ zuweist, heisst *„Transformation durch reciproke Radien"* am Einheitskreise, d. i. am Kreise mit dem Radius 1 um den Nullpunkt; sie wird auch als *„Inversion"* oder *„Spiegelung"* am Einheitskreise bezeichnet. Der Charakter dieser Transformation ist durch Figur 10 angegeben. Die Zuordnung der Punkte ist in dem Sinne eine *sich selbst inverse* oder *umkehrbare*, dass dem schon genannten Punkte P' umgekehrt wieder der erste Punkt P zugehört. Zwei einander zugeordnete Punkte liegen auf dem gleichen vom Nullpunkte O ausziehenden Strahle, und jeder liegt auf der Polare des anderen bezüglich des „Inversionskreises" (d. i. des Einheitskreises). Jeder Punkt dieses Kreises ist sich selbst zugeordnet. Irgend ein unendlich fern liegender Punkt der Ebene correspondiert dem Nullpunkte. Diese Sachlage giebt Anlass, *nur von einem einzigen unendlich fernen Punkte der Ebene mit $z = \infty$ zu sprechen*, was man sich dadurch veranschaulichen kann, dass man die z-Ebene als „Kugel mit unendlich grossem Radius" denkt. Der Satz, dass die Punkte der Ebene einander zu Paaren zugeordnet sind, gilt alsdann auch unter Einschluss des Punktes $z = \infty$.

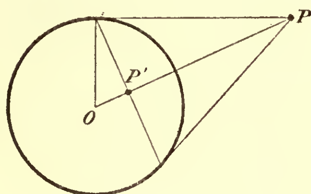


Fig. 10.

Die Kreise der z-Ebene stellen sich in Polarcoordinaten durch:

$$(2) \qquad Ar^2 + Br\cos(\vartheta - \alpha) + C = 0$$

dar, wobei sich für $A = 0$ die gesamten Geraden als „Kreise mit unendlich grossen Radien" einordnen. Der Kreis (2) geht bei der Inversion in die durch:

$$Cr^2 + Br\cos(\vartheta - \alpha) + A = 0$$

gegebene Curve über. Entschliessen wir uns demnach, *die Gerade den Kreisen zuzurechnen*, so entspringt der Satz: *Jeder Kreis der z-Ebene*

geht bei der Inversion ohne Ausnahme wieder in einen Kreis über. Eine Gerade im speciellen liefert (als Kreis durch den Punkt ∞) einen Kreis durch O; die einzelne Gerade durch O geht in sich selbst über.

Wie man leicht sieht, ist der einzelne Kreis (1) stets und nur dann sich selbst zugeordnet, wenn $A = C$ ist. Die hierdurch festgelegten Kreise laufen orthogonal gegen den Inversionskreis und sollen dieserhalb „*Orthogonalkreise*" heissen. Die Anschauung zeigt, dass jeder solche Kreis deshalb sich selbst zugeordnet ist, weil bei der Inversion seine Schnittpunkte mit dem Einheitskreise und seine Tangenten ebenda erhalten bleiben. Man bemerke noch, dass irgend ein Kreis durch zwei nicht zusammenfallende, einander zugeordnete Punkte P, P' stets ein Orthogonalkreis ist; denn der zugeordnete Kreis läuft wieder durch P und P' sowie durch die Schnittpunkte des ersteren Kreises mit dem Einheitskreise hindurch.

Hieraus geht leicht hervor, *dass die Inversion eine conforme oder winkeltreue Abbildung liefert.* Greift man nämlich, wie in Figur 11 geschehen ist, aus dem System aller durch P und P' hindurchzulegenden Kreise irgend zwei auf, so erblickt man in jedem Falle unmittelbar die Gleichheit der zugeordneten Winkel an den Scheitelpunkten P und P'. Handelt es sich indessen im speciellen um einen Winkel, dessen Scheitelpunkt auf dem Einheitskreise liegt, so darf man den einen Schenkel des Winkels als auf einem von O ausziehenden Strahle gelegen annehmen; denn jeder fragliche Winkel kann als Differenz zweier Winkel von der bezeichneten besonderen Art dargestellt werden. Dass aber ein Winkel dieser letzteren Art seinem zugeordneten gleich ist, sieht man durch elementare Discussion der Figur 12, wo es sich um die beiden mit Pfeilen bezeichneten Winkel handelt.

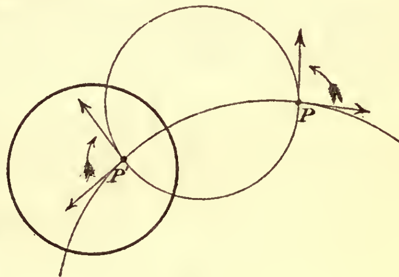


Fig. 11.

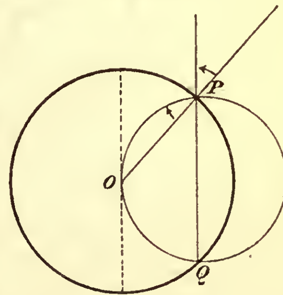


Fig. 12.

Die Inversion zeigt gegenüber den unter I gewonnenen Abbildungen in der Hinsicht eine Abweichung, dass der Drehungssinn, welchen wir den Winkeln zuerteilen können, bei der Inversion eine Umkehrung erfährt. Man sagt, *es handele sich um eine conforme Abbildung mit Umlegung der Schenkel des*

einzelnen Winkels. In den Figuren 11 und 12 ist dies durch die in die Winkel eingetragenen Pfeile angedeutet.

Zur Inversion am Einheitskreise ist jetzt diejenige Transformation hinzuzusetzen, bei welcher der Punkt (r, ϑ) in $(r, -\vartheta)$ übergeht. Diese Transformation hat elementaren Charakter; jeder Punkt geht (im gewöhnlichen Sinne gesprochen) in sein *Spiegelbild bezüglich der reellen z-Axe* über. Es findet hierbei offenbar aufs neue eine Umlegung der Schenkel bei den Winkeln statt.

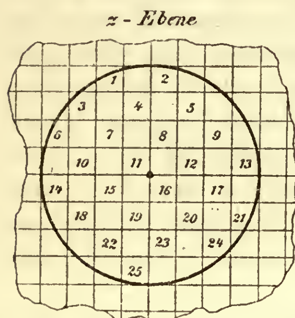


Fig. 13 a.

Indem wir beide Transformationen combinieren, ergiebt sich: *Die durch die Function* $Z = \frac{1}{z}$ *vermittelte Abbildung der z-Ebene auf die Z-Ebene ist conform (ohne Umlegung der Schenkel), und jeder Kreis der z-Ebene liefert wieder einen Kreis der Z-Ebene.* Zur Veranschaulichung dienen die Figuren 13a und 13b. Die geradlinigen Quadrate der z-Ebene liefern durch Kreisbogen begrenzte Vierecke der Z-Ebene, welche sich gegen den Nullpunkt $Z = 0$ hin immer dichter zusammendrängen. Alle unendlich vielen Vierecke der z-Ebene, welche ausserhalb des Einheitskreises liegen, finden in der That ihre Abbilder im Innern des Einheitskreises der Z-Ebene; und je weiter die Originale in der Ebene von z hinausliegen, um so näher rücken die Abbilder an den Nullpunkt der Z-Ebene heran.

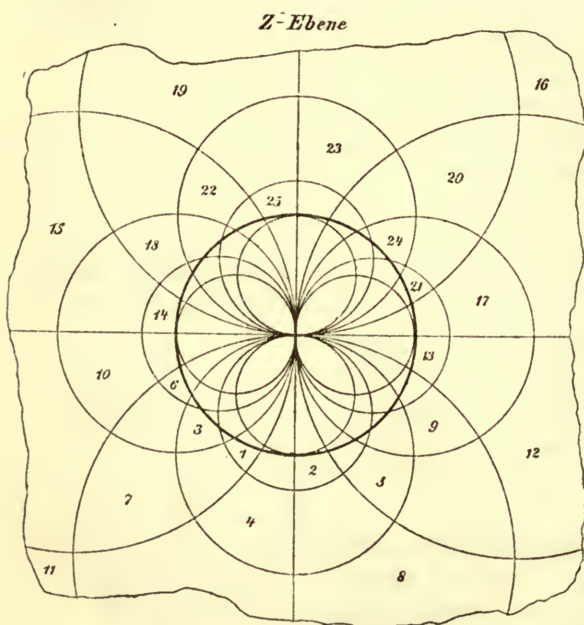


Fig. 13 b.

III. Beliebige Functionen $Z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Ist $c = 0$, so liegt der Fall I vor.

Ist hingegen $c \neq 0$, so findet man unter Benutzung der Abkürzung $ad - bc = D$:

$$Z = \frac{-D}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c},$$

wobei zufolge einer Bemerkung am Anfang des Paragraphen $D \neq 0$ ist. Setzt man hiernach:

$$z' = -\frac{c^2}{D} z - \frac{cd}{D}, \quad z'' = \frac{1}{z'}, \quad Z = z'' + \frac{a}{c},$$

so ergiebt sich, dass die jetzt vorliegende Abbildung durch Combination der in I und II gewonnenen Abbildungen hergestellt werden kann; denn es ist von z zunächst eine Function z' des Typus I gebildet, von z' ist alsdann die unter II besprochene Function $z'' = z'^{-1}$ hergestellt u. s. w. Aus den bisher gewonnenen Ergebnissen folgt demnach unmittelbar: *Die durch eine beliebige lineare Function* $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ *vermittelte ein-eindeutige Abbildung der* z*-Ebene auf die* Z*-Ebene ist conform; die Kreise der* z*-Ebene übertragen sich hierbei wieder auf die Kreise der* Z*-Ebene.* Wegen der letzteren Eigenschaft wird die hier vorliegende Beziehung beider Ebenen zu einander als eine „*Kreisverwandtschaft*" bezeichnet*).

Aufgabe 1. Man untersuche die durch die Function $Z = \frac{z+1}{z-1}$ gelieferte Abbildung der z-Ebene auf die Z-Ebene.

Aufgabe 2. Man bestimme, indem man Z und z in der gleichen Ebene deutet, diejenigen Punkte, welche bei der durch $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ vermittelten Abbildung sich selbst entsprechen.

Aufgabe 3. Man untersuche die Bedingung, unter welcher die durch $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ gelieferte Beziehung zwischen z und Z eine sich selbst inverse oder umkehrbare ist.

§ 2. Stereographische Projection der z-Ebene auf eine Kugeloberfläche.

Der Vorstellung, die z-Ebene habe nur einen Punkt mit $z = \infty$, kann man am besten dadurch Rechnung tragen, dass man die z-Ebene auf die Oberfläche einer Kugel projiciert. Insbesondere soll es sich

*) Diese Bezeichnung rührt von Möbius her, welcher die in Rede stehenden Abbildungen zuerst in rein geometrischer Darstellung behandelte; cf. Abhandl. der Leipz. Ges. d. Wiss. Bd. 2 (1855) oder Möbius' ges. Werke Bd. 2.

hier um die Ableitung der sogen. *„stereographischen Projection“* der Ebene auf die Kugeloberfläche handeln.

Nach der im Anschluss an Figur 5 pg. 27 gegebenen Vorschrift denken wir ein System rechtwinkliger Raumcoordinaten ξ, η, ζ gewählt und fassen die $\xi\eta$-Ebene zugleich als Ebene der complexen Variabelen $z = x + iy$, indem wir für die Punkte dieser Ebene $\xi = x$, $\eta = y$ setzen. Weiter construieren wir die durch:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{1}$$

gegebene Kugel des Radius 1 um den Nullpunkt O. Die stereographische Projection vollziehen wir jetzt in der Art, *dass wir die z-Ebene auf diese Kugeloberfläche von dem auf letzterer selbst gelegenen Projectionscentrum C der Coordinaten $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = -1$ projicieren.*

Die Projection des einzelnen Punktes P der Ebene auf die Kugeloberfläche veranschauliche man sich mit Hilfe von Figur 14, welche die Ebene durch die ζ-Axe und den projicierenden Strahl $\overline{CP}$ darstellt. Rechts ist der Fall eines Punktes P mit $|z| = r < 1$ dargestellt, links der eines Punktes P_1 mit $r > 1$, welcher in P_1' projiciert wird. Man erkennt: *Die stereographische Projection liefert eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der z-Ebene und denen der Kugeloberfläche, wobei speciell der „Punkt“ $z = \infty$ der Ebene das Projectionscentrum C ergiebt.*

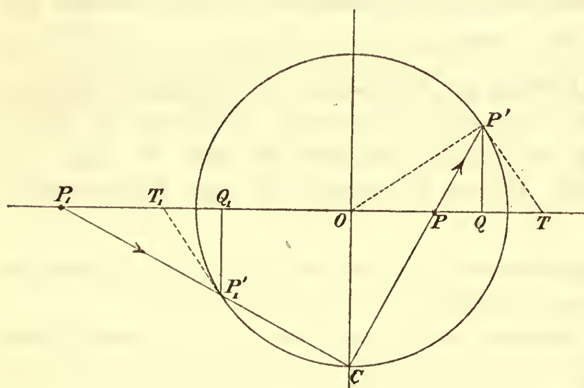


Fig. 14.

Die Coordinaten zweier correspondierenden Punkte P, P' seien (x, y) bez. (ξ, η, ζ), dann ist erstlich $x : y = \xi : \eta$. Setzt man weiter $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ und $\overline{OQ} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varrho$, so lehrt Figur 14, in welcher $\overline{P'Q}$ senkrecht zur xy-Ebene gefällt ist,

$$\frac{\overline{P'Q}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{\varrho - r}{r},$$

eine Formel, die man auch im Falle des Punktes P_1 mit $r > 1$ sofort bestätigt. Aus diesen Angaben berechnet man mit Rücksicht auf (1)

ohne Mühe, *dass sich die stereographische Projection bei der gewählten Lage der z-Ebene und Kugelfläche durch folgende Gleichungen darstellt:*

$$(2) \qquad x = \frac{\xi}{1+\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1+\zeta}$$

oder umgekehrt:

$$(3) \qquad \xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad \zeta = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen unmittelbar, *dass die Kreise der z-Ebene (die Geraden eingerechnet) in die gesamten Kreise der Kugeloberfläche übergehen.* Es transformiert sich nämlich die Gleichung:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

eines beliebigen Kreises der z-Ebene vermöge (2) in:

$$B\xi + C\eta + (D-A)\zeta + (D+A) = 0;$$

hierdurch aber ist ein *ebener* Schnitt der Kugelfläche, d. h. wieder ein *Kreis* dargestellt.

Wir nennen endlich den Satz, *dass die stereographische Projection eine „conforme" Beziehung zwischen der z-Ebene und der Kugeloberfläche liefert.* Errichtet man nämlich, um die Winkel in der Umgebung des dem Punkte P entsprechenden Punktes P' zu messen, in P' die Tangentialebene der Kugel, so schneidet dieselbe aus der Ebene der Figur 14 die Kreistangente $\overline{P'T}$ aus. Das Dreieck $PP'T$ ist offenbar gleichschenklig, und die z-Ebene sowie die eben genannte Tangentialebene stehen auf der Ebene dieses Dreiecks längs $\overline{PT}$ bez. $\overline{P'T}$ senkrecht auf. Man muss jetzt nur noch hinzunehmen, dass das in der z-Ebene durch P laufende Geradenbüschel vermöge des Ebenenbüschels mit der Axe $\overline{PP'}$ projiciert wird. Die Unveränderlichkeit der Winkel bei der Projection ist dann direct aus der Anschauung ersichtlich. Übrigens wird man die gleiche Betrachtung sehr leicht auch für die Punkte P_1 und P_1' in Figur 14 durchführen. —

Wo es erwünscht ist, können wir in der Folge an Stelle der z-Ebene die Kugeloberfläche zur Trägerin der complexen Werte z machen, wobei zufolge (2) der einzelne Punkt (ξ, η, ζ) der Kugelfläche den Wert $z = \frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}$ bekommt; wir sprechen in diesem Sinne von einer *„Kugel der complexen Variabelen z"* oder kurz von einer *„z-Kugel"*. Auf der z-Kugel ist jetzt der „Punkt" $z = \infty$ und seine nächste „Umgebung" beim Projectionscentrum C direct zugänglich.

Eine andere oft zu benutzende Methode, den Punkt $z = \infty$ der Untersuchung zugänglich zu machen, ist die, dass man die z-Ebene

in der durch Figur 13 pg. 82 dargestellten Art vermöge $Z = \frac{1}{z}$ auf die Z-Ebene abbildet. Hier tritt an Stelle des Punktes $z = \infty$ und seiner Umgebung der Nullpunkt $Z = 0$ und dessen Umgebung. —

Zum Zwecke einer ersten beiläufigen Anwendung der z-Kugel gehen wir nochmals auf die Functionen $Z = \frac{az + b}{cz + d}$ zurück und machen die Kugel zugleich zur Trägerin der Werte von z wie von Z. Es gilt alsdann der Satz, *dass die einzelne lineare Function eine solche Transformation der Kugel in sich liefert, die durch eine bestimmte „Collineation" des ganzen Raumes hergestellt werden kann.*

Es wird genügen, diesen Satz für diejenigen besonderen Functionen zu beweisen, durch deren Combination wir nach pg. 83 jede lineare Function bilden können. Dabei kann man überdies noch die Function $Z = z + b$ in die beiden zerlegen $Z = z + b_1$ und $Z = z + ib_2$ mit reellen b_1, b_2. Die beiden letzteren Functionen verhalten sich hier ganz analog, so dass es genügt, etwa nur die erste unter ihnen zu betrachten. Demnach handelt es sich um folgende vier Functionen:

$$1)\ Z = z + b_1,\quad 2)\ Z = e^{\alpha i} z,\quad 3)\ Z = \varkappa z,\quad 4)\ Z = \frac{1}{z}\cdot$$

Vermöge der Formeln (2) und (3) findet man ohne Mühe, dass die ihnen entsprechenden Transformationen der z-Kugel in sich durch folgende vier Raumcollineationen bewirkt werden können:

$$(1)\quad \begin{gathered} \Xi : H : Z : 1 = (\xi + b_1 \zeta + b_1) : \eta : \\ \left(-b_1 \xi + \left(1 - \tfrac{1}{2} b_1^2\right)\zeta - \tfrac{1}{2} b_1^2\right) : \left(b_1 \xi + \tfrac{1}{2} b_1^2 \zeta + 1 + \tfrac{1}{2} b_1^2\right), \end{gathered}$$

$$(2)\quad \Xi : H : Z : 1 = (\xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha) : (\xi \sin\alpha + \eta\cos\alpha) : \zeta : 1,$$

$$(3)\quad \Xi : H : Z : 1 = \xi : \eta : \left(\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa}\zeta + \frac{1-\varkappa^2}{2\varkappa}\right) : \left(\frac{1-\varkappa^2}{2\varkappa}\zeta + \frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa}\right),$$

$$(4)\quad \Xi : H : Z : 1 = \xi : -\eta : -\zeta : 1.$$

Hier haben wir es in der That mit lauter Collineationen des Raumes zu thun. Dass dabei in jedem Falle unsere Kugeloberfläche in sich selbst transformiert wird, kann man leicht auch durch Rechnung bestätigen; man wird nämlich die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0$ bei allen vier Transformationen ohne Mühe in $\Xi^2 + H^2 + Z^2 - 1 \doteq 0$ überführen. Da übrigens bei der einzelnen Collineation ein *ebener* Schnitt der Kugel (d. i. ein Kreis) stets wieder in einen solchen übergeht, so erkennt man von hieraus aufs neue den Charakter der *„Kreisverwandtschaften"* an den durch lineare Functionen gelieferten Abbildungen der z-Kugel auf sich selbst.

§ 3. Die Function $Z = z^2$.

Die Function $Z = z^2$ liefert unter Trennung des reellen von dem imaginären Bestandteile:

(1) $$X = x^2 - y^2, \quad Y = 2xy.$$

Um die hierdurch dargestellte Beziehung der z-Ebene zur Z-Ebene graphisch zu versinnlichen, versehen wir die Z-Ebene mit einer Einteilung in Quadrate, wie in Figur 15 rechter Hand zu sehen ist; zwei benachbarte Gerade sollen hierbei jeweils den Abstand 1 haben, so dass die zur Y-Axe parallelen Geraden die Gleichungen $X = 0$, $X = \pm 1$, $X = \pm 2, \cdots$ bekommen. Zufolge (1) liefern diese Geraden in der z-Ebene ein System gleichseitiger Hyperbeln, welche die Winkelhalbierenden der Coordinatenaxen zu Asymptoten besitzen, und deren Hauptaxen $2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 4, 2\sqrt{5}, \cdots$ teils auf der x-Axe, teils auf der y-Axe lagern. Die zur X-Axe parallelen Geraden liefern ein ebenso gebautes System von Hyperbeln, welche aus jenen vermöge einer Drehung der z-Ebene um den Nullpunkt durch einen Winkel von 45^0 hervorgehen.

Die hiermit entspringende Beziehung zwischen den Ebenen der Variabelen z und Z bietet den in Figur 15 angedeuteten Anblick dar,

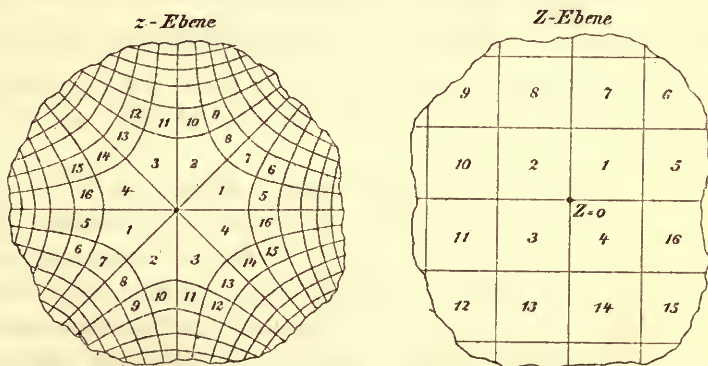


Fig. 15.

wobei einander zugeordnete Vierecke durch die gleichen Nummern ausgezeichnet sind.

Man bemerkt, dass jetzt jedem Viereck der Z-Ebene *zwei* Vierecke der z-Ebene entsprechen. *In der That handelt es sich hier um eine zwei-eindeutige Beziehung zwischen den Ebenen von z und Z.* Dem einzelnen Werte z entspricht stets nur ein Wert $Z = z^2$; dagegen

liefert der einzelne Punkt Z stets zwei Punkte $z = \pm\sqrt{Z}$, welche getrennt liegen, falls nicht einer der beiden Werte $Z = 0$ oder $Z = \infty$ vorliegt.

Es ist weiter vor allem festzustellen, *dass die in Rede stehende Abbildung der z-Ebene auf die Z-Ebene eine conforme ist.* In der That lässt sich zeigen, dass diese Abbildung eine „in den kleinsten Teilen ähnliche" ist. Ein nicht gerade bei $z = 0$ oder $z = \infty$ gelegenes Bogenelement ds der z-Ebene bilde sich auf das Element dS der Z-Ebene ab. Aus (1) berechnet man dann:

$$(2) \qquad dS = 2r\,ds \quad \text{oder} \quad \frac{dS}{ds} = 2r,$$

wo, wie bisher, $r = |z|$ ist. Das Wichtige ist, dass das Verhältnis $\frac{dS}{ds}$ allein von der Entfernung des Elementes ds vom Nullpunkt der z-Ebene abhängt, *dagegen von der Richtung dieses Elementes gänzlich unabhängig ist.* Ein in der Entfernung r vom Nullpunkte gelegenes unendlich kleines Dreieck der z-Ebene überträgt sich hiernach in ein ihm ähnliches und also conformes (gleichwinkliges) Dreieck der Z-Ebene. Dabei giebt der Quotient $\frac{dS}{ds}$, im vorliegenden Falle $2r$, das „*Vergrösserungsverhältnis*" der conformen Abbildung an. Direct congruent werden in unserem Falle diejenigen unendlich kleinen Figuren übertragen, welche den Abstand $\frac{1}{2}$ vom Nullpunkte $z = 0$ haben. Dass für die weiter aussen liegenden Teile der z-Ebene das Vergrösserungsverhältnis proportional mit r wächst, wird der Anblick von Figur 15 bestätigen.

Für $z = 0$ wird das Vergrösserungsverhältnis zu 0, für $z = \infty$ aber zu ∞. Diese beiden Stellen wollen wir als „*irreguläre Punkte*" der vorliegenden Abbildung bez. der betrachteten Function bezeichnen. Der Begriff der irregulären Punkte einer Function wird übrigens später noch wesentlich erweitert. Gegenwärtig überzeuge man sich, *dass in den genannten irregulären Punkten die Abbildung aufhört, conform zu sein.* Beschreibt man in der z-Ebene um den Nullpunkt einen kleinen Kreis, so läuft derselbe durch acht Vierecke 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4 hindurch. Sein Abbild in der Z-Ebene wird *doppelt* um den Nullpunkt herumlaufen. *In der That werden ganz allgemein die Winkel der z-Ebene mit dem Nullpunkt als Scheitelpunkt auf Winkel der doppelten Grösse in der Z-Ebene abgebildet.* Dies geht unmittelbar aus der „Polardarstellung" $Re^{\Theta i} = r^2 e^{2\vartheta i}$ unserer Function hervor, insofern wir hieraus $\Theta = 2\vartheta$ ablesen. Vom anderen irregulären Punkte

$z = \infty$ gelten die gleichen Bemerkungen. Setzt man nämlich, um diesen Punkt in beiden Ebenen zugänglich zu machen, $z' = \frac{1}{z}$, $Z' = \frac{1}{Z}$, so wird $Z' = z'^2$. —

Durchschneidet man die z-Ebene längs der reellen Axe, so zerfällt sie in zwei sogen. „*Halbebenen*", welche wir als „*positive*" und „*negative*" Halbebene unterscheiden wollen je nach dem Vorzeichen der imaginären Bestandteile der zugehörigen Werte z. Die einzelne Halbebene ist auf die Z-Ebene ein-eindeutig bezogen, wenn wir davon absehen, dass je zwei Randpunkte $+x$ und $-x$ der Halbebene einen und denselben Punkt $Z = x^2$ liefern. Es ist nun sehr nützlich, sich die ein-eindeutige Beziehung der einzelnen Halbebene auf die Z-Ebene dadurch zu versinnlichen, dass man eine *mechanische Überführung* der Halbebene in die Z-Ebene vornimmt. Wie man dies ausführen kann, deutet Figur 16 für die positive Halbebene an. Man denke die letztere

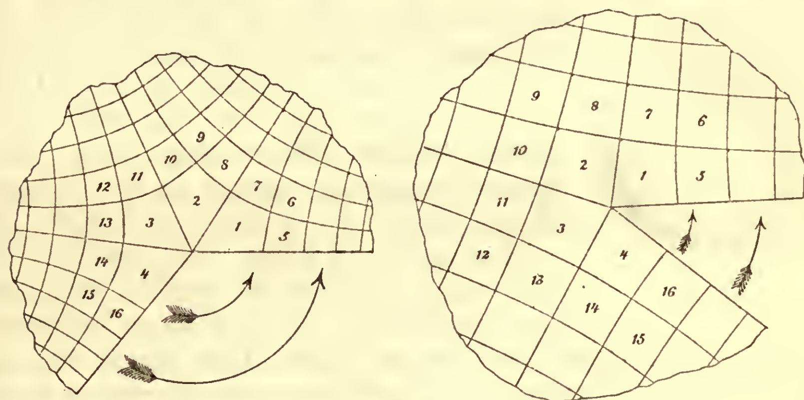


Fig. 16.

als ein dehnbares Blatt und drehe die negative reelle Axe, wie die Pfeile andeuten, um den Nullpunkt herum, bis sie die positive reelle Axe erreicht. Hierbei muss das Blatt im übrigen solche Dehnungen bez. Zusammenziehungen erfahren, dass schliesslich jeder Punkt seine richtige Stelle der Z-Ebene erreicht.

In entsprechender Weise kann man mit der negativen Halbebene verfahren. Äusserst wichtig aber ist, dass wir unter Wiederanknüpfung an die volle z-Ebene beide Umformungen zugleich vornehmen. Wir denken uns zu diesem Zwecke die z-Ebene nur längs der negativen reellen Axe durchschnitten und führen sodann die eben getrennt gedachten Umgestaltungen der Halbebenen zu gleicher Zeit aus, wobei

sich unsere dehnbare Lamelle, wie Figur 17 für die Umgebung des Nullpunktes zeigt, über sich selbst hinüberziehen wird. Am Schlusse liegen die beiden Schnittränder zu verschiedenen Seiten unserer Lamelle längs der positiven reellen Axe über einander. Denken wir gleichwohl beide

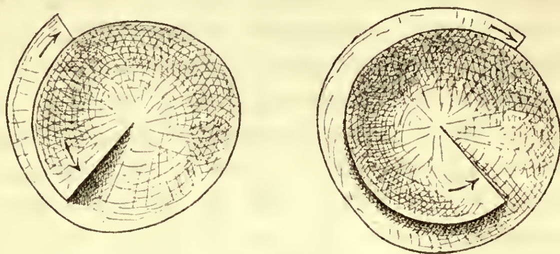


Fig. 17.

Ränder jetzt wieder an einander geheftet, so muss man sich vorstellen, dass sich die Lamelle längs der ganzen positiven reellen Axe selbst durchschneidet. Figur 18 soll dies wieder für die nächste Umgebung des Nullpunktes andeuten.

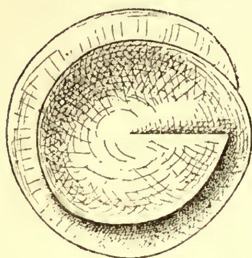


Fig. 18.

Wir haben die z-Ebene in dieser Weise in eine doppelt oder, wie man sagt, „*zweiblättrig*“ bedeckte Z-Ebene umgewandelt. Diese letztere Sprechweise erinnert an eine indirecte Herstellungsart des gewonnenen Abbildes der z-Ebene auf die Z-Ebene. Man kann dies Abbild nämlich in der Weise entstehen lasen, dass man zunächst zwei je die Z-Ebene darstellende unendlich dünne Blätter auf einander lagert. Beide Blätter sind alsdann an den beiden Stellen $Z = 0$ und $Z = \infty$ an einander zu heften, so dass sie, wie man sagt, an diesen Stellen „*mit einander verzweigt*“ erscheinen. Zwischen beiden Punkten, den „*Verzweigungspunkten*“, sind beide Blätter sodann längs der ganzen positiven reellen Z-Axe zu durchschneiden, worauf man die Schnittränder, um unser obiges Bild der z-Ebene zu gewinnen, jetzt noch über Kreuz wieder an einander zu heften hat. Beide Blätter liefern nunmehr ein einziges zusammenhängendes Gebilde, welches längs der positiven reellen Z-Axe, des sogen. „*Verzweigungsschnittes*“, sich selbst durchsetzt. Um von irgend einem Punkte unseres Gebildes zu dem darüber (resp. darunter) gelegenen Punkte zu gelangen, muss man von jenem Punkte aus einen Umlauf um den Verzweigungspunkt $Z = 0$ ausführen. Man wird dies mit Hilfe von Figur 19 leicht verstehen; es ist daselbst der im unteren Blatte verlaufende Weg, insoweit er durch das obere Blatt verdeckt ist, punktiert angedeutet.

Riemann ist es gewesen, welcher zuerst mit mehrblättrig überdeckten Ebenen der fraglichen Art den Verlauf mehrdeutiger Functionen versinnlichte. Wir werden sagen, *es handele sich im vorliegenden Falle um die zur zweideutigen Function $z = \sqrt{Z}$ gehörende „zweiblättrige Riemann'sche Fläche" über der Z-Ebene.* Die Thatsache, dass wir diese Fläche allererst als eindeutiges Abbild der z-Ebene einführten, können wir nämlich jetzt hinterher auch so ausdrücken, *dass die Function $\sqrt{Z}$ auf der zweiblättrigen Fläche eindeutig sei, oder dass dem einzelnen Punkte dieser Fläche ein bestimmter Functionswert $\sqrt{Z}$ zukomme.* Der Übergang vom einzelnen Werte $\sqrt{Z}$ der Function zu $-\sqrt{Z}$ kommt dann gerade auf den oben beschriebenen Umlauf um den Verzweigungspunkt $Z = 0$ hinaus, d. h. auf den Fortgang aus dem einen Blatte der Fläche in das andere. Diese Sachlage ist in voller Übereinstimmung mit der Polardarstellung unserer Function:

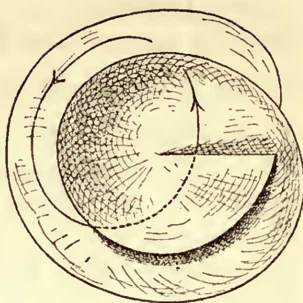


Fig. 19.

$$\sqrt{Z} = \sqrt{R} \cdot e^{\frac{1}{2}\Theta i};$$

denn wenn man hier, etwa bei festgehaltenem R, die Amplitude Θ um 2π wachsen lässt, so wird der Endwert der Function dem Anfangswerte gerade genau entgegengesetzt sein.

Aufgabe. Man untersuche die durch $Z = z^2$ vermittelte Abbildung in der Art, dass man die z-Ebene durch zwei zu den Axen parallele Geradenbüschel in Quadrate teilt und deren Abbilder in der Z-Ebene aufsucht. Man wird daselbst auf zwei gegen einander orthogonale Scharen von Parabeln geführt werden, welche den Nullpunkt zum gemeinsamen Brennpunkt haben.

§ 4. **Die Function** $Z = \frac{1 + z^2}{2z}$.

Die rationale Function zweiten Grades:

$$(1) \qquad Z = \frac{1 + z^2}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

legt eine ein-zweideutige Beziehung zwischen den Ebenen der Variabelen z und Z fest; und zwar entsprechen offenbar dem einzelnen Punkte der Z-Ebene je zwei Punkte z. Des näheren liest man aus der rechten Seite von (1) sofort ab, dass die beiden dem einzelnen Z entsprechenden Werte z, z' in der Beziehung $z' = \frac{1}{z}$ stehen. Die durch $z' = \frac{1}{z}$ dar-

gestellte Beziehung der z-Ebene auf sich selbst wurde in § 1 unter II behandelt und liess sich aus der Inversion am Einheitskreise combiniert mit der Spiegelung an der reellen Axe herstellen. Deuten wir $z' = \frac{1}{z}$ als Transformation der z-Ebene in sich, so wird durch dieselbe das Innere des Einheitskreises in das Äussere desselben transformiert und umgekehrt. *Das Innere des Einheitskreises (und ebenso der ausserhalb desselben liegende Teil der z-Ebene) ist hiernach durch unsere Function ein-eindeutig auf die Z-Ebene bezogen;* nur bilden die Punkte des Einheitskreises selbst eine leicht näher zu beschreibende Ausnahme der Eindeutigkeit.

Diese Sachlage giebt Anlass, für z die Polarstellung $re^{\vartheta i}$ heranzuziehen und dementsprechend die z-Ebene vermöge eines Systems von Geraden durch den Nullpunkt sowie eines Systems concentrischer Kreise um diesen Punkt einzuteilen, wie in Figur 20a ausgeführt ist.

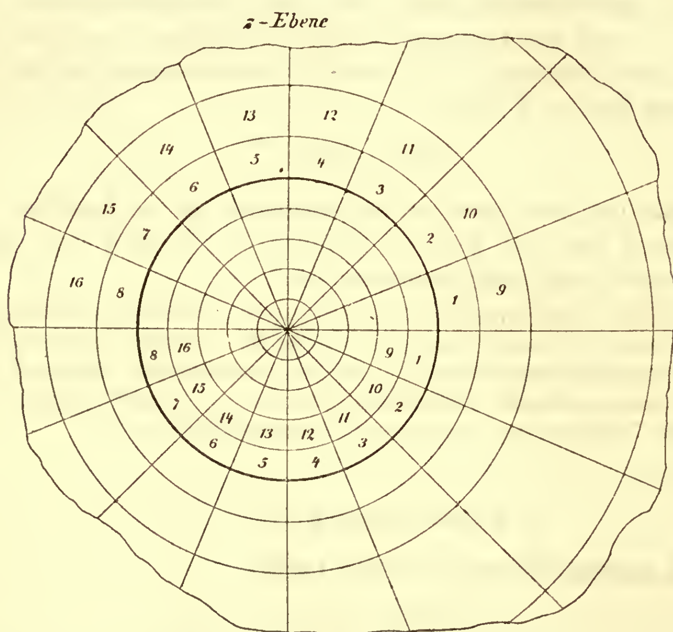


Fig. 20a.

Der Einheitskreis ist hier stärker markiert, und ausserhalb sind diejenigen Kreise ausgezogen, welche aus den innen gezeichneten Kreisen durch die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ hervorgehen. Dies hat zur Folge, dass die Einteilung des Inneren vom Einheitskreise sich in der

Z-Ebene in genau derselben Art abbilden wird, wie die Vierecksteilung ausserhalb des Einheitskreises der z-Ebene.

Um diese Abbildung wirklich zu gewinnen, setzen wir wie bisher $Z = X + iY$, $z = re^{\vartheta i}$ und finden:

$$X = \frac{r^2+1}{2r}\cos\vartheta, \qquad Y = \frac{r^2-1}{2r}\sin\vartheta.$$

Hieraus berechnet man sofort weiter:

(2) $$\left(\frac{X}{\cos\vartheta}\right)^2 - \left(\frac{Y}{\sin\vartheta}\right)^2 = 1,$$

(3) $$\left(\frac{X}{\frac{r^2+1}{2r}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\frac{r^2-1}{2r}}\right)^2 = 1.$$

Die in der z-Ebene gelegenen Geraden $\vartheta =$ Const. und Kreise $r =$ Const. liefern hiernach in der Z-Ebene ein System confocaler Hyperbeln und Ellipsen, wie sie durch (2) *und* (3) *dargestellt sind.* Diese Verhältnisse sind in Figur 20b illustriert, wobei wieder von dem Mittel der Nume-

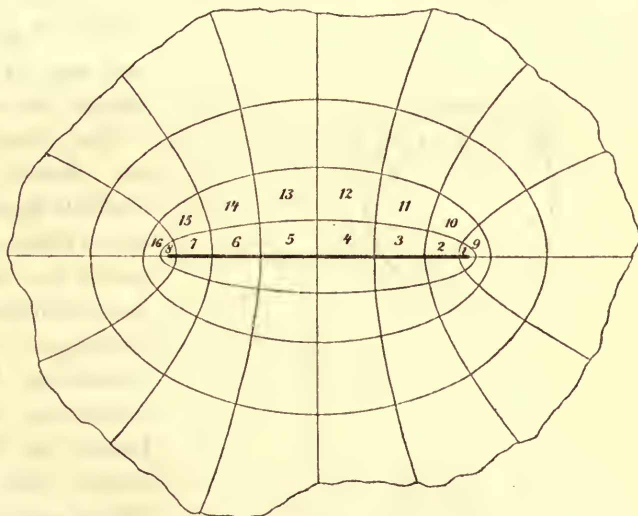


Fig. 20b.

rierung einiger Vierecke Gebrauch gemacht ist, um die Beziehung der z-Ebene auf die Z-Ebene recht anschaulich zu gestalten. Der Zweideutigkeit dieser Beziehung entsprechend tragen in der z-Ebene immer je zwei Vierecke die gleiche Nummer.

Man constatiert wieder leicht, dass der Quotient $\frac{dS}{ds}$ zweier entsprechenden Bogenelemente allein von der Lage, aber nicht von der

Richtung des Elementes ds abhängt; jener Quotient ist nämlich gleich der Hälfte des absoluten Betrages von $\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$. *Es handelt sich hier um eine conforme Abbildung, wobei das Vergrösserungsverhältnis, abgesehen von den Punkten $z=0$, $z=\pm 1$, stets endlich und von 0 verschieden ist.*

Von den drei eben zuletzt genannten „irregulären" Punkten unserer Function ist nun zunächst zu bemerken, dass bei $z=0$ die Abbildung keineswegs aufhört conform zu sein. Da hier $Z=\infty$ wird, setzen wir $Z'=\frac{1}{Z}$ und finden in der nächsten Umgebung von $z=0$ näherungsweise $Z'=2z$, woraus die Behauptung hervorgeht. *Dagegen findet für die Winkel mit den Scheitelpunkten $z=\pm 1$ bei Fortgang zur Z-Ebene Verdoppelung statt.* So hat man z. B. für den Punkt $z=1$ die Gleichung $Z-1=\frac{(z-1)^2}{2z}$ zu benutzen. Führt man in beiden Ebenen Polarcoordinaten mit den Polen in $z=1$ bez. $Z=1$ ein, indem man:

$$z-1=r_1 e^{\vartheta_1 i},\quad Z-1=R_1 e^{\Theta_1 i}$$

setzt, so folgt für die nächste Umgebung von $z=1$ die Relation:

$$R_1 e^{\Theta_1 i}=\frac{1}{2}r_1^2\cdot e^{2\vartheta_1 i},$$

und also ist, wie behauptet, $\Theta_1=2\vartheta_1$.

Auch hier können wir durch „mechanische Deformationen" der z-Ebene den Charakter der vorliegenden Abbildung noch lebendiger zur Anschauung bringen. Schneiden wir das Innere des Einheitskreises aus der z-Ebene aus, so ist der ausserhalb dieses Kreises gelegene Rest der z-Ebene eindeutig auf die Z-Ebene bezogen. Man denke nun, wie dies in den Figuren 21a und 21b zum Ausdruck kommt, unter

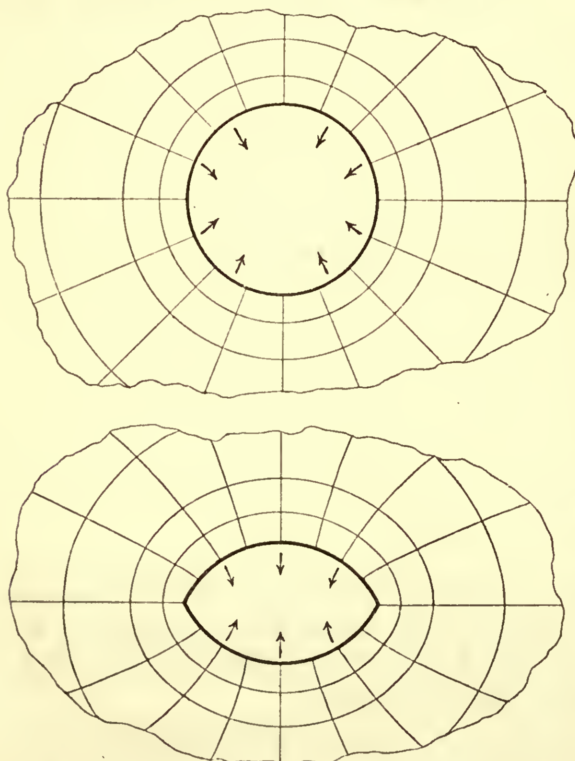


Fig. 21 a.

Festhaltung der beiden Punkte $z = \pm 1$ die beiden durch diese Punkte getrennten Hälften des Einheitskreises zusammengebogen, wobei die übrigen Teile der z-Ebene derartige Umgestaltungen erfahren müssen, dass aus den Geraden ϑ = Const. und Kreisen r = Const. der ursprünglichen Figur schliesslich die confocalen Hyperbeln und Ellipsen der Z-Ebene hervorgehen.

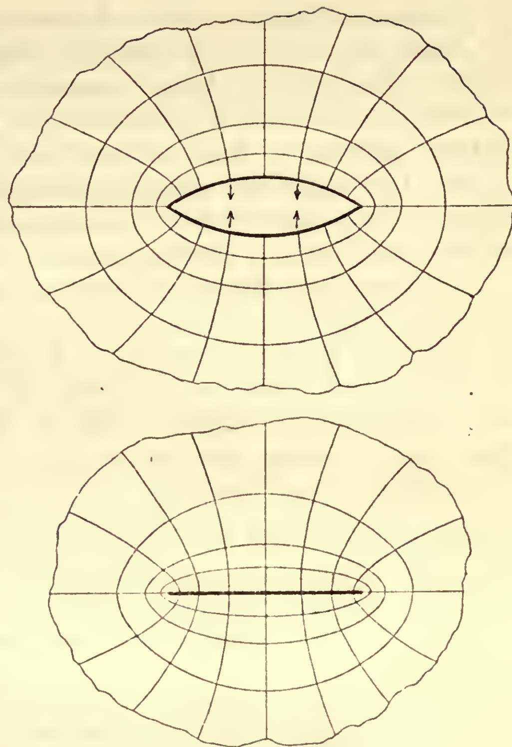


Fig. 21 b.

Nicht viel schwieriger, aber etwas umständlicher zu beschreiben ist die entsprechende stetige Umformung des Innern vom Einheitskreise der z-Ebene in die Z-Ebene. Vor allem aber ist wichtig, dass wir wieder beide Umformungen zugleich vorgenommen denken, indem wir nur eine der beiden von $z = -1$ bis $z = +1$ führenden Hälften des Einheitskreises zerschnitten denken. Am Schlusse der Umformung werden die Schnittränder längs des zwischen $Z = +1$ und $Z = -1$ liegenden Teiles der reellen Z-Axe übereinander liegen. Indem wir sie aneinander heften, entspringt *eine geschlossene zweiblättrige Riemann'sche Fläche über der Z-Ebene als eindeutiges Abbild der z-Ebene.* Diese Fläche wird zwei „Verzweigungspunkte“, nämlich bei $Z = \pm 1$, darbieten; und der zwischen beiden verlaufende Teil der reellen Z-Axe fungiert als „Verzweigungsschnitt“. Man wolle sich diese Angaben mit Hilfe der Figuren 21 und 22

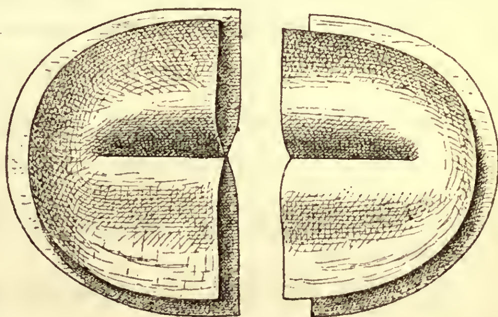


Fig. 22.

im einzelnen deutlich machen. Speciell in der letzteren Figur sind die beiden die Z-Ebene bedeckenden Blätter, welche wir in der definierten Riemann'schen Fläche unendlich dicht auf einander lagernd zu denken haben, zur Kenntlichmachung ihres Zusammenhanges aus einander getrieben. Auch ist die hier zur Darstellung kommende nächste Umgebung des Verzweigungsschnittes längs der imaginären Z-Axe durchschnitten, worauf die beiden entspringenden symmetrischen Hälften ein wenig aus einander gerückt wurden.

Das gewonnene Ergebnis können wir auch dahin aussprechen, *dass wir es hier mit der zur „zweideutigen" Function z von Z gehörenden „zweiblättrigen Riemann'schen Fläche" zu thun haben.* Die beiden zum einzelnen Z gehörenden Functionswerte z sind alsdann immer auf die beiden Blätter dieser Fläche verteilt, so dass z in jedem Punkte der Fläche eine eindeutig bestimmte Function ist.

Aufgabe 1. Man untersuche, wie sich die zu den Axen der z-Ebene parallelen Geraden durch $Z = \frac{z^2+1}{2z}$ in der Z-Ebene abbilden, und wie sich insbesondere diejenigen unter diesen Geraden, welche den Einheitskreis schneiden, durch die beiden Blätter der besprochenen Riemann'schen Fläche hindurchziehen.

Aufgabe 2. Man behandele nach den bisherigen Methoden die Function $Z = \sqrt{1-z^2}$.

Aufgabe 3. Der geometrische Ort aller Punkte z, für welche das Vergrösserungsverhältnis einer conformen Abbildung gleich 1 ist, liefert eine Curve, welche bei der Abbildung ihre Bogenlänge bewahrt. Man bestimme diese Curve für die im vorliegenden Paragraphen behandelte Abbildung.

§ 5. Die Exponentialfunction und die hyperbolischen Functionen.

I. Die Exponentialfunction $Z = e^z$ pflegt man für eine beliebige complexe Variabele z durch Angabe ihrer Potenzreihenentwicklung zu definieren. Sieht man indessen die Euler'schen Gleichungen zwischen der Exponentialfunction und den trigonometrischen Functionen, sowie andrerseits diese Functionen für reelle Argumente als bekannt an, so kann man e^z für complexes z auch durch:

$$(1)\qquad Z = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

definieren. An letztere Gleichung, die wir noch in:

$$(2)\qquad X = e^x \cos y, \qquad Y = e^x \sin y$$

spalten, knüpfen wir zum Studium der Abbildung der z-Ebene auf die Z-Ebene an.

Vor allem schliessen wir aus den Gleichungen (2) auf:

$$(3)\qquad X^2 + Y^2 = e^{2x}, \qquad Y = X \cdot \operatorname{tg} y.$$

Die zur reellen Axe der z-Ebene parallelen Geraden übertragen sich auf das Geradenbüschel durch den Nullpunkt $Z = 0$; die zur imaginären z-Axe parallelen Geraden liefern das System aller concentrischen Kreise um $Z = 0$.

Die Function e^z hat die „*Periode*“ $2i\pi$, d. h. vermehrt man das Argument z um ein beliebiges ganzzahliges Multiplum von $2i\pi$, so bleibt der Functionswert unverändert:

$$e^{z+2m\pi i} = e^z. \tag{4}$$

Man ziehe daraufhin in der z-Ebene durch die Punkte $z = \pm i\pi$, $\pm 3i\pi$, $\pm 5i\pi, \cdots$ Parallele zur reellen Axe und teile diese Ebene dadurch in lauter zur reellen Axe parallel gelegene Streifen der Breite 2π. *Homologe Punkte dieser Streifen werden dann stets gleiche Functionswerte $Z = e^z$ liefern.*

Man bilde nun zunächst nur erst einen einzelnen solchen Streifen, z. B. denjenigen, welcher die reelle z-Axe zur Symmetrielinie hat, auf die Z-Ebene ab. Durch leichte Einzeldiscussion der hierbei in Betracht

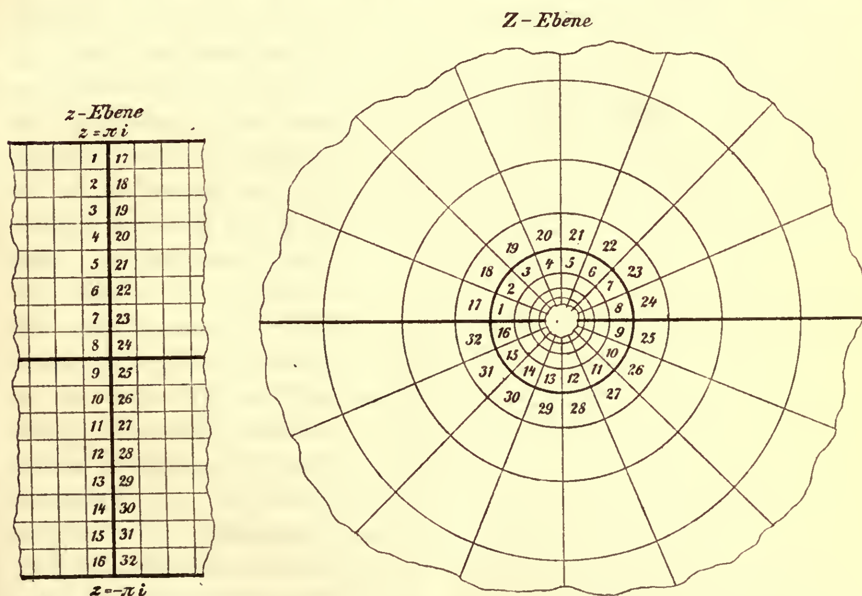


Fig. 23.

kommenden Werte x, y findet man das fundamentale Ergebnis: *Das Abbild jenes Streifens bedeckt die Z-Ebene gerade einfach und vollständig.* Zur Veranschaulichung dieses Theorems dient zunächst Figur 23. Vom Parallelstreifen der z-Ebene ist hier nur die nächste Umgebung der imaginären z-Axe gezeichnet; man muss die Figur sowohl nach rechts

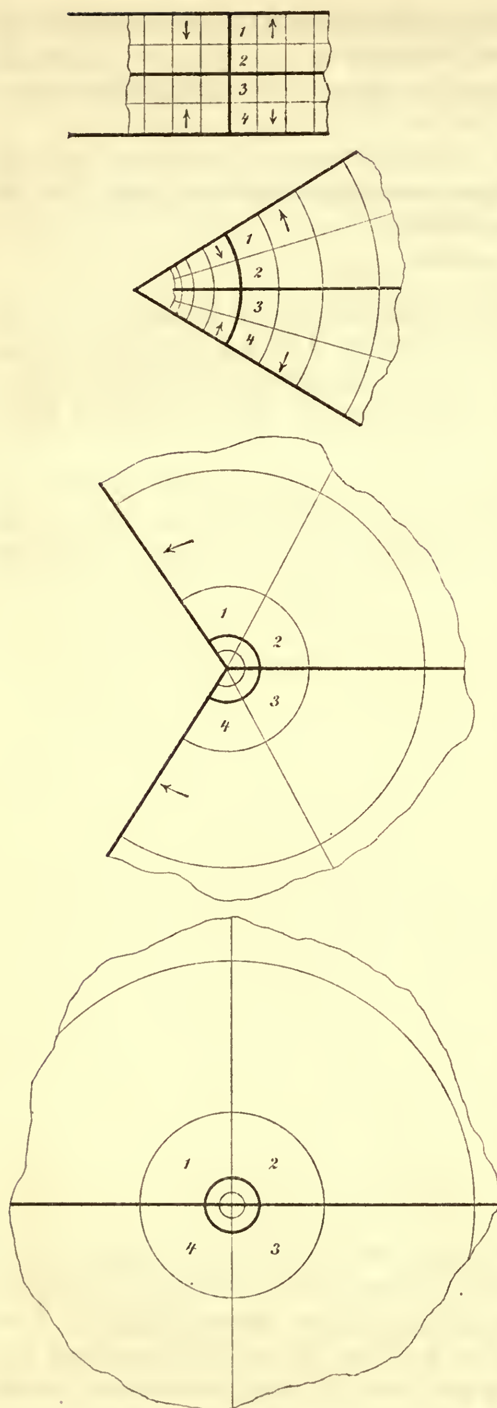


Fig. 24.

wie nach links ins Unendliche fortgesetzt denken. Das dem Streifen angehörende Stück der imaginären z-Axe bildet sich auf den Einheitskreis der Z-Ebene eindeutig ab; nur liefern die beiden Endpunkte $\pm \pi i$ jener Strecke den gleichen Punkt $Z = -1$. Die links von der imaginären z-Axe liegende Hälfte des Streifens liefert in der Z-Ebene das Innere des Einheitskreises, die rechts liegende Hälfte aber das Äussere. Die Nummern der einander correspondierenden Vierecke veranschaulichen dies.

Höchst merkwürdig verhält sich gegenwärtig der „Punkt" $z = \infty$. Nähern wir uns demselben im Innern des Streifens in Richtung der *negativen* reellen z-Axe an, so erhalten wir $Z = 0$ als Abbild des Punktes $z = \infty$; dagegen erhalten wir $Z = \infty$ als Abbild, falls wir in Richtung der *positiven* reellen z-Axe an den Punkt ∞ herangehen. Wir kommen auf das hiermit zu Tage tretende Verhalten der Function e^z bei $z = \infty$ unten zurück.

Will man die Abbildung des Streifens auf die Z-Ebene durch mechanische Überführung des ersteren

in die letztere darstellen, so hat man hierbei in der Weise zu verfahren, wie Figur 24 (pg. 98) andeutet. Es geht dabei die ganze reelle z-Axe in die positive reelle Z-Axe über, während die beiden Ränder des Streifens schliesslich längs der negativen reellen Z-Axe zur Coincidenz kommen.

Dass es sich auch hier wieder um eine *conforme* Abbildung handelt, wurde bislang nicht ausdrücklich hervorgehoben. Aber man schliesst aus (2) ohne Mühe auf die Gleichung $dS = e^x ds$ zwischen zwei correspondierenden Bogendifferentialen, deren Quotient hiernach wieder von der Richtung unabhängig ist. *Die Function $Z = e^z$ vermittelt eine conforme Abbildung der z-Ebene auf die Z-Ebene, und es ist das Vergrösserungsverhältnis dieser Abbildung für alle Punkte der z-Ebene abgesehen von der „irregulären" Stelle $z = \infty$ unserer Function endlich und von 0 verschieden.*

Erst jetzt gehen wir an die Abbildung der gesamten z-Ebene heran. Jeder einzelne der unendlich vielen Streifen von der Breite 2π, in welche wir die z-Ebene zerlegten, wird sich ganz in der eben besprochenen Weise auf ein die ganze Z-Ebene darstellendes Blatt abbilden. Alle diese Blätter denke man nun über einander geschichtet und bewahre ihnen durchaus den Zusammenhang, welchen ihre Originale in der z-Ebene haben. Die Durchlaufung irgend einer zur imaginären z-Axe Parallelen bedeutet dann in der Z-Ebene einen unaufhörlichen kreisförmigen Umlauf um den Nullpunkt, und die Überschreitung der Grenzgeraden zweier Streifen zieht in der Z-Ebene den Übergang über die negative reelle Axe aus einem Blatte in das nächstfolgende nach sich. *Das Abbild der ganzen z-Ebene ist eine unendlichvielblättrige Riemann'sche Fläche, welche die Gestalt einer Schraubenfläche von unendlich kleiner Ganghöhe hat; alle unendlich vielen Blätter sind in den beiden „Verzweigungspunkten" $Z = 0$ und $Z = \infty$ mit einander verzweigt*), und die zwischen beiden Punkten verlaufende negative reelle Z-Axe stellt den „Verzweigungsschnitt" dar.* Auf der so bezeichneten Fläche ist $z = \log Z$ eindeutig; es handelt sich, kurz gesagt, um die *Riemann'sche Fläche der unendlichvieldeutigen Function* $\log Z$. —

II. Mit e^z nahe verwandt sind die sogen. *„hyperbolischen Functionen".* Wir definieren die *„hyperbolischen" Sinus und Cosinus*, welche symbolisch durch $\sinh z$ und $\cosh z$ bezeichnet werden sollen, für beliebige complexe Argumente z durch die Formeln:

---

*) Dass $Z = \infty$ als Verzweigungspunkt in der That ganz dieselbe Rolle spielt wie $Z = 0$, wird man sich dadurch am besten klar machen, dass man die im Text entwickelten Anschauungen auf die „Z-Kugel" bezieht.

(5) $$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Man leitet daraufhin aus der Function e^z leicht die Grundeigenschaften dieser hyperbolischen Function ab. Wir merken insbesondere die Relation an:

(6) $$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1,$$

derzufolge sich die Functionen $\cosh x$, $\sinh x$ mit *reellen* Argumenten x in derselben Art geometrisch durch die Abscissen und Ordinaten der Punkte einer gleichseitigen „*Hyperbel*“ deuten lassen, wie man die „Kreisfunctionen“ $\cos x$ und $\sin x$ wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ durch die Abscissen und Ordinaten der Punkte eines „Kreises“ deutet.

Die hier weiter zu leistende Aufgabe soll nun die sein, dass wir etwa für die Function $Z = \cosh z$ die Abbildung der z-Ebene auf die Z-Ebene betrachten. Zerlegt man die Gleichung $Z = \cosh z$ in die beiden:

(7) $$Z = \frac{1 + z_1^2}{2 z_1}, \quad z_1 = e^z,$$

so erkennt man, dass die hier zu leistende Abbildung durch Combination der in den Figuren 23 und 20 behandelten Abbildungen entspringt;

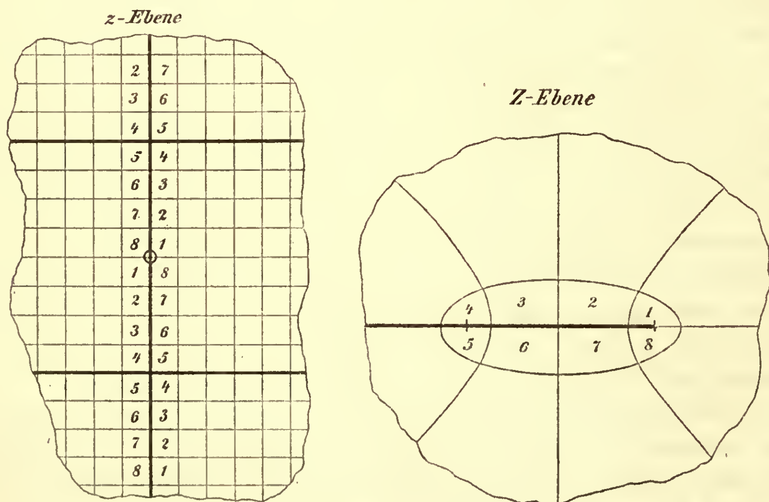


Fig. 25.

man hat nur die Z-Ebene der Figur 23 als Ebene von z_1 anzusehen und diese dann in Figur 20 der z-Ebene zu substituieren. So entspringt die in Figur 25 kurz skizzierte Abbildung, in welcher übrigens

der Deutlichkeit halber die Z-Ebene nach etwas grösserem Massstab als die z-Ebene gezeichnet ist. Man bemerke, *dass hier bereits die einzelne durch die imaginäre Axe abgetrennte Hälfte der bei e^z betrachteten Parallelstreifen der z-Ebene, auf die Z-Ebene abgebildet, dieselbe überall einfach und vollständig bedeckt.* Dass es sich auch hier wieder um eine *conforme* Beziehung zwischen der z-Ebene und der Z-Ebene handelt, wolle man aus dem Umstande entnehmen, dass beide Ebenen auf die durch (7) erklärte z_1-Ebene conform bezogen sind*).

Aufgabe 1. Man untersuche die irregulären Punkte der Function $\cosh z$ und verfolge die unendlichvielblättrige Riemann'sche Fläche, auf welche sich die ganze z-Ebene über der Z-Ebene abbildet.

Aufgabe 2. Man stelle die Beziehungen zwischen den hyperbolischen Functionen $\sinh z$ und $\cosh z$ und den trigonometrischen $\sin z$ und $\cos z$ fest und veranschauliche sich daraufhin die durch $Z = \cos z$ vermittelte Abbildung.

Aufgabe 3. Man definiere die Functionen $\operatorname{tgh} z$ und $\operatorname{ctgh} z$ durch:

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

und berechne die Ableitungen der Functionen $\sinh z, \cdots, \operatorname{ctgh} z$.

§ 6. Allgemeiner Begriff der analytischen Functionen eines complexen Argumentes z.

Durch Verallgemeinerung der bisher gesammelten Erfahrungen gelangen wir zum allgemeinen Begriffe der *„analytischen Function einer complexen Variabelen"*.

Die unabhängige complexe Variabele heisse wie bisher $z = x + iy$. Es soll erklärt werden, wann eine zweite von z abhängende complexe Grösse $Z = X + iY$ eine „analytische Function von z" heissen soll. Wenn, wie schon angedeutet, X der reelle und iY der imaginäre Bestandteil von Z ist, so würden X und Y reelle (d. i. nur reelle Werte besitzende) Functionen der beiden unabhängigen reellen Variabelen x, y sein. Wir schreiben in diesem Sinne gelegentlich $X(x, y)$, $Y(x, y)$ und nennen diese reellen Functionen auch wohl zusammenfassend die *„Componenten"* der Function Z.

Das erste Kennzeichen einer analytischen Function soll nun dasjenige der *Stetigkeit* sein. Wir fordern, *dass die Differenz:*

$$X(x + \xi, y + \eta) - X(x, y),$$

sowie die entsprechend für Y zu bildende Differenz, den Wert 0 zur Grenze hat, falls bei feststehenden x, y die Grössen ξ, η sich gleichzeitig

*) Weitere Beispiele conformer Abbildungen findet man bei Holzmüller, *„Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften etc."* (Leipzig, 1882).

in irgend einer Art der Null ohne Ende annähern. Braucht man $Z = f(z)$ als Bezeichnung der Function, so kann man auch sagen, $f(z + \zeta) - f(z)$ müsse ohne Ende klein werden, falls ζ als complexe Grösse (d. i. falls der absolute Betrag von ζ bei willkürlich bleibender Amplitude) unendlich klein wird.

Zwar würde es unstatthaft sein, wenn wir diese und ähnliche Forderungen als für *alle* Werte z ausnahmslos gültig ansehen. In den obigen Beispielen lernten wir bereits sogen. *„irreguläre“* Punkte der Functionen kennen, in denen die Abbildung aufhörte conform zu sein, und in deren nächster Umgebung die Function oder ihre inverse Function nicht mehr eindeutig war. Wir bezeichnen als irregulär auch diejenigen Punkte z, in denen eine Function unendlich und also unstetig wird, sowie überhaupt alle diejenigen Punkte, in denen das sonst gewöhnliche oder „reguläre“ Verhalten der Function eine Ausnahme erleidet. Solche irreguläre Punkte werden wir bei der einzelnen Function $f(z)$ in beliebiger Menge zulassen; ja es giebt Functionen, bei denen sogar ganze Linien existieren, auf welchen jeder Punkt ein irregulärer für die Function ist.

Um nun bei unseren Definitionen den hierin liegenden Umständlichkeiten zu entgehen, sollen sich diese Definitionen nicht sogleich auf die gesamte z-Ebene, sondern nur erst auf einzelne Teile derselben beziehen, in denen, wie wir sagen werden, *die Function sich „regulär“ verhält.* Einen einzelnen solchen Teil, den wir für gewöhnlich als *ein zusammenhängendes Stück* der z-Ebene gezeichnet denken, nennen wir einen *„Bereich“ B.* Derselbe wird von einer oder vielleicht auch von mehreren je für sich geschlossenen und von einander getrennt liegenden *„Randcurven“* begrenzt sein; so hat z. B. der hierneben in Figur 26 gezeichnete Bereich drei Randcurven. Hat der Bereich insgesamt n getrennt liegende Randcurven, so bezeichnen wir ihn mit Riemann sachgemäss als einen *„n-fach zusammenhängenden“* und setzen, wo es wünschenswert ist, den *„Grad“ n* des Zusammenhanges als unteren Index der Bezeichnung B hinzu. Es würde sich also in Figur 26 um einen dreifach zusammenhängenden Bereich B_3 handeln. Damit übrigens der Punkt $z = \infty$ keinerlei Umständlichkeiten hervorruft (sofern er einem Bereiche angehört), wird man gut thun, sich die Bereiche auf der *„z-Kugel“* gelegen zu denken.

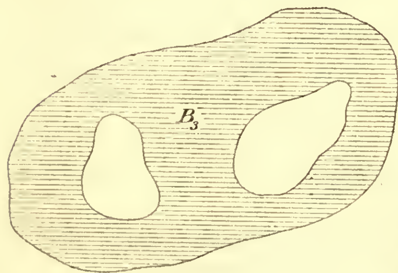


Fig. 26.

Auch bei etwaigen *mehrdeutigen* Functionen leistet der Gebrauch begrenzter Bereiche B gute Dienste. In den obigen Beispielen hatten wir, um eine einzelne mehrdeutige Function $f(z)$ zugänglich zu machen, eine zugehörige mehrblättrige Riemann'sche Fläche über der z-Ebene construiert, wobei alsdann jedem einzelnen Punkte der Fläche nur *ein* Functionswert zukam. In einem solchen Falle werden wir den Bereich B zunächst als in einem einzelnen bestimmten Blatte der Fläche gelegen annehmen, um $f(z)$ innerhalb B als *eindeutig* voraussetzen zu können. Unsere zu entwickelnden Principien werden gleichwohl uneingeschränkt auch als Basis für die spätere Untersuchung mehrdeutiger Functionen tauglich sein.

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir aber als principielle Forderung, *dass die Function $Z = f(z)$ einen Bereich B, in welchem sie sich regulär verhält, conform auf die Z-Ebene abbildet.*

Diese Bedingung gestattet eine wichtige analytische Formulierung. Man zeichne innerhalb B ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken a, b, c die Coordinaten (x, y), $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$ mit positiven dx, dy haben. Dieses Dreieck muss sich auf ein ähnliches Dreieck A, B, C der Z-Ebene abbilden (cf. Figur 27). Die Eckpunkte A, B, C aber haben resp. die Coordinaten:

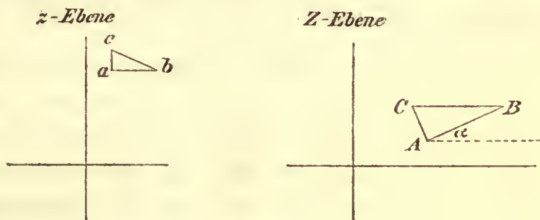


Fig. 27.

$$(X, Y), \quad \left(X + \frac{\partial X}{\partial x} dx, \quad Y + \frac{\partial Y}{\partial x} dx\right), \quad \left(X + \frac{\partial X}{\partial y} dy, \quad Y + \frac{\partial Y}{\partial y} dy\right).$$

Für die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ berechnet man leicht:

$$\overline{AB} = dx\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2}, \quad \overline{AC} = dy\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2}.$$

Da diese Seiten sich aber verhalten sollen wie $dx : dy$, so müssen die hier auftretenden Quadratwurzeln gleich. Wir setzen:

$$(1) \qquad V = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2}$$

und erkennen in V das *„Vergrösserungsverhältnis"* der Abbildung. Der Winkel der von A nach B gerichteten Strecke gegen die positive X-Axe heisse α, und entsprechend bilde die Strecke von A nach C gegen die gleiche Axe den Winkel β. Die beiden fraglichen Dreiecke werden

dann sicher ähnlich sein, wenn noch $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ zutrifft. Aber es gilt:

$$V \cdot \cos\alpha = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad V \cdot \sin\alpha = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad V \cdot \cos\beta = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad V \cdot \sin\beta = \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Die Forderung $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ lässt sich daraufhin vollständig durch die beiden Differentialrelationen ersetzen:

$$(2) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Vor Ausspruch dieses Ergebnisses schicken wir folgende Bemerkung voraus. Die vorstehenden Rechnungen enthalten die stillschweigende Annahme, *dass die Componenten $X(x, y)$, $Y(x, y)$ partielle erste Ableitungen nach x und y innerhalb des Bereiches B besitzen.* Ausserdem aber fordern wir noch, dass sich das Vergrösserungsverhältnis V innerhalb B stetig ändert, was bei den oben betrachteten Abbildungen zutrifft. Dem wird stets Genüge geschehen, *wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$ selber innerhalb des Bereiches B sich stetig ändern.* Diese Annahme soll in der That hinfort in Geltung sein.

Im Anschluss an (2) formulieren wir nun folgenden Grundsatz: *Die im Innern des Bereiches B eindeutige stetige Function $Z = f(z)$, deren Componenten innerhalb des Bereiches stetige erste Ableitungen besitzen, soll ebenda als eine reguläre „analytische" Function bezeichnet werden, falls ihre Componenten die Differentialrelationen* (2) *befriedigen.* Man wolle hierbei nur noch bemerken, dass die Gleichheit der beiden Wurzeln unter (1) eine einfache Folge der Relationen (2) ist.

In gewisser Hinsicht greift der eben ausgesprochene Satz weiter, als die zu ihm führende Überlegung. Ist nämlich Z beständig gleich einer Constanten, so wird man die Stetigkeitsbedingungen als erfüllt ansehen, wennschon sie für diesen Fall oben nicht ausgesprochen wurden. Auch sind die Bedingungen (2) erfüllt. Aber man kann hier nicht mehr von einer conformen Abbildung sprechen. Gleichwohl ist es im Interesse einiger unten aufzustellenden Theoreme nützlich, *auch in dem Falle, dass Z für alle Argumente z einen und denselben Wert besitzt, von einer „Function" Z zu sprechen.*

Um die Bedeutung der Relationen (1) noch in anderer Weise auszusprechen, bilden wir den Differentialquotienten $\frac{df(z)}{dz}$, indem wir dabei dem Differential dz eine beliebige aber bestimmte Amplitude erteilen, oder indem wir, wie man sagen kann, „nach einer bestimmten Richtung differenzieren". Man berechnet für jenen Quotienten explicite:

$$\frac{d(X+iY)}{d(x+iy)} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy\right)}{dx + i\,dy}.$$

Benutzt man jetzt die Relationen (1), so folgt:

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\,dx + i\,\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial x}\,i\,dy - \frac{\partial Y}{\partial x}\,dy}{dx + i\,dy} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Rechter Hand steht hier der in Richtung der positiven reellen Axe genommene Differentialquotient. Die Relationen (2) haben hiernach zur Folge, *dass der Differentialquotient* $\frac{d\,f(z)}{dz}$ *allein von* z, *aber nicht von der Richtung der Differentiation abhängt.* Übrigens bestätigt man leicht, dass der absolute Betrag von $\frac{d\,f(z)}{dz}$ das *Vergrösserungsverhältnis* liefert, während die Amplitude von $\frac{d\,f(z)}{dz}$ die *Richtungsänderung* des Abbildes gegen das Original ist (cf. Winkel α in Figur 27).

Es wird sich später zeigen, dass eine Function da, wo sie regulär ist, auch partielle Ableitungen höherer Ordnung nach x und y besitzt, die von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sind. Nehmen wir diesen Satz als bewiesen an, so folgt aus (2):

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial y\,\partial x},$$

woraus man durch Addition findet:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Die Componente $X(x, y)$ *einer Function* Z (*und ebenso* $Y(x, y)$) *ist hiernach keineswegs eine willkürlich wählbare Function von* x *und* y; *sie genügt vielmehr* (*ebenso wie* Y) *der für zwei unabhängige Variabele angesetzten Laplace'schen Differentialgleichung* 2ter *Ordnung* (3). Oben (pg. 25) hatten wir Gelegenheit, die Potentiale als Integrale der Laplace'schen Differentialgleichung zu betrachten. Von dieser Beziehung rührt der Brauch her, dass man die Componenten X, Y in ihrer Abhängigkeit von x, y auch wohl als „*Potentiale*“ bezeichnet.

Bei den vorstehenden Rechnungen und Überlegungen haben wir z stillschweigend als von ∞ verschieden angenommen. Wir werden aber sofort diese Stelle ∞ miterledigen, indem wir ihre Umgebung vermöge $z' = \frac{1}{z}$ auf die z'-Ebene abbilden und dementsprechend z' als Argument unserer Functionen gelten lassen.

Wir erwähnen hier endlich noch folgenden bei Gelegenheit zur Anwendung kommenden Satz: *Eine reguläre Function von einer regu-*

lären Function des Argumentes z ist selbst in Abhängigkeit von z eine reguläre Function. Man wird sich dies etwa mit Hilfe der in Betracht kommenden Abbildungen leicht deutlich machen.

§ 7. Bewegung einer incompressibelen Flüssigkeit in einer Ebene.

Die entwickelten Ansätze gestatten eine interessante Anwendung auf das Problem, *den stationären Strom einer incompressibelen Flüssigkeit in einer Ebene* zu untersuchen, wobei man sich die Flüssigkeit auch durch *Wärme* oder *Elektricität* ersetzt denken kann.

Da es sich um einen „stationären" Strom handeln soll, so werden die nach den rechtwinkligen Axen x, y genommenen Componenten der Geschwindigkeit von der Zeit t unabhängig sein und also Functionen der Coordinaten x, y allein darstellen. Wir nennen diese Functionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$. Übrigens aber gehen wir von der Annahme der *Existenz eines „Geschwindigkeitspotentials"* $u(x, y)$ aus; diese Voraussetzung besagt, dass die Componenten der Geschwindigkeit ξ, η die partiellen ersten Ableitungen einer und derselben Function $u(x, y)$ sein sollen*):

(1) $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \xi(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \eta(x,y).$$

Das Geschwindigkeitspotential u ist eine sehr bequeme Handhabe zur Beschreibung des stationären Stromes. Die durch die Gleichungen $u =$ Const. gegebenen Curven sind die *„Potentialniveaulinien"*. Die orthogonalen Trajectorien des Büschels der Niveaucurven sind die *„Stromlinien"*, so benannt, weil sie in jedem Punkte die Richtung des Stromes angeben. Gehen wir nämlich auf der einzelnen Niveaulinie vom Punkte (x, y) zum benachbarten Punkte $(x + dx, y + dy)$, so ist wegen $u =$ Const.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \xi\, dx + \eta\, dy = 0.$$

Das Verschwinden von $(\xi dx + \eta dy)$ bedeutet aber, dass das auf der Niveaucurve beschriebene Bogendifferential senkrecht gegen die Richtung der Geschwindigkeit verläuft.

Der Zusammenhang mit den complexen Functionen erhellt nun aus folgender Überlegung. Man denke ein unendlich kleines Dreieck, welches zur Zeit t die Ecken (x, y), $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$ hat, in

---

*) Nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung ist die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials u gesichert, falls die Differentialrelation $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ besteht.

der strömenden Flüssigkeit. Nach Verlauf des Zeitdifferentials dt sei es in das Dreieck der Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) übergegangen; dann hat man explicite:

$$x_1 = x + \xi\,dt, \quad y_1 = y + \eta\,dt$$
$$x_2 = x + dx + \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right) dt \quad y_2 = y + \left(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx\right) dt,$$
$$x_3 = x + \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy\right) dt, \quad y_3 = y + dy + \left(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy\right) dt.$$

Der doppelte Inhalt $2J$ des Dreiecks mit den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ist aber gegeben durch:

$$2J = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix},$$

ein Ausdruck, der sich nach Eintragen der für $x_1, \cdot \cdot$ angegebenen Werte vermöge bekannter Grundregeln der Determinantentheorie auf

$$2J = dx\,dy \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} dt, & \frac{\partial \xi}{\partial y} dt \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} dt, & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} dt \end{vmatrix}$$

zusammenzieht. Bei Vernachlässigung der mit dt^2 als Factor behafteten Glieder finden wir weiter:

$$2J = dxdy \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dt\right].$$

Wegen der Incompressibilität der Flüssigkeit darf jedoch der fragliche Inhalt, der zu Anfang des Zeitelementes dt gleich $\frac{1}{2}\,dxdy$ war, eine Veränderung während der Zeit dt nicht erfahren haben. Der Factor $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$ von dt wird demnach notwendig verschwinden, *so dass zufolge* (1) *das Geschwindigkeitspotential u der Laplace'schen Differentialgleichung genügt:*

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Hiermit ist die Beziehung zu den complexen Functionen offenbar geworden. Legen wir nur Nachdruck auf die Befriedigung der Gleichung (2), so wollen wir sagen, ein beliebiges Integral u derselben liefere eine „theoretisch mögliche" Strömung. *Solche Integrale aber liefern uns die Componenten X, Y jeder analytischen Function Z.* Dabei werden uns die für die Beschreibung der Strömung wichtigen Curvenscharen gerade geliefert, falls wir die zu den Axen der Z-Ebene

parallelen Geraden $X =$ Const. resp. $Y =$ Const. auf die z-Ebene übertragen. Wählen wir $u = X$, so liefern die Curven $Y =$ Const. die Stromlinien und umgekehrt.

Unter diesem physikalischen Gesichtspunkte wolle man die in den ersten Paragraphen besprochenen Beispiele und Figuren erneut in Betracht ziehen. Jede Function Z wird dabei zwei „theoretisch mögliche“ Strömungen liefern.

Übrigens erwähnen wir noch, dass im Falle der Wärmeströmung die Function $u(x, y)$ die Bedeutung der *Temperatur* an der Stelle (x, y) bekommt. Die gelegentlich benutzte Benennung der Curven $X =$ Const. oder $Y =$ Const. als *„isothermischer“* Curven erklärt sich von hieraus*).

§ 8. Integrale reeller Functionen in der xy-Ebene.

Es sei in der xy-Ebene irgend ein einfach oder mehrfach zusammenhängender Bereich B eingegrenzt, und in diesem Bereiche sei irgend eine reelle Function $\varphi(x, y)$ gegeben, an welche wir zunächst nur die Forderung der Eindeutigkeit und Endlichkeit stellen.

Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen nehmen wir bis auf weiteres an, dass die zur Benutzung kommenden Bereiche B sich nicht ins Unendliche erstrecken. Die spätere Hinzunahme des Punktes $z = \infty$ in unsere Entwicklungen wird nach den in dieser Hinsicht vorausgesandten Bemerkungen keine Schwierigkeiten darbieten.

Man denke den Bereich in lauter unendlich kleine Flächenelemente zerlegt, deren einzelnes durch $d\sigma$ bezeichnet werde. Geschieht diese Einteilung z. B. dadurch, dass man zwei zu den Axen parallele Geradenbüschel zieht, so würde sich das Element $d\sigma$ als Product $dx\,dy$ darstellen. Das *„über den Bereich B auszudehnende Flächenintegral“:*

$$\int_{(B)} \varphi(x, y)\, d\sigma \tag{1}$$

erklärt man bei der Grundlegung der Integralrechnung bekanntlich als Grenzwert einer zunächst endlichgliedrigen Summe, wobei im Falle einer stetigen Function φ mit stetigen Ableitungen die Versinnlichung der Function $\varphi(x, y)$ durch eine im Raume gelegene Fläche gute Dienste leistet. Benutzen wir die gerade genannte specielle Einteilung des Bereiches, so würde sich das Flächenintegral (1) als *„Doppelintegral“* darstellen lassen:

---

*) Die im Texte entwickelten physikalischen Vorstellungen werden in ausgedehnter Weise von F. Klein für functionentheoretische Zwecke, nämlich zur Begründung der Theorie der algebraischen Functionen, herangezogen in dem Buche *„Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale“* (Leipzig, 1882).

$$\int_{(B)} \varphi(x, y)\, d\sigma = \iint_{(B)} \varphi(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Wir haben hierbei das Symbol B des Integrationsbereiches immer als unteren Index an das Integralzeichen angehängt.

Damit das Flächenintegral (1) einen endlichen und bestimmten Wert habe, ist keineswegs erforderlich, dass $\varphi(x, y)$ im Bereiche B überall stetig ist. Indessen ist es eine umständliche Untersuchung, die für die Existenz des Integrales (1) hinreichenden und notwendigen Eigenschaften von $\varphi(x, y)$ in der allgemeinsten Gestalt festzustellen. Die für uns in Betracht kommenden Zwecke erfordern aber durchaus nicht, dass wir auf diesen Gegenstand eingehen; wir setzen vielmehr, so oft nichts anderes bemerkt ist, beständig die *Stetigkeit der zu integrierenden Functionen sowie auch ihrer Ableitungen* voraus. Auch der Fall, dass sich B in *endlich* viele Abteilungen zerlegen lässt, in deren einzelner der genannten Stetigkeitsbedingung genügt wird, bietet für die Definition des Integrales (1) offenbar keinerlei Schwierigkeit dar.

Man denke jetzt weiter innerhalb B zwischen zwei Punkten eine Curve C gezeichnet, deren Bogenlänge man, etwa von ihrem Anfangspunkt (x_0, y_0) in der Richtung auf ihren Endpunkt (x_1, y_1) gemessen, durch s bezeichnen wolle. An irgend einer Stelle (x, y) von C denke man wieder in Richtung auf (x_1, y_1) das Bogenelement ds angetragen und summiere die Differentiale $\varphi(x, y)\,ds$ für alle Bogenelemente, in welche man die Curve C in dieser Art zerlegt haben mag. Man wird so zu einem *über die Curve C zu erstreckenden „Linien- oder Curvenintegral“*:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \varphi(x, y)\, ds \quad \text{oder} \quad \int_{(C)} \varphi(x, y)\, ds \tag{3}$$

geführt. Die genauere Erklärung und die Untersuchung der Bestimmtheit eines solchen Curvenintegrals können vermöge jener Überlegungen durchgeführt werden, deren man sich bei der Definition der gewöhnlichen bestimmten Integrale bedient.

Allerdings kann man hierbei nicht jede denkbare Curve C gleich gut brauchen. Man pflegt zu sagen, C solle eine „analytische Curve“ sein, was indessen an dieser Stelle noch nicht ganz ohne Umstände endgültig würde erläutert werden können. Verständlich und für die Folge ausreichend wird es sein, wenn wir annehmen, dass C in einer dritten Variabelen t vermöge zweier Gleichungen $x = f(t)$, $y = g(t)$ mit Hilfe von Functionen $f(t)$, $g(t)$ darstellbar sei, welche längs der der Integration unterworfenen Strecke selber stetig sind und stetige

Ableitungen besitzen. Unser Curvenintegral geht nach Einführung von t in ein gewöhnliches bestimmtes Integral über:

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi\,[f(t)\,g(t)]\;\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\;dt.$$

Das Vorkommen unendlicher Werte der zu integrierenden Function an der Grenze des Integrationsintervalles wird sich zwar nicht beständig meiden lassen. Indessen ist jeder solche Fall durch besondere Untersuchung, und zwar vermöge eines Grenzüberganges, zu behandeln.

Es besteht nun ein höchst wichtiger Zusammenhang zwischen einem gewissen auf den Bereich B bezogenen Flächenintegrale und einem zugehörigen über den Rand von B erstreckten Curvenintegrale. In dem beliebig gewählten Bereiche B sei eine gleichfalls beliebige reelle Function $\psi(x, y)$ gegeben, welche selbst samt ihrer ersten Ableitung nach x in B (die Randcurve eingeschlossen) eindeutig und stetig sein möge.

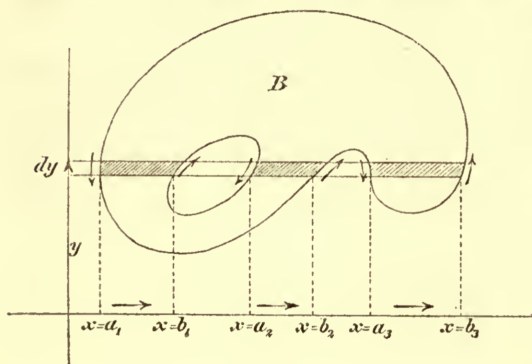


Fig. 28.

Das Flächenintegral $\int_{(B)} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, d\sigma$ denken wir uns in der Weise ausgeführt, dass wir $d\sigma = dx\,dy$ setzen und bei stehendem y und dy zuerst nach x integrieren. Figur 28 erläutert dies Verfahren. Aus B ist ein zur x-Axe paralleler Streifen von der unteren Ordinate y und der Breite dy herausgeschnitten. Indem wir explicite:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x}\, d\sigma = \int\left(dy \int \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx\right)$$

setzen, würde erstlich das innere Integral rechter Hand für unseren Streifen ausgeführt:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx = -\psi(a_1, y) + \psi(b_1, y) - \psi(a_2, y) + \psi(b_2, y) - \psi(a_3, y) + \psi(b_3, y)$$

ergeben, wenn, wie in der Figur angezeigt, der Parallelstreifen die Randcurve C des Bereiches an den Stellen (a_1, y), (b_1, y), $\cdots$ durchsetzt. Der Zusatz des Factors dy liefert:

$$dy \int \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx = -\,\psi(a_1, y)\,dy + \psi(b_1, y)\,dy - \psi(a_2, y)\,dy + \cdots.$$

Wir führen nunmehr die Bogendifferentiale $ds_1, ds_1', ds_2, ds_2', \cdots$ ein, welche der Parallelstreif aus der Randcurve C des Bereiches ausschneidet. Es liege ds_1 bei (a_1, y), ds_1' bei (b_1, y) u. s. w., und die in der Figur zugesetzten Pfeile mögen stets die Richtung der wachsenden Masszahl s des Bogens von C angeben. Durchläuft man den gesamten, hier aus zwei getrennten Teilen bestehenden Rand C von B in der durch jene Pfeile festgelegten Richtung, so hat man das Innere des Bereiches dabei beständig zur *linken* Hand: wir wollen hinfort diese Umlaufsrichtung des Bereiches als die *positive* bezeichnen.

Der auf den Streifen ausgedehnte Teil unseres Integrales kann nunmehr wie folgt geschrieben werden:

$$dy\int\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=\psi(a_1,y)\frac{-dy}{ds_1}ds_1+\psi(b_1,y)\frac{dy}{ds_1'}ds_1'+\psi(a_2,y)\frac{-dy}{ds_2}ds_2+\cdots$$

Man erwäge jetzt, dass wegen der Richtung des Differentials ds_1 offenbar $-dy$ das zum Bogendifferential ds_1 gehörende Differential der Ordinate ist, und dass entsprechend dy zu ds_1', $-dy$ zu ds_2 u. s. w. gehört. Entschliesst man sich, zum Zwecke der Vereinfachung, ein für alle Mal dy das zu ds gehörende Differential der Ordinate zu nennen, so gewinnt die letzte Formel die Gestalt:

$$(4)\qquad dy\int\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=\psi(a_1,y)\frac{dy}{ds_1}ds_1+\psi(b_1,y)\frac{dy}{ds_1'}ds_1'+\cdots.$$

Nunmehr denke man den ganzen Bereich B in Streifen unserer Art zerlegt, deren einzelner alsdann jenachdem in 2 oder 4 oder 6 oder etc. Punkten den Bereichrand C durchschneidet. Die Summe der in (4) links stehenden Differentiale, welche allen diesen Streifen entsprechen, ist unser zu berechnendes Flächenintegral. Rechts in den auf diese Streifen bezogenen Gleichungen (4) haben wir mit Bogenelementen zu thun, welche gerade die gesamte Randcurve C zusammensetzen. Also folgt die Gleichung:

$$\int_{(B)}\frac{\partial\psi}{\partial x}d\sigma=\int_{(C)}\psi(x,y)\frac{dy}{ds}ds,$$

die wir unter Abkürzung der rechten Seite auch so schreiben wollen:

$$(5)\qquad \int_{(B)}\frac{\partial\psi}{\partial x}d\sigma=\int_{(C)}\psi\,dy.$$

Das in diesen Formeln rechts stehende Integral ist im positiven Umlaufssinn über den ganzen Rand von B zu erstrecken.

Genau in demselben Sinne zu verstehen und ganz analog zu beweisen ist die Formel:

(6) $$\int_{(B)} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\sigma = -\int_{(C)} \varphi\, dx,$$

wo $\varphi(x, y)$ gleichfalls eine beliebige Function ist, die samt ihrer ersten Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ im ganzen Bereiche B eindeutig und stetig ist.

Die Subtraction der Formel (6) von (5) liefert die fundamentale Formel:

(7) $$\int_{(B)} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) d\sigma = \int_{(C)} (\varphi\, dx + \psi\, dy),$$

welche die am Anfang der gegenwärtigen Überlegung angekündigte Umwandlung eines Flächenintegrals in ein Curvenintegral enthält.

Zum Zwecke einer ersten Anwendung der Formel (7) denken wir B als einfach zusammenhängenden Bereich B_1, markieren im Innern von B_1 irgend zwei Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) und verbinden dieselben durch zwei gleichfalls im Innern von B_1 verlaufende Curven C_1, C_2. In Figur 29 sind die letzteren so angenommen, dass sie sich nirgends schneiden; indessen wird man auch für den Fall, dass C_1 und C_2 einander einmal oder öfter überkreuzen, die Gültigkeit der folgenden Überlegung leicht darthun. Vor allem nehmen wir nunmehr an, *dass* $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$ *in* B_1 *überall ein totales Differential vorstelle, oder dass daselbst allenthalben* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *sei.* Die Curven C_1 und C_2 liefern den Rand eines Bereiches B, dessen sämtliche Punkte dem Bereiche B_1 (wegen des *einfachen* Zusammenhanges von B_1) angehören. Wenden wir daraufhin die Formel (7) auf diesen Bereich B an, so verschwindet die linke Seite zufolge der eben über φ und ψ gemachten Voraussetzung. Die rechte Seite zerlegen wir in zwei Integrale, deren erstes sich auf C_1, von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) durchlaufen, bezieht, während das zweite über C_2 von (x_1, y_1) bis (x_0, y_0) zu erstrecken ist. Die Umkehrung der Richtung des letzteren Integrales bewirkt einen Zeichenwechsel desselben. Wir sind damit zu der Gleichung:

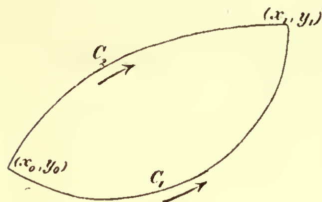


Fig. 29.

(8) $$\int_{(C_1)} (\varphi\, dx + \psi\, dy) = \int_{(C_2)} (\varphi\, dx + \psi\, dy)$$

geführt, wo nunmehr beide Integrale von der unteren Grenze (x_0, y_0) bis zur oberen (x_1, y_1) zu nehmen sind. Den in (8) enthaltenen höchst wichtigen Satz kann man in folgende Worte kleiden: *Sind im einfach zusammenhängenden Bereiche* B_1 *die Functionen* $\varphi(x, y)$ *und* $\psi(x, y)$

samt ihren Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *eindeutig und stetig, und ist ebenda überall die Gleichung* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *erfüllt, so ist das Integral:*

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\varphi\, dx + \psi\, dy) \tag{9}$$

für irgend zwei in B_1 *gelegene Punkte* (x_0, y_0), (x, y) *„eindeutig" bestimmt, welche in* B_1 *gelegene Integrationscurve wir auch zwischen diesen beiden Punkten benutzen mögen.*

Es ist nützlich, sich diesen Satz auch noch in folgender Weise zu veranschaulichen. Ein Integral (9) möge man zunächst längs irgend einer (x_0, y_0) und (x, y) verbindenden Curve C berechnet haben. Man denke die Curve unter Festhaltung ihrer Endpunkte ein wenig verschoben und nenne sie in der neuen Gestalt C'. *Der Wert des Integrales erfährt hierbei keine Veränderung, falls für alle zwischen* C *und* C' *liegenden Punkte, über welche somit die Integrationscurve hinweg geschoben ist, sowie auch für* C *und* C' *selber die Functionen* $\varphi(x, y)$ *und* $\psi(x, y)$ *neben den wiederholt genannten Stetigkeitsbedingungen die Relation* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *befriedigen.*

Indem wir nochmals zu obigem Bereiche B_1 zurückkehren, setzen wir bei festgehaltenem Punkte (x_0, y_0) und innerhalb B_1 variabelem Punkte (x, y):

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (\varphi\, dx + \psi\, dy) = F(x, y). \tag{10}$$

Es ist alsdann $F(x, y)$ in B_1 eine eindeutige Function mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \psi(x, y);$$

es ist aber $F(x, y)$ bei blosser Angabe dieser Ableitungen φ, ψ wegen der willkürlich zu wählenden unteren Grenze (x_0, y_0) erst bis auf eine additive Constante bestimmt.

§ 9. **Sätze von Green.**

Es sei in der xy-Ebene irgend ein Bereich B eingegrenzt. Innerhalb B und auf der Randcurve C dieses Bereiches seien $U(x, y)$ und $V(x, y)$ zwei eindeutige reelle Functionen, welche selbst samt ihren Ableitungen so beschaffen sein sollen, dass für:

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = U \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \psi(x, y) = U \frac{\partial V}{\partial y}$$

die im vorigen Paragraphen für φ und ψ, sowie $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ geforderten Eigenschaften der Eindeutigkeit und Stetigkeit zutreffen.

Wenden wir die Formel (7) pg. 112 auf die in (1) definierten Functionen φ, ψ an, so ist zu setzen:

$$\varphi\, dx + \psi\, dy = U \frac{\partial V}{\partial x} dx + U \frac{\partial V}{\partial y} dy = U\, dV,$$

und man findet dann leicht:

$$(2) \qquad \int_{(C)} U\, dV = \int_{(B)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\sigma$$

als Ausdruck der genannten Formel (7).

Des weiteren nehme man an, dass U und V auch noch ausserhalb des Bereiches B hart am Rande C stetige Ableitungen besitzen. Insbesondere verstehe man unter dn ein Element der im einzelnen Randpunkte von B nach aussen gerichteten Normalen (cf. Figur 30). Die diesem Differential correspondierende Ableitung von V wird man durch $\frac{\partial V}{\partial n}$ bezeichnen und hat:

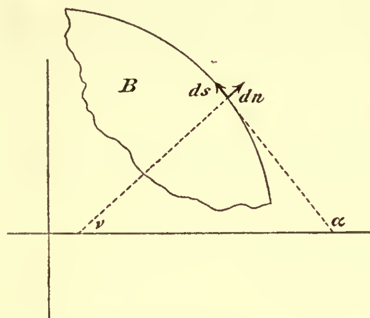


Fig. 30.

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn},$$

unter dx und dy die Projectionen von dn auf die Axen verstanden. Bildet die fragliche Normale gegen die positive Richtung der x-Axe den Winkel ν, wie in Figur 30 angedeutet ist, so hat man:

$$\frac{dx}{dn} = \cos\nu, \quad \frac{dy}{dn} = \sin\nu \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\nu + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\nu.$$

Ein bei jener Normalen gelegenes Element ds von C wird gegen die positive x-Axe den Winkel $\alpha = \nu + \frac{\pi}{2}$ bilden. Verstehen wir also jetzt unter dx, dy die Projectionen dieses Bogenelementes ds auf die Axen, so wird für diese dx, dy:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha = -\sin\nu, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha = \cos\nu,$$

und also können wir nunmehr schreiben:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dy}{ds},$$

$$\int_{(C)} U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds = \int_{(C)}\left(-U\frac{\partial V}{\partial y}\,dx + U\frac{\partial V}{\partial x}\,dy\right).$$

Auf das hier rechter Hand stehende Integral wende man nun wieder die Formel (7) pg. 112 an. Dasselbe geht dabei in das Flächenintegral über:

$$\int_{(B)}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]d\sigma.$$

Indem wir bei der Weiterentwicklung dieses Integrals die Abkürzung $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ gebrauchen, finden wir, dass unter Voraussetzung der oben formulierten Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit der in Betracht kommenden Functionen die Gleichung:

$$(3)\qquad \int_{(C)} U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds = \int_{(B)} U\Delta V\,d\sigma + \int_{(B)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)d\sigma$$

zwischen dem links stehenden „Randintegral" und den rechts stehenden „Flächenintegralen" richtig ist.

Nehmen wir eine solche Erweiterung der Voraussetzungen vor, dass die vorstehende Betrachtung auch gültig bleibt, falls wir U und V ihre Rollen wechseln lassen, so ist:

$$\int_{(C)} V\frac{\partial U}{\partial n}\,ds = \int_{(B)} V\Delta U\,d\sigma + \int_{(B)}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right)d\sigma.$$

Die Subtraction dieser Gleichung von der voraufgehenden aber liefert:

$$(4)\qquad \int_{(C)}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds = \int_{(B)}(U\Delta V - V\Delta U)\,d\sigma.$$

Die in den Formeln (3) und (4) ausgesprochenen Regeln benennt man als *„Green'sche Sätze"*; dieselben kommen namentlich in der Potentialtheorie zur Verwendung*).

§ 10. **Integral einer Function eines complexen Argumentes. Sätze von Cauchy.**

Wir kehren zu dem in § 6 pg. 101 ff. definierten Begriffe einer analytischen Function $Z = f(z)$ complexen Argumentes z zurück. Die inzwischen entwickelten Principien setzen uns in den Stand, mit Er-

*) Vergl. G. Green *„An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism"* (Nottingham 1828), abgedruckt im Journ. f. Mathem. Bd. 44 und 47.

folg auf die Betrachtung des *Integrals einer solchen Function* $f(z)$ einzugehen.

Mögen z_0 und z irgend zwei Werte des Argumentes sein, die wir sogleich wieder als Punkte der z-Ebene deuten, und möge zwischen beiden Punkten in der z-Ebene eine Curve C gezogen sein. Das „längs dieser Curve erstreckte“ Integral:

$$(1)\qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} Z\,dz$$

erklären wir dann unter Spaltung von z in $(x+iy)$ und Z in $(X+iY)$ durch die Darstellung:

$$(2)\quad \int_{z_0}^{z} Z\,dz = \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} (X+iY)\,(dx+idy)$$
$$= \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} (X dx - Y dy) + i\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} (Y dx + X dy).$$

Hierbei sind die beiden rechts stehenden Integrale nach Vorschrift von § 8 pg. 109 längs der Curve C erstreckt zu denken. Diese Integrationscurve C soll den pg. 109 genannten Anforderungen genügen, und $X(x,y)$, $Y(x,y)$ sollen für jede Stelle von C den in § 8 oft genannten Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit genügen. Wir können dies nach § 6 pg. 102 kurz dahin ausdrücken, *dass* $Z = f(z)$ *sich an allen Stellen der Integrationscurve* C *regulär verhalten solle**).

Von der grössten Bedeutung ist nun, dass nach (2) pg. 104 überall da, wo Z regulär ist, die Relationen:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

erfüllt sind. Diese Gestalten aber nimmt gerade die Relation $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ an, wenn wir die in § 8 pg. 112 über das Integral von $(\varphi\,dx + \psi\,dy)$ gegebenen Entwicklungen auf die beiden in (2) rechter Hand stehenden Integrale anwenden. Die damaligen Ergebnisse liefern jetzt sofort folgenden Fundamentalsatz: *Der Wert des Integrals* (1) *bleibt unverändert, falls man unter Festhaltung von* z_0 *und* z, *d. h. des Anfangs- und des Endpunktes, die Integrationscurve* C *einer stetigen Deformation unterwirft, vorausgesetzt, dass man* C *hierbei ausnahmslos über solche Stellen hinwegschiebt, in deren Umgebungen* Z *regulär ist.*

---

*) Offenbar wird auch ausreichend sein, wenn sich C in endlich viele solche Abteilungen zerlegen lässt, dass für jede einzelne derselben die im Texte gestellten Forderungen erfüllt sind.

Auch das folgende Theorem ist jetzt unmittelbar ersichtlich: *Ist die Function* $Z = f(z)$ *in irgend einem einfach zusammenhängenden Bereiche* B_1 *überall regulär und gehören* z_0 *und* z *diesem Bereiche an, so ist das Integral* (1) *zwischen* z_0 *und* z *eindeutig bestimmt, welche innerhalb* B_1 *verlaufende Integrationscurve* C *wir auch wählen mögen.* Bei festgehaltenem z_0 und innerhalb B_1 variabeler oberer Grenze z wird somit das Integral eine *eindeutige* Function dieses z. Diese Angaben dürfen wir aber für einen mehrfach zusammenhängenden Bereich allgemein nicht mehr machen. Bereits bei einem zweifach zusammenhängenden Bereiche B_2 giebt es, wie Figur 31 zeigt, zwischen gegebenen Grenzen z_0, z stets Curven C und C', von denen die eine in die andere nur durch Hinwegschiebung über solche Teile der Ebene übergeführt werden kann, welche dem Bereiche nicht angehören. In diesen Teilen aber können irreguläre Punkte der Function liegen.

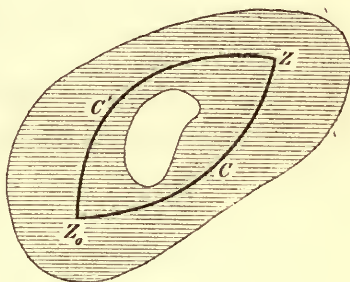


Fig. 31.

Für jeden Bereich B_n beliebig hohen Grades n des Zusammenhangs gilt der Satz, *dass das über den gesamten Rand* C *von* B_n *in der positiven Umlaufsrichtung* (*cf. Figur* 28 *pg.* 110) *erstreckte Integral:*

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C)} Z\,dz \tag{3}$$

verschwindet, sofern Z *in* B_n, *den Rand eingeschlossen, allenthalben regulär ist.* Man zeigt dies, indem man das Integral nach dem Schema (2) zerlegt und auf jedes der beiden entspringenden reellen Integrale die Formel (7) pg. 112 anwendet.

Zum Zwecke einer höchst wichtigen Anwendung des zuletzt ausgesprochenen Satzes legen wir einen einfach zusammenhängenden Bereich B_1 von der Randcurve C und eine in B_1 und auf C allenthalben reguläre Function $f(z)$ vor. Der specielle Wert $z = \zeta$ gehöre dem Bereiche an. Dann ist der Quotient $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ nur erst bis auf den Punkt ζ in B_1 regulär. Beschreiben wir somit innerhalb B_1 um ζ mit dem Radius ϱ einen Kreis K, dessen Inneres wir dem Bereiche B_1 nehmen, so bleibt ein Bereich B_2 übrig, in dem jener Quotient überall regulär ist.

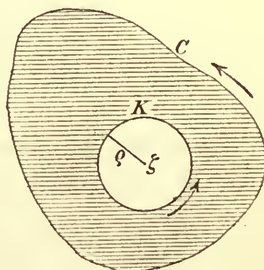


Fig. 32.

Die für das Kreisinnere positive Umlaufs-

richtung, wie sie in Figur 32 durch den an der Peripherie K befindlichen Pfeil angegeben ist, möge das Integral:

$$\int_{(K)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$$

liefern. Für K als Randcurve von B_2 würde aber die hiermit eingeschlagene Umlaufsrichtung offenbar die negative sein. Das zuletzt ausgesprochene Theorem liefert somit:

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz - \int_{(K)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = 0,$$

wo das erste Integral über den Rand C von B_1 in der positiven Richtung zu erstrecken ist.

Unter elementarer Umformung des letzteren Integrals schreiben wir die so gewonnene Gleichung:

$$(4) \qquad \int_{(C)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz - f(\zeta) \int_{(K)} \frac{dz}{z-\zeta} = \int_{(K)} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\, dz.$$

Zur Auswertung des zweiten und dritten Integrales führen wir Polarcoordinaten r, ϑ ein und wählen den Punkt ζ zum Pole, die Richtung der positiven reellen z-Axe aber als Axenrichtung. Dann hat man allgemein $z - \zeta = r e^{\vartheta i}$; und da sich die Integration über K bei constantem $r = \varrho$ auf ϑ allein bezieht, so ist $dz = i \varrho e^{\vartheta i} d\vartheta$ zu setzen, während der Nenner unserer auf K bezogenen Integrale $z - \zeta = \varrho e^{\vartheta i}$ ist. Dies liefert erstlich:

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z-\zeta} = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \frac{i \varrho e^{\vartheta i} d\vartheta}{\varrho e^{\vartheta i}} = 2 i \pi.$$

Das in (4) rechts stehende Integral fassen wir als Summe complexer Differentiale und berücksichtigen, dass der absolute Betrag einer Summe complexer Glieder nicht grösser als die Summe der absoluten Beträge dieser Glieder ist:

$$\left| \int_{(K)} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\, dz \right| \leqq \int_{(K)} \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|} \, |dz|.$$

Hier aber ist $|z - \zeta|$ constant $= \varrho$, $|dz|$ ist das Bogenelement von K, und $|f(z) - f(\zeta)|$ möge auf der Peripherie K den grössten Wert m annehmen, also daselbst beständig $\leqq m$ sein. Dann wird die rechte Seite der letzten Ungleichung höchstens gleich $2 m \pi$, und wir gewinnen unter Zusammenfassung:

$$(5) \qquad \left| \int_{(C)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz - 2 i \pi f(\zeta) \right| \leqq 2 m \pi.$$

Man beachte jetzt, dass die Auswahl des Radius ϱ von K nur der Bedingung unterworfen war, dass K innerhalb B_1 liegen sollte. Da hiermit eine untere Grenze für ϱ nicht gegeben ist, so können wir ϱ beliebig klein wählen. Aber für lim. $\varrho = 0$ wird auch das Maximum m von $|f(z) - f(\zeta)|$ auf K wegen der Stetigkeit von $f(z)$ die Grenze 0 besitzen. Links steht in (5) eine von der Veränderung des ϱ unabhängige Zahl. Wäre letztere > 0, so würde wegen (5) die Grösse m nicht die Grenze 0 besitzen können; also ist der in (5) links stehende Betrag $= 0$.

Den hiermit gewonnenen Fundamentalsatz kleiden wir in die Worte: *Für jeden endlichen*) Wert ζ gilt die Gleichung:*

$$(6) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz,$$

wo sich das Integral auf eine ganz beliebige, den Punkt ζ umlaufende geschlossene Curve C bezieht, vorausgesetzt nur, dass $f(z)$ innerhalb und auf C allenthalben regulär ist.

Zum Zwecke einer ersten Anwendung dieses Theorems wählen wir als Curve C einen Kreis vom Radius r um den Punkt ζ und nehmen an, dass $Z = f(z)$ im Innern und auf der Peripherie dieses Kreises überall regulär ist. Zur Auswertung des Integrales (6) wird man dann wieder setzen:

$$z - \zeta = r e^{\vartheta i}, \qquad dz = i r e^{\vartheta i}\, d\vartheta$$

und hat für ϑ zwischen den Grenzen 0 und 2π zu integrieren. Sind die Werte von $f(z)$ auf der Peripherie des Kreises allgemein durch $Z = X + iY$ bezeichnet, während $f(z)$ im Mittelpunkte ζ den Wert $Z_0 = X_0 + iY_0$ annimmt, so folgt aus (6) offenbar:

$$(7) \qquad X_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X\,d\vartheta, \qquad Y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y\,d\vartheta.$$

X_0 ist hiernach der „Mittelwert“ aller auf der Peripherie des Kreises vorliegenden Werte unserer Function $X(x, y)$, und analoges gilt von Y_0. Da wir den Radius r des Kreises beliebig klein wählen können, so geht aus diesem merkwürdigen Satze zugleich hervor, dass die Function $X(x, y)$ (und ebenso Y) an keiner einzigen Stelle, in deren Umgebung sie regulär ist, ein Maximum oder Minimum werden kann.

Mit den im vorliegenden Paragraphen entwickelten Sätzen haben wir die ersten Grundlagen der Cauchy'schen Functionentheorie ge-

*) Die Voraussetzung eines *endlichen* ζ kommt im Texte dadurch zum Ausdruck, dass ζ im Bereiche B_1 liegen sollte. Die zunächst zur Benutzung kommenden Bereiche sollten sich nicht ins Unendliche erstrecken (cf. pg. 108).

wonnen, über welche bereits oben in der Einleitung (pg. 76) einige historische Angaben erstattet sind. Speciell wird das durch Formel (6) zum Ausdruck kommende Theorem als „Satz von Cauchy" bezeichnet.

Aufgabe 1. Man übertrage den in Formel (6) ausgesprochenen Satz auf den Fall $\zeta = \infty$. Die Curve C ist so anzunehmen, dass auf und ausserhalb derselben $f(z)$ regulär ist. Dass aber $f(z)$ bei $z = \infty$ regulär sei, heisst einfach, $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ sei bei $z' = 0$ regulär.

Aufgabe 2. Man zeige, dass das Integral $\int (z - \zeta)^n dz$ mit einem von $n = -1$ verschiedenen ganzzahligen positiven oder negativen Exponenten n verschwindet, falls man als Integrationscurve C eine den Punkt ζ umlaufende geschlossene Curve wählt. Man gewinnt nämlich den Integralwert 0, falls man C als Kreis des Mittelpunktes ζ auswählt.

Aufgabe 3. Man grenze einen rechteckigen Bereich B_1 um den Nullpunkt durch die Geraden $y = \pm \pi$ und $x = \pm 1$ ein und beweise, dass das über den Rand dieses Bereiches ausgedehnte Integral $\int e^z dz$ verschwindet.

Aufgabe 4. Man grenze durch die zu den Axen parallelen Geraden $x = \pm a$, $y = \pm b$ einen rechteckigen Bereich B_1 ein und zeige, dass das über den Rand B_1 ausgedehnte Integral $\int \sin z \, dz$ verschwindet. Man wolle hierbei $\sin z$ in

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

entwickeln und von den Integrationsregeln der trigonometrischen und der hyperbolischen Functionen Gebrauch machen.

§ 11. Convergenz unendlicher Reihen.

Ehe weitere Sätze der Cauchy'schen Functionentheorie entwickelt werden, sind einige Recapitulationen und Ergänzungen über die Convergenz unendlicher Reihen einzuschalten.

Es mögen reelle oder complexe Zahlen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in unendlicher Anzahl vorgelegt sein. Man bezeichnet alsdann in den einführenden Vorlesungen über höhere Analysis die unendliche Reihe:

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

als *convergent*, falls die Summe der n ersten Glieder:

$$(2) \qquad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

für $\lim. n = \infty$ einer endlichen und bestimmten Grenze $S = \lim. S_n$ zustrebt; diese Grenze S heisst der Summenwert der Reihe (1). Ist die Reihe nicht convergent, so wird sie als *divergent* bezeichnet; man hat dann entweder $\lim. S_n = \infty$, oder S_n bleibt bei wachsendem n zwar endlich, ist jedoch unaufhörlichen Schwankungen unterworfen. Im letzteren Falle heisst die Reihe (1) auch wohl *oscillierend*.

Die zur Reihe (1) gehörende *„Reihe der absoluten Beträge"* ist:

$$(3) \qquad |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots.$$

Da hier sämtliche Glieder reell und nicht-negativ sind, so ist ein Schwanken des Summenwertes S_n der ersten n Glieder mit wachsendem n ausgeschlossen, vielmehr ist entweder lim. $S_n = \infty$ oder die Reihe (3) ist convergent. Eine solche Reihe ohne negative Glieder hat im Falle der Convergenz stets ein und denselben Summenwert S, in welche Anordnung man die Glieder auch bringen mag; nur muss man natürlich Sorge tragen, dass bei jeder Neuordnung der Reihe weder Glieder ausfallen, noch solche neu hinzutreten. Eine Reihe, die bei jeder Anordnung der Glieder stets ein und denselben endlichen Summenwert besitzt, wird als *„unbedingt convergent"* bezeichnet.

Es ist nun eine der elementarsten, aber zugleich wichtigsten Erkenntnisse in der Reihentheorie, *dass eine beliebige Reihe* (1) *stets und nur dann „unbedingt" convergent ist, falls sie „absolut" convergiert, was bedeuten soll, dass die ihr zugehörige Reihe* (3) *der absoluten Beträge convergiert.* —

Wir werden in der Folge auch mit sogen. *„Doppelreihen"* zu thun haben, welche wir im folgenden Schema ansetzen:

$$\begin{array}{l} v_{00} + v_{01} + v_{02} + v_{03} + \cdots \\ + v_{10} + v_{11} + v_{12} + v_{13} + \cdots \\ + v_{20} + v_{21} + v_{22} + v_{23} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \tag{4}$$

Hier liegen unendlich viele Horizontalreihen mit je unendlich vielen Gliedern vor. Aber man wolle sich überzeugen, *dass gegenüber der Reihe* (1) *gleichwohl nur eine formale, das Wesen der Sache nicht treffende Veränderung vorgenommen ist.* In der That können wir jede Doppelreihe vermöge Umordnung der Glieder sofort als einfache Reihe schreiben:

$$v_{00} + v_{01} + v_{10} + v_{02} + v_{11} + v_{20} + v_{03} + v_{12} + v_{21} + \cdots, \tag{5}$$

sowie auch umgekehrt eine einfache Reihe (1) in eine Doppelreihe (4) umgestalten. Die Reihe (4) wird man somit nur als eine besondere Neuanordnung einer einfachen Reihe (5) ansehen dürfen. Das obige Theorem vor der unbedingten Convergenz bleibt hiernach für Doppelreihen gültig. —

Man nehme jetzt an, dass die Grössen u veränderlich und zwar analytische Functionen einer complexen Variabelen z seien; wir schreiben dann die Glieder ausführlich $u_0(z)$, $u_1(z)$, ... und bezeichnen die Summe der n ersten Glieder als Function von z durch:

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_{n-1}(z). \tag{6}$$

Den Fall, dass die Functionen $u_n(z)$ rational sind, werden wir in der Folge zumeist zu betrachten haben; trigonometrische Functionen u_n kamen bereits im ersten Kapitel ausführlichst zur Geltung. Jedenfalls nehmen wir an, dass in einem Bereiche B, den wir weiterhin zu Grunde legen wollen, die $u_n(z)$ sämtlich eindeutige und reguläre analytische Functionen sind. Sie sollen in B überall integrier- und differenzierbar sein, wobei dann die einzelne Ableitung $u_n'(z)$ nach pg. 105 allein von z aber nicht von der „Richtung der Differentiation" abhängen wird.

Wir nehmen nun an, dass die Reihe (1) für jeden einzelnen Punkt z des Bereiches B unbedingt convergiere, und nennen den Summenwert $f(z)$:

$$f(z) = u_0(z) + u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \cdots. \tag{7}$$

Um alsdann über die Function $f(z)$ weitere Aussagen machen zu können, wollen wir über die Art der Convergenz unserer Reihe eine noch genauere Festsetzung machen. Man bilde den „Reihenrest":

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = u_n(z) + u_{n+1}(z) + \cdots. \tag{8}$$

Lässt sich dann für jede von 0 verschiedene positive, wenn auch noch so klein gewählte Zahl δ stets ein bestimmter endlicher den Bedingungen:

$$|R_n(z)| < \delta, \quad |R_{n+1}(z)| < \delta, \quad |R_{n+2}(z)| < \delta, \cdots \tag{9}$$

genügender Index n angeben, welcher unabhängig davon ist, wo wir auch den Punkt z im Bereiche fixieren mögen, so heisst die Reihe (7) *im Bereiche B „gleichmässig" convergent.*

Indem wir die Formel (7) in die Gestalt setzen:

$$f(z) = S_n(z) + R_n(z) \tag{10}$$

ist sogleich das Theorem ersichtlich, *dass eine Reihe, welche im Bereiche B überall gleichmässig convergiert, eine ebenda allenthalben stetige Function darstellt.* Es ist nämlich $S_n(z)$ als Summe endlich vieler regulärer und also stetiger Functionen selber stetig, und der absolute Betrag von $R_n(z)$ kann durch hinreichend gross gewähltes n unter jedes δ für alle in Betracht kommenden z herabgedrückt werden.

Dass es sich bei der Einführung der gleichmässigen Convergenz um eine höchst wesentliche Verschärfung des Convergenzbegriffes handelt, möge das Beispiel der Fourier'schen Reihe:

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$$

zeigen, welche pg. 12 betrachtet wurde. Diese Reihe erkannten wir als convergent für alle endlichen reellen x; aber sie kann in der Umgebung der

einzelnen Stellen $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \ldots$ nicht gleichmässig convergent sein, da an jeder dieser Stellen ein Stetigkeitssprung des Summenwertes jener Reihe eintritt. Man muss sich dies so vorstellen, dass zwar für jedes *bestimmte* in der Umgebung z. B. von π gewählte x nach Auswahl von δ ein der Forderung (9) entsprechendes endliches n angebbar ist, dass indessen, falls wir x in immer grösserer Nähe von π wählen, die hierbei eintretenden endlichen Zahlen n stets grösser ausfallen, ohne dass sich für sie eine obere Grenze angeben liesse.

Ohne besondere Mühe erkennt man diesen Charakter direct an der unendlichen Reihe:

$$(1-x)+(1-x)\,x+(1-x)\,x^2+(1-x)\,x^3+\cdots,$$

welche im Intervall von $x=-1$ bis $x=+1$ convergent ist unter *Einschluss* der oberen Grenze $x=1$, während sie nur unter *Ausschluss* der oberen Grenze $x=1$ gleichmässig convergiert. Man berechnet leicht, dass $R_n(x)=x^n$ ist. Hat man also δ gewählt, so wird für jedes „bestimmte" etwa positiv gewählte x, welches <1 ist, ein der Bedingung $x^n<\delta$ genügendes endliches n existieren. Hat man indessen ein wenn auch noch so grosses „bestimmtes" endliches n gewählt, so kann man in der Nähe von 1 noch echte Brüche x angeben, für welche $x^n<\delta$ *nicht* erfüllt ist. In der That ist denn auch der Summenwert der fraglichen Reihe bei $x=1$ unstetig; für echte Brüche x ist derselbe gleich 1, für $x=1$ aber gleich 0. —

Man verstehe jetzt unter z_0 und z_1 irgend zwei endliche und dem Bereiche B angehörende Punkte der z-Ebene und ziehe von z_0 nach z_1 innerhalb B eine Integrationscurve C der endlichen Gesamtlänge s. Aus (10) gewinnen wir alsdann unter Benutzung dieser Curve C:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz-\int_{z_0}^{z_1} S_n(z)\,dz=\int_{z_0}^{z_1} R_n(z)\,dz.$$

Da S_n nur endlich viele Glieder enthält, so darf man diese Summe gliedweise integrieren und gewinnt auf die Weise:

$$\text{(11)}\qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_0}^{z_1} u_k(z)\,dz=\int_{z_0}^{z_1} R_n(z)\,dz.$$

Für die rechte Seite finden wir vermöge einer bereits pg. 118 benutzten Überlegung:

$$\left|\int_{z_0}^{z_1} R_n(z)\,dz\right|\leqq\int_{z_0}^{z_1} |R_n(z)|\cdot|dz|<\int_{z=z_0}^{z=z_1}\delta\,|dz|=\delta\cdot s,$$

wenn n nach Auswahl von δ in Übereinstimmung mit (9) gewählt wird. Die rechte Seite der Formel (11) kann man somit für hinreichend grosses n dem Werte 0 beliebig nahe bringen; sie wird zufolge unserer obigen Fassung des Begriffs der gleichmässigen Convergenz für $\lim. n = \infty$ die Grenze 0 haben. Die Folge ist, dass die unendliche Reihe:

$$(12) \qquad \int_{z_0}^{z_1} u_0(z)\,dz + \int_{z_0}^{z_1} u_1(z)\,dz + \int_{z_0}^{z_1} u_2(z)\,dz + \cdots$$

convergent ist und als Summenwert $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$ besitzt. Man kann dies Ergebnis auch so aussprechen: *Convergiert die in* (7) *rechts stehende Reihe innerhalb B gleichmässig, so berechnet man das Integral von $f(z)$ für eine innerhalb B verlaufende Integrationscurve, indem man (unter Beibehaltung der Integrationscurve) die unendliche Reihe gliedweise integriert.*

Nicht ganz so einfach verhält sich die *Differentiation* von $f(z)$. Ist $u_n'(z)$ die erste Ableitung von $u_n(z)$, so wollen wir

$$(13) \qquad u_0'(z) + u_1'(z) + u_2'(z) + u_3'(z) + \cdots$$

als die zur gegebenen Reihe gehörende *„abgeleitete Reihe"* bezeichnen. Hier besteht nun die bemerkenswerte Thatsache, *dass die ursprüngliche Reihe für irgend ein z convergent sein kann, während die abgeleitete Reihe ebenda divergiert.* So z. B. betrachteten wir pg. 13 unter (2) für das Intervall $0 < x < \pi$ die Reihe:

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots,$$

deren Convergenz wir feststellten. Die zugehörige abgeleitete Reihe:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cdots$$

ist aber divergent, denn schon das notwendige Convergenzkriterium $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ ist nicht erfüllt.

Indessen lässt sich folgendes Theorem beweisen: *Ist die abgeleitete Reihe im ganzen Bereiche B oder in einem Teile B' desselben gleichmässig convergent, so stellt sie auch wirklich die abgeleitete Function $f'(z)$ ebendort dar.* Ist nämlich $g(z)$ der Summenwert der abgeleiteten Reihe in B bez. B', so findet man durch Benutzung des bewiesenen Integralsatzes für irgend eine jenem Bereiche angehörende Integrationscurve:

$$\int_{z_0}^{z_1} g(z)\,dz = u_0(z_1) - u_0(z_0) + u_1(z_1) - u_1(z_0) + \cdots.$$

Dass die hier rechts stehende Reihe den Summenwert $f(z_1) - f(z_0)$

hat, ist eine einfache Folge der gleichmässigen Convergenz der ursprünglichen Reihe. Man hat also:

$$\int_{z_0}^{z_1} g(z)dz = f(z_1) - f(z_0),$$

woraus sofort hervorgeht, dass für jeden Punkt z_1 von B bez. B' die Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ in der That mit $g(z)$ identisch ist.

§ 12. Potenzreihenentwicklung der analytischen Functionen.

Unter Rückkehr zu den in § 10 pg. 116 ff. entwickelten Cauchy'schen Ansätzen verstehen wir unter $f(z)$ irgend eine analytische Function, welche sich in der Umgebung des im Endlichen gelegenen Punktes z_0 regulär verhält. Giebt es im Endlichen irreguläre Punkte von $f(z)$, so wählen wir unter diesen den Punkt z_1 so aus, dass für jeden irregulären Punkt z_2 von $f(z)$ die Bedingung $|z_2 - z_0| \geqq |z_1 - z_0|$ gilt. Beschreiben wir mit dem Radius $R = |z_1 - z_0|$ um den Punkt z_0 einen Kreis K, so ist innerhalb K die Function $f(z)$ überall regulär, auf der Peripherie von K aber findet sich mindestens der eine irreguläre Punkt z_1; es können auf dieser Peripherie aber noch beliebig, ja vielleicht unendlich viele weitere irreguläre Punkte auftreten. Giebt es im Endlichen keinen einzigen irregulären Punkt von $f(z)$, so setze man $R = \infty$; das Innere des Kreises K besteht dann aus allen endlichen Punkten der z-Ebene.

Man wähle jetzt einen beliebigen Punkt z innerhalb K, und also in Übereinstimmung mit $|z - z_0| < R$. Man bestimme weiter eine den Bedingungen $|z - z_0| < r < R$ genügende endliche Zahl r und beschreibe mit r als Radius um z_0 einen Kreis k. Letzterer liegt gänzlich innerhalb K. Versteht man also unter ζ einen die Peripherie von k durchlaufenden Punkt, so wird sich $f(z)$ an allen Stellen ζ, sowie auch allenthalben innerhalb k regulär verhalten. Der in (6) pg. 119 zum Ausdruck kommende Cauchy'sche Satz liefert somit für die jetzt erklärte Bezeichnungsweise:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

integriert über k in dem für das Kreisinnere positiven Umlaufssinne.

Nun aber ist:

$$(2) \quad \int_{(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{d\zeta}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \int_{(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n\right] d\zeta;$$

denn der Quotient $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ hat zufolge $|z-z_0|<r$ längs der ganzen Integrationsbahn k einen constanten absoluten Betrag, der <1 ist, so dass die rechts unter dem Integralzeichen stehende geometrische Reihe für alle ζ convergent ist und als Summe den reciproken Wert von $1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ besitzt. Es ist sogar aus der Gestalt des Reihenrestes von:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\right]$$

mit Rücksicht auf die Regularität und also Endlichkeit von $f(\zeta)$ die gleichmässige Convergenz der letzten Reihe für alle ζ leicht ersichtlich. Die Berechnung des Integrales (2) darf hiernach dadurch vollzogen werden, dass wir rechter Hand in (2) gliedweise integrieren:

$$\int_{(k)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(z-z_0)^n\int_{(k)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right],$$

wobei die hier rechts auftretende Reihe nach den Erörterungen von pg. 123 u. f. wieder convergent ist.

Nehmen wir noch die Gleichung (1) hinzu, so entspringt der Fundamentalsatz: *Die Function $f(z)$ gestattet die Entwicklung in eine Potenzreihe:*

$$(3)\qquad f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots,$$

wobei der Coefficient a_n der n^{ten} Potenz von $z-z_0$ gegeben ist durch:

$$(4)\qquad a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{(k)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}};$$

die Reihe ist jedenfalls für alle Punkte z im Innern des Kreises K convergent.

Es ist nützlich, sich auch noch direct von der Convergenz der Reihe (3) zu überzeugen. Mögen wir mit einem beliebigen endlichen Radius $\varrho<R$ einen Kreis $\varkappa$ um z_0 legen und z irgendwo auf der Peripherie oder im Innern dieses Kreises wählen. Den Radius r des in (4) benutzten Kreises k wählen wir der Bedingung $\varrho<r<R$ gemäss und haben dann:

$$(5)\qquad \frac{\varrho}{r}=q<1\quad\text{und}\quad |z-z_0|\leqq\varrho,$$

wo q nach Auswahl von ϱ und r ein constanter echter Bruch ist. Da k innerhalb K liegt, so kann man eine bestimmte endliche Zahl M so auswählen, dass für jeden Punkt ζ von k der absolute Betrag $|f(\zeta)|\leqq M$ ist. Führen wir übrigens zur Berechnung des Integrals (4) Polarcoordinaten r, ϑ mit dem Pole in z_0 ein, so folgt:

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{(k)} \frac{|f(\zeta)| \cdot |d\zeta|}{r^{n+1}}.$$

Da aber $|f(\zeta)| \leqq M$ und $|d\zeta| = r d\vartheta$ ist, so folgt:

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M r d\vartheta}{r^{n+1}}, \quad |a_n| \leqq \frac{M}{r^n}.$$

Gehen wir nunmehr von (3) gleich zur Reihe der absoluten Beträge, so findet sich:

$$|a_n| \cdot |z - z_0|^n \leqq \frac{M}{r^n} \cdot \varrho^n = M q^n.$$

Für den Reihenrest bei der Reihe der absoluten Beträge berechnet man hieraus einen Zahlwert $\leqq \frac{M}{1-q} \cdot q^n$; und da der Reihenrest in (3) absolut nicht grösser sein kann, so ergiebt sich wegen $q < 1$ zugleich die unbedingte und die gleichmässige Convergenz unserer Reihe auf und innerhalb des Kreises $\varkappa$. *Eine analytische Function $f(z)$ gestattet für jede im Endlichen gelegene reguläre Stelle z_0 die durch* (3) *und* (4) *erklärte Potenzreihenentwicklung: dieselbe ist unbedingt und gleichmässig convergent im Innern eines Kreises K, der bis an einen der Stelle z_0 nächstgelegenen irregulären Punkt z_1 der Function $f(z)$ gerade heranreicht; und insbesondere wird die unbedingte und gleichmässige Convergenz für alle endlichen z stattfinden, falls im Endlichen überhaupt keine irregulären Punkte vorkommen.*

Es bleibt übrig, auch noch den Punkt $z_0 = \infty$ zu erledigen. Wir nehmen an, dass $f(z)$ in der Umgebung des Punktes ∞ regulär ist, d. h. dass dies von $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ in der Umgebung von $z' = 0$ gilt. Der Ansatz der Entwicklung von $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ nach Potenzen von z' liefert dann durch Rückgang zu z sofort den Satz: *Ist die Function $f(z)$ in der Umgebung des Punktes ∞ regulär, so gestattet sie die Reihenentwicklung:*

$$(6) \qquad f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots,$$

welche unbedingt und gleichmässig convergiert ausserhalb eines um den Nullpunkt $z = 0$ beschriebenen Kreises, dessen Peripherie durch einen irregulären Punkt höchsten absoluten Betrages hindurchläuft; insbesondere kann sich dieser Kreis auf den Nullpunkt selber zusammenziehen.

§ 13. **Convergenzkreis einer Potenzreihe.**

Zufolge der eben gewonnenen Ergebnisse besitzen wir in der Potenzreihe ein höchst wertvolles Hilfsmittel zur weiteren Untersuchung

und Berechnung der analytischen Functionen. Wir müssen uns demnach mit den Eigenschaften dieser Reihen näher bekannt machen und knüpfen dieserhalb an eine *ganz beliebig gewählte Potenzreihe* an, die wir gleich wieder durch:

$$(1) \qquad a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

bezeichnen. Die Coefficienten a sind complexe Constante; der Wert z_0 ist irgend ein fest gewählter endlicher. Doch werden sich unsere Betrachtungen ohne Mühe auch auf den Fall $z_0 = \infty$ übertragen lassen, wo man jedoch an Stelle von (1) wie in (6) § 12 eine Reihe nach absteigenden Potenzen von z treten lassen muss.

Wir fragen nun zunächst, für welche Werte z die Reihe (1) convergent sein mag. Um diese Frage zu beantworten, bilden wir uns aus den Coefficienten der vorgelegten Potenzreihe (1) folgende Reihe nicht-negativer reeller Zahlen b:

$$(2) \qquad b_1 = |a_1|, \quad b_2 = \sqrt{|a_2|}, \quad b_3 = \sqrt[3]{|a_3|}, \cdots, \quad b_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \cdots$$

und markieren die diesen Zahlwerten b entsprechenden Punkte auf der positiven reellen Axe der z-Ebene. Noch anschaulicher ist es, an Stelle der z-Ebene die z-Kugel treten zu lassen, wobei die positive reelle Axe die Hälfte eines grössten Kugelkreises liefert (cf. pg 84). Da auf diesem Halbkreise unendlich viele Punkte b markiert sind, so werden sich letztere wenigstens an einer Stelle häufen, d. i. in unendlicher Zahl zusammendrängen. Eine solche „Häufungsstelle" kann bei ∞ liegen. Dies wird der Fall sein, wenn nach Auswahl einer „beliebig grossen" positiven Zahl ω stets noch Zahlen b_n existieren, welche $> \omega$ sind. Ist dies nicht der Fall, so kann man eine „bestimmte" Zahl g angeben, die nur von endlich vielen Zahlen b übertroffen wird. Man lasse nun g von dem gedachten Werte ab stetig abnehmen. Dabei wird man vielleicht eine vom Nullpunkt verschiedene Stelle g erreichen, die zwar selber nur von *endlich* vielen b übertroffen wird, die jedoch so gelegen ist, dass *jeder* kleinere Zahlwert von *unendlich* vielen b übertroffen wird. Die so gedachte „obere Grenze" g der unendlichen Zahlenreihe der b bezeichnen wir nach Hadamard (cf. Note pg. 129) durch:

$$(3) \qquad g = \lim_{n=\infty}. \text{ sup. } b_n.$$

Liegt auch dieser Fall eines endlichen $g > 0$ nicht vor, so ist schlechthin $\lim_{n=\infty}. b_n = 0$, so dass der Nullpunkt die einzige Häufungsstelle ist. Den ersten und dritten Fall charakterisieren wir durch $g = \infty$ bez. $g = 0$. Als Beispiel betrachte man die Zahlen b, die, je nachdem der Index ungerade oder gerade ist, durch:

$$b_{2n-1} = 7 - \frac{1}{2n-1} \quad \text{bez.} \quad b_{2n} = 5 - \frac{1}{2n}$$

gegeben sind. Hier wird offenbar $\lim_{n=\infty}\text{sup.}\, b_n = 7$, während eine zweite Häufungsstelle bei 5 liegt*).

Es gilt nun das folgende allgemeine Theorem**): *Die Potenzreihe* (1) *ist unbedingt und gleichmässig convergent im Innern eines in der* z*-Ebene um* z_0 *als Mittelpunkt gelegten Kreises* K *vom Radius* R*, der gleich dem reciproken Werte von* g *ist,* $R = \frac{1}{g}$; *ausserhalb dieses Kreises (sofern* R *endlich ist) ist die Potenzreihe überall divergent.*

Beschreibt man nämlich für den Fall $R > 0$ mit beliebigem aber bestimmt gewählten endlichen Radius $r < R$ einen Kreis k um z_0, so wird für alle Punkte im Innern und auf dem Rande von k offenbar $|z - z_0| \leqq r$ sein. Setzt man alsdann, falls R endlich ist, $r = qR$, so ist q ein bestimmter positiver echter Bruch, $q < 1$. Nun ist für endliches R, d. i. für $g > 0$, wenn man von endlich vielen Gliedern (die auf Convergenz oder Divergenz keinen Einfluss haben) absieht, beständig $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq g$. Multipliciert man hier mit $|z - z_0| \leqq qR$, so folgt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| \leqq q,$$

eine Bedingung, die in dem eben ausgeschlossenen Falle $g = 0$, d. i. $\lim. b_n = 0$, direct und zwar bei willkürlich dem Intervall $0 < q < 1$ entnommenem q als gültig erkannt wird. Man findet demgemäss, dass $|a_n(z - z_0)^n| \leqq q^n$ ist, womit die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe innerhalb und auf k, d. i. innerhalb K bewiesen ist.

Wählt man zweitens, falls R nicht $= \infty$ aber auch einstweilen nicht $= 0$ ist, einen Wert z ausserhalb K, so kann man wegen $|z - z_0| > R$ und der Endlichkeit von g offenbar $|z - z_0| = \frac{1}{g - s}$ schreiben, wobei $g > s > 0$ ist. Wählen wir sodann eine reelle Zahl t aus dem Intervall $0 < t < s$, so gilt $\frac{g-t}{g-s} = p > 1$. Nun giebt es unendlich viele n, für welche $\sqrt[n]{|a_n|} > g - t$ zutrifft, und bei denen demnach:

---

*) Die obige Definition von g ist, um die weitere Darstellung nicht zu umständlich zu gestalten, nicht ganz exact gefasst. Man kann nur die Existenz einer solchen Zahl g beweisen, dass nach Auswahl einer beliebig kleinen, positiven, von 0 verschiedenen Zahl ε stets $g + \varepsilon$ höchstens von *endlich* vielen b_n, jedoch (im Falle $g > 0$) $g - \varepsilon$ beständig von *unendlich* vielen b_n übertroffen wird.

**) In dieser Gestalt wurde der Satz von J. Hadamard ausgesprochen; siehe dessen Abhandlung *„Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor"*, Journ. de Mathém., 4[te] Folge, Bd. 8 (1892).

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| > \frac{g-t}{g-s} \quad \text{und also} \quad |a_n(z - z_0)^n| > p^n$$

gilt. Wegen $p > 1$ sind somit in der Reihe Glieder nachweisbar, welche für sich genommen absolut jede angebbare Zahl überschreiten; die Reihe ist demnach sicher divergent. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man schliesslich im Falle $R = 0$, d. i. für $g = \infty$; denn hier kommen für *jedes* von z_0 verschiedene z Glieder vor, für welche bereits $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|$ eine beliebig gross gewählte Zahl übersteigen.

Reihen mit $R = 0$ werden von jetzt ab gänzlich ausgeschlossen. Für die einzelne der übrigen Reihen bezeichnen wir den Kreis K mit dem Radius $R = \frac{1}{g}$ um z_0 als den *„Convergenzkreis"* und nennen R den *„Convergenzradius"*. Insbesondere haben wir für $g = 0$ und $R = \infty$ eine *beständig convergente Reihe*, d. i. eine Reihe, welche für *jeden endlichen* Wert von z convergiert.

Den Summenwert der Reihe für einen Punkt z im Innern des Convergenzkreises wollen wir $f(z)$ nennen; $f(z)$ ist innerhalb dieses Kreises eindeutig und zufolge des Stetigkeitssatzes von pg. 122 ebenda auch stetig. Für die zu (1) gehörende abgeleitete Reihe:

$$(4) \qquad a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots$$

ist zufolge der bekannten Regel $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$\text{lim. sup.} \sqrt[n]{|na_n|} = \text{lim. sup.} \sqrt[n]{|a_n|},$$

so dass auch die Reihe (4) *innerhalb K unbedingt und gleichmässig convergiert.* Mit Rücksicht auf das Differentialtheorem von pg. 124 folgt: *Eine Potenzreihe stellt im Innern ihres Convergenzkreises eine eindeutige stetige analytische Function $f(z)$ dar, indem in der That der Differentialquotient $\frac{df}{dz}$ durch die im gleichen Kreise convergente abgeleitete Reihe geliefert wird. Die Potenzreihe stellt hiernach eine im Innern des Convergenzkreises überall „reguläre" analytische Function dar.*

Setzt man in der Gleichung:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots$$

$z = z_0$ ein, so folgt $a_1 = f'(z_0)$. Geht man, was jetzt ohne weiteres zulässig ist, durch wiederholte Differentiation bis $f^{(n)}(z)$, so ergiebt die Substitution $z = z_0$ für jedes n:

$$(5) \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Wir folgern: *Die in* (1) *gegebene Reihe ist die Mac Laurin'sche Reihe der Function* $f(z)$:

$$(6)\quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z - z_0}{1} + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{1\cdot 2} + f'''(z_0)\frac{(z-z_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots;$$

die Function $f(z)$ *lässt sich hiernach nur auf eine einzige Art in eine Reihe nach Potenzen von* $(z - z_0)$ *entwickeln.* Wir ziehen hieraus noch den Schluss, dass die im vorigen Paragraphen unter (3) und (4) pg. 126 angegebene convergente Potenzreihe für die damals vorgelegte Function $f(z)$ gleichfalls die Mac Laurin'sche Reihe dieser Function sein muss. Weiter folgt aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen und aus der Convergenz der abgeleiteten Reihe innerhalb K der wichtige Satz: *Eine analytische Function hat in der Umgebung einer regulären Stelle Ableitungen aller endlichen Ordnungen, welche ebendort regulär sind.*

Die Werte der durch die Potenzreihe (1) definierten Function sind zunächst allein im Innern des Kreises K gegeben, und wir werden erst noch zu überlegen haben, ob und wie wir diese Function für die Punkte z auf und ausserhalb K fortzusetzen vermögen. Ein hierher gehörendes wichtiges Theorem können wir schon jetzt ableiten.

Wir gehen von der Annahme aus, es gäbe eine analytische Function $f(z)$, welche innerhalb eines um z_0 als Mittelpunkt gelegten Kreises K' mit einem Radius $R' > R$ überall regulär ist und für alle Punkte innerhalb K die durch die Potenzreihe (1) gelieferten Werte hat. Nach dem in (3) und (4) pg. 126 zum Ausdruck kommenden Theorem gestattet diese Function $f(z)$ die Entwicklung in eine innerhalb K' überall convergente Potenzreihe. Letztere ist notwendig die Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(z_0) + f'(z_0)\cdot\frac{z - z_0}{1} + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

der gedachten Function $f(z)$. Da aber $f(z)$ im Innern von K auch durch die Reihe (1) geliefert werden kann, so ist die Reihe (1) gleichfalls die eben angegebene Mac Laurin'sche Reihe; dieselbe ist also nicht innerhalb K', sondern nur innerhalb K überall convergent. Der hiermit aufgedeckte Widerspruch liefert das Theorem: *Die durch die Potenzreihe* (1) *definierte analytische Function bekommt bei Fortsetzung über den Rand des Convergenzkreises hinaus wenigstens einen auf der Peripherie des letzteren gelegenen irregulären Punkt.*

Es ist nun vor allem nötig, die hiermit berührte „Fortsetzung" der Functionen ausführlich zu besprechen.

Aufgabe 1. Durch Vergleichung der Reihe (6) mit der in (3) und (4) pg. 126 gegebenen Reihe bilde man für die Ableitungen $f^{(n)}(z_0)$ Integraldarstellungen

und überlege, wie die betreffenden Formeln aus der ersten unter ihnen hergeleitet werden können.

Aufgabe 2. Man bestimme den Convergenzkreis der Reihe

$$\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots.$$

Aufgabe 3. Man zeige, dass die Exponentialreihe:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

den Convergenzradius $R = \infty$ hat.

Auflösung: Es ist nämlich $R = \lim. \sqrt[n]{n!}$. Man folgert aber aus $(n+1)^n > n!$ leicht $n!(n+1) > n!(n!)^{\frac{1}{n}}$ oder, anders geschrieben:

$$(n+1)! > (n!)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Hieraus ergiebt sich $\sqrt[n+1]{(n+1)!} > \sqrt[n]{n!}$, so dass die Werte $\sqrt[n]{n!}$ mit wachsendem n immer grösser werden. Gäbe es nun für dieselben eine *endliche* Grenze R, so würde für jede angebbare Zahl n:

$$n! < R^n \quad \text{und also} \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{2}{R} \cdot \frac{3}{R} \cdots \frac{n}{R} < 1$$

sein. Dies erkennt man aber ohne Mühe als unmöglich.

§ 14. Princip der analytischen Fortsetzung.

Durch die Untersuchungen in § 12 und 13 wird eine höchst merkwürdige Gesetzmässigkeit offenbar, welche die Werte einer und derselben Function $f(z)$ für verschiedene Argumente z an einander bindet. Eine solche Gesetzmässigkeit trat uns bereits in Formel (6) pg. 119, welche einen Satz von Cauchy zum Ausdruck brachte, entgegen. Durch die Werte, welche die Function $f(z)$ auf der damaligen Integrationscurve C annahm, waren die Functionswerte im Innern von C bereits eindeutig bestimmt, eine Folge unserer ursprünglichen Forderung, dass das Innere von C durch $Z = f(z)$ „conform" auf die Z-Ebene abgebildet werden sollte.

Gegenwärtig knüpfen wir an das Theorem von pg. 126, nach welchem jede analytische Function $f(z)$ in der Umgebung irgend einer ihrer regulären Stellen z_0 entwickelbar ist in die Reihe:

$$(1) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z-z_0}{1} + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{1 \cdot 2} + f'''(z_0)\frac{(z-z_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

die innerhalb eines daselbst näher bezeichneten Kreises mit nicht verschwindendem Radius convergiert und ebendort die richtigen Functionswerte liefert. Dieser Kreis, dessen Identität mit dem Convergenz-

kreise K der Potenzreihe (1) noch festgestellt werden wird, war a. a. O. dadurch bestimmt, dass seine Peripherie durch einen an z_0 nächst gelegenen irregulären Punkt von $f(z)$ hindurchlaufen soll; nennen wir ihn demnach zunächst lieber K_1 und seinen Radius R_1, während wir die Bezeichnungen K und R ($\geqq R_1$) für den Convergenzkreis vorbehalten.

Man lege nun ein endliches, wenn auch noch so kleines Linienstück L durch den Punkt z_0 in der z-Ebene und denke die Werte der Function $f(z)$ längs L gegeben. Diese Werte reichen bereits zur Berechnung sämtlicher Coefficienten der Reihe (1) hin. Es entspringt das Theorem: *Sind die Werte der analytischen Function $f(z)$ längs des endlichen, wenn auch noch so kleinen Linienstücks L durch z_0 bestimmt, so sind damit bereits eindeutig die gesamten Werte von $f(z)$ innerhalb K_1 bestimmt.*

Der hiermit eingeleitete Process der Bestimmung unserer Function für irgend welche Stellen z aus solchen Functionswerten, welche in grösserer oder geringerer Entfernung von jenen Stellen stattfinden, soll als „*analytische Fortsetzung*" der Function bezeichnet werden. Das eben zuletzt aufgestellte Theorem liefert hierbei das Grundprincip; wir können dasselbe auch so aussprechen: *Eine analytische Function ist in der Umgebung jeder regulären Stelle nur in eindeutig bestimmter Weise analytisch fortsetzbar, und zwar wird diese Fortsetzung jedesmal durch die zu dieser Stelle gehörende Potenzreihe (Mac Laurin'sche Reihe) gegeben.*

Wir prüfen unser Princip der analytischen Fortsetzung zunächst im Falle einer fertig vorgelegten Function $f(z)$, was soviel heissen soll, dass die Functionswerte für alle regulären Stellen bekannt gegeben sein sollen. Mögen z_0 und z_1 zwei im Endlichen gelegene reguläre Stellen sein, die also von allen irregulären Punkten endliche Entfernung haben. Man wird dann (was freilich erst weiter unten als zulässig erkannt wird) von der Existenz einer z_0 und z_1 verbindenden Curve c endlicher Bogenlänge s ausgehen dürfen, welche keinem irregulären Punkte unendlich nahe kommt. Man wird hiernach eine von 0 verschiedene Zahl r so auswählen können, dass die Entfernung jedes Punktes der Curve c von jedem irregulären Punkte $> r$ ist.

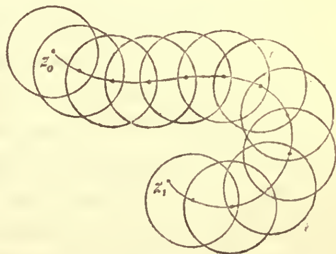


Fig. 33.

Längs c wird unsere Function stetig vom Anfangswerte $f(z_0)$ zum Endwerte $f(z_1)$ übergehen. Um nun diesen Übergang durch „analytische Fortsetzung" zu vollziehen, denken wir die Curve c, wie Figur 33

andeutet, mit lauter Kreisen der Radien r bedeckt, die ihre Mittelpunkte auf c haben. Jeder folgende Kreis soll seinen Mittelpunkt noch innerhalb der Peripherie des voraufgehenden haben. Wegen der Endlichkeit der Radien r und der Bogenlänge s reichen wir mit einer *endlichen* Anzahl von Kreisen zur vollständigen Bedeckung von c aus.

Wir haben nun für jeden Kreis eine Potenzreihe, welche innerhalb des Kreises sicher convergiert und die richtigen Functionswerte liefert. *Diese Potenzreihen können alsdann successive aus einander hergeleitet werden, und in der Durchführung dieser Herleitung wird unser Process der analytischen Fortsetzung bestehen.* Ein Linienstück L durch den Mittelpunkt des einzelnen Kreises liegt nämlich innerhalb des voraufgehenden Kreises. Die Potenzreihe des letzteren stellt daraufhin die längs L stattfindenden Functionswerte, und aus letzteren entspringt die nächstfolgende Reihe. Wir können somit die Functionswerte längs c aus diesem System „in einander fortsetzbarer Potenzreihen" berechnen und gelangen so von $f(z_0)$ zu $f(z_1)$. *Die analytische Fortsetzung gestattet hiernach die Berechnung der Function $f(z)$ von den in nächster Nähe des Punktes z_0 stattfindenden Werten aus für jede reguläre Stelle z_1.*

Zur Charakteristik dieser Berechnungsmethode von $f(z)$ diene gleich noch folgende Überlegung. Die oben gedachten Kreise lagern über die Curve c einen bandförmigen Bereich, dessen „Breite" überall $> r\sqrt{3}$ ist. Nehmen wir innerhalb dieses Bandes eine Deformation der Curve c in eine neue Gestalt c' unter Festhaltung des Anfangs- und Endpunktes, z_0 und z_1, vor, so würden die Functionswerte längs c' gleichfalls vermöge der bisherigen Reihen berechnet werden können, und man gelangt so wieder von $f(z_0)$ zu $f(z_1)$. Aber man wird dasselbe erreichen, wenn man längs c' den oben beschriebenen Process ausführt. Auf diese Erwägungen gründet sich folgendes Theorem: *Das Ergebnis der analytischen Fortsetzung einer Function längs einer Curve c bleibt dasselbe, falls man die Curve unter Festhaltung ihres Anfangs- und Endpunktes in solcher Weise stetig deformiert, dass man hierbei irregulären Punkten der Function niemals nahe kommt.*

Die Hinwegschiebung der Curve c über eine irreguläre Stelle kann aber sehr wohl das Ergebnis abändern. Wir drücken dies dahin aus, *dass die analytische Fortsetzung um eine irreguläre Stelle herum durchaus nicht wieder zu den Anfangswerten der Function zu führen braucht.* Wir gelangen hier wieder zum Charakter der *mehrdeutigen Functionen*, mit denen wir uns bereits oben (pg. 91 ff.) beschäftigten. Indem wir die z-Ebene ganz oder teilweise mehrfach überdeckt denken, wie es die Natur der einzelnen Function erfordert, schaffen wir uns,

wie damals, in *„mehrblättrigen Riemann'schen Flächen"* Mittel zur Versinnlichung des Verlaufs dieser Functionen.

Aus den letzten Erwägungen geht nun bereits die Bedeutung hervor, welche die analytische Fortsetzung bei der *Definition und Erzeugung analytischer Functionen* besitzt. Wir wollen, ehe wir dies in voller Allgemeinheit erörtern, zunächst eine damit zusammenhängende wichtige Ergänzung der bisherigen Entwicklung erledigen. Wir gehen auf das Ergebnis von § 12 pg. 126 zurück, nach welchem die damals vorgelegte Function $f(z)$ innerhalb eines Kreises K_1 um z_0, der bis zu einer an z_0 nächst gelegenen irregulären Stelle z_1 von $f(z)$ gerade heranreicht, durch eine Reihe:

$$(2) \qquad a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

darstellbar ist. Das Schlusstheorem in § 13 pg. 131 regt die Vermutung an, dass K_1 mit dem Convergenzkreise K dieser Reihe (2) identisch sei. Indessen nehme man an, dies sei nicht der Fall, der Kreis K greife vielmehr über K_1 hinaus. Die Reihe (2) liefert dann eine innerhalb K überall reguläre Function $f_1(z)$, die in K_1 genau mit $f(z)$ identisch ist. Man prüfe die gemachte Annahme für den Fall, dass in nächster Nähe von z_1 kein weiterer irregulärer Punkt von $f(z)$ vorkomme. Dann können wir $f(z)$ um z_1 herum analytisch fortsetzen, und wir gelangen wegen der oben bewiesenen Eindeutigkeit der Fortsetzung zu Functionswerten $f(z)$, welche in der Umgebung von z_1, von diesem Punkte z_1 allein abgesehen, genau mit $f_1(z)$ übereinstimmen.

Der Charakter des in Rede stehenden irregulären Punktes z_1 ist also der, dass die Function $f(z)$ im übrigen in der Umgebung von z_1 durchaus regulär ist, dass dagegen im Punkte z_1 nicht der nach dem Gesetze der Stetigkeit zutreffende Wert $\lim\limits_{z=z_1} f(z)$ vorliegen soll, sondern irgend ein davon verschiedener Wert. Das Vorkommen solcher durch Abänderung des einzelnen Functionswertes $f(z_1)$ hebbarer irregulärer Punkte ist zwar durch keine unserer bisherigen Definitionen ausgeschlossen. Solche Punkte aber auch weiterhin zuzulassen, würde sich weder als erforderlich noch nützlich erweisen. Wir stellen uns vielmehr jetzt gleich ganz allgemein auf den Standpunkt, *dass die einzelne Mac Laurin'sche Reihe* (2) *stets innerhalb ihres ganzen Convergenzkreises die richtigen Functionswerte liefert.*

Die irregulären Punkte, welche eine Function dann noch hat (und auf der Peripherie jedes endlichen Convergenzkreises kommt wenigstens einer vor), sind durch die innere Natur der Function selbst bestimmt. Wir können als Umkehrung des zweiten Theorems von pg. 133 geradezu aussprechen: *Ein irregulärer Punkt der Function wird von jeder solchen*

Stelle geliefert, der wir beim Process der analytischen Fortsetzung zwar beliebig nahe kommen können, die aber auf keine Weise in das Innere eines hierbei benutzten Convergenzkreises hineingezogen werden kann. Man kann auch sagen, *dass eine Darstellung* (2) *durch eine convergente Reihe in der Umgebung einer irregulären Stelle nicht existiert.* Die Convergenzradien der bei der Fortsetzung benutzten Reihen werden sich bei Annäherung an den irregulären Punkt dem Werte 0 nähern.

Man überblickt nun auch, wie man im Stande ist, jede denkbare analytische Function von ihren Werten in der nächsten Nähe einer Anfangsstelle z_0 aus durch den Process der analytischen Fortsetzung in vollem Umfange zu gewinnen. Wir werden von der Umgebung jener Stelle z_0 aus durch Ketten von convergenten Potenzreihen, die in oben bezeichneter Art aus einander zu bilden sind, die weiteren Werte der Function berechnen, wobei die einzelne Reihe innerhalb ihres Convergenzkreises allenthalben die der Function zukommenden Werte liefert. Man wird diesen Process erst dann als beendet ansehen, wenn die Fortsetzung desselben zu keinen neuen Functionswerten zu führen im Stande ist; *und der Inbegriff aller dann erreichten Functionswerte liefert uns erst die vollständige analytische Function,* wobei wir uns nur wegen der irregulären Punkte noch eine ergänzende Bemerkung vorbehalten.

Dass übrigens der bislang nicht besonders erwähnte Punkt $z = \infty$ hier keinerlei Schwierigkeit darbietet, wird man leicht erkennen. Wir führen einfach wieder die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ aus und verlegen die Untersuchung aus der Umgebung von $z' = \infty$ in diejenige von $z' = 0$.

Alle bei analytischer Fortsetzung von der Anfangsstelle z_0 aus erreichbaren Stellen z liefern einen zusammenhängenden Bereich, den wir den *„Definitionsbereich“* der Function nennen. Wir werden denselben, wie wir schon ausführten, nötigenfalls mehrblättrig über der z-Ebene lagernd finden. Jeder irreguläre Punkt wird ein *Randpunkt* des Definitionsbereichs sein. Bei den oben (pg. 91 ff.) betrachteten Functionen lagen solche irreguläre Randpunkte stets nur isoliert; so hatte $Z = e^z$ einzig $z = \infty$ zum irregulären Punkt. Aber man hat innerhalb der Theorie der sogen. automorphen Functionen neuerdings zahlreiche Beispiele von Functionen gefunden, bei denen ganze geschlossene Curven überall dicht mit irregulären Punkten besetzt sind. Eine solche *Grenzcurve des Definitionsbereichs* kann durch analytische Fortsetzung nicht überschritten werden; man nennt sie eine *„natürliche Grenze“* der Function, welche jenseits jener Grenze nicht existiert oder doch wenigstens nicht definiert ist.

Es bleibt jetzt nur noch die eine Frage über, ob wir unserer Function nicht auch im einzelnen ihrer irregulären Punkte z_1 einen Wert erteilen können. Giebt es bei Annäherung an z_1 vom Definitionsbereich aus unabhängig von der Richtung, in welcher wir an diesen Randpunkt z_1 herangehen mögen, einen bestimmten Grenzwert $\lim_{z=z_1} f(z)$, so werden wir diesen Grenzwert als Functionswert $f(z)$ wählen. In allen übrigen Fällen wird man von einer Bestimmung des Wertes $f(z_1)$ absehen.

§ 15. Natur der irregulären Punkte.

Die irregulären Punkte der Functionen teilen wir in drei Classen, bei deren Beschreibung uns die am Anfang des Kapitels betrachteten Beispiele gute Dienste leisten werden.

I. Wir nehmen an, dass sich die Function $f(z)$ bei Annäherung an den Punkt z_0 der Grenze ∞ nähere, jedoch so, dass das Product $f(z) \cdot (z - z_0)^m$ der Function und der Potenz $(z - z_0)^m$ mit *endlichem ganzzahligen positiven Exponenten* m in der Umgebung von z_0 regulär sei. Wir denken die Zahl m möglichst klein gewählt, d. i. so, dass $f(z) \cdot (z - z_0)^{m-1}$ noch keine bei z_0 reguläre Function darstellt. *Ein solcher irregulärer Punkt wird als ein „m-facher Pol" oder ein „Pol m^{ter} Ordnung" der Function $f(z)$ oder auch als ein „ausserwesentlich singulärer Punkt" von $f(z)$ bezeichnet.*

Da $f(z) \cdot (z - z_0)^m$ regulär bei z_0 ist, so existiert eine Darstellung:

$$f(z) \cdot (z - z_0)^m = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z - z_0) + a_{-(m-2)}(z - z_0)^2 + \cdots,$$

deren Convergenzradius die von 0 verschiedene Grösse R habe.

Hiernach lässt sich die Function $f(z)$ in der Umgebung der Stelle z_0, an der sie einen m-fachen Pol besitzt, durch die in jener Umgebung (abgesehen vom Punkte z_0 selber) convergente Reihe:

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(z) &= a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-(m-1)}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots \\ &\cdots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 \cdots \end{aligned}$$

darstellen. Man kann sagen, bei z_0 werde $f(z)$ *„m-fach unendlich"*; denn in (1) wird $a_{-m} \neq 0$ sein, da sonst bereits $f(z) \cdot (z - z)^{m-1}$ bei z_0 regulär wäre. Wir merken noch an, *dass $f(z)$ in der Umgebung des Poles z_0 eindeutig ist;* die analytische Fortsetzung um diesen irregulären Punkt herum führt somit zu den anfänglichen Functionswerten zurück.

Übrigens bemerken wir im Anschluss an (6) pg. 127 noch ausdrücklich, dass, wenn es sich um einen bei $z_0 = \infty$ gelegenen m-fachen Pol handelt, in der vorstehenden Entwicklung einfach $\frac{1}{z}$ an Stelle der Entwicklungsgrösse $(z - z_0)$ treten muss. *Hat die Function $f(z)$ bei*

$z_0 = \infty$ *einen m-fachen Pol, so gestattet sie in der Umgebung dieser Stelle die Darstellung*:

$$(2)\quad f(z) = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \cdots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Da die Reihe (1) innerhalb des Kreises vom Radius R um z_0, abgesehen von z_0 selbst convergiert, so ist $f(z)$ innerhalb dieses Kreises bis auf den Mittelpunkt überall endlich. *Man kann hiernach um jeden Pol einer Function $f(z)$ einen Kreis mit endlichem Radius beschreiben, innerhalb dessen kein weiterer Pol gelegen ist.*

Da $f(z) \cdot (z - z_0)^m$ bei z_0 von 0 verschieden ist, so liefern nach dem am Schlusse von § 6 pg. 105 u. f. ausgesprochenen Grundsatze die reciproken Werte von $f(z) \cdot (z - z_0)^m$ bei z_0 eine reguläre Function, darstellbar durch:

$$\frac{1}{f(z)\cdot(z - z_0)^m} = b_m + b_{m+1}(z - z_0) + b_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

mit $b_m \neq 0$. Hieraus entnehmen wir:

$$(3)\qquad \frac{1}{f(z)} = b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots.$$

Hat nun eine Function in der Umgebung der regulären Stelle z_0 eine Potenzreihe mit verschwindenden Anfangscoefficienten, und ist das erste Glied mit nicht verschwindendem Coefficienten dasjenige der Potenz $(z - z_0)^m$, so sagen wir, *die Function habe bei z_0 einen m-fachen Nullpunkt oder einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung.* Formel (3) lehrt: *Die reciproken Werte einer Function, welche bei z_0 einen m-fachen Pol besitzt, liefern eine bei z_0 reguläre Function, die ebenda einen m-fachen Nullpunkt aufweist; und auch umgekehrt wird ein m-facher Nullpunkt einer Function für die „reciproke Function" einen m-fachen Pol liefern.*

Den vorhin ausgesprochenen Satz von der isolierten Lage der Pole können wir daraufhin so verallgemeinern: *Nimmt die Function $f(z)$ an der regulären Stelle z_0 den Wert a_0 an, so kann man um z_0 einen Kreis mit endlichem Radius beschreiben, innerhalb dessen die Function an keiner zweiten Stelle gleich a_0 wird**). Die zu $f(z) - a_0$ reciproke Function hat nämlich bei z_0 einen Pol, der, wie bewiesen, isoliert liegt. *Eine Ausnahme von diesem Satze bildet jedoch der nach pg.* 104 *zulässige Fall, dass $f(z)$ beständig mit der Constanten a_0 gleich ist.*

II. An zweiter Stelle classificieren wir diejenigen irregulären Punkte, welche wir bereits oben (pg. 90 ff.) als *„Verzweigungspunkte mit endlicher Blätteranzahl"* kennen lernten. Die „Riemann'sche Fläche"

---

*) Ist insbesondere $z_0 = \infty$, so wird man den im Texte ausgesprochenen Satz zweckmässig auf die z-Kugel beziehen.

bot in der Umgebung eines solchen Punktes z_0 die Gestalt einer Schraubenfläche mit unendlich kleiner Ganghöhe dar (cf. p. 99). Bei Umlaufung des Verzweigungspunktes setzt sich jedes Blatt in das folgende fort. Aber indem wir die Forderung einer *endlichen* Anzahl ν von Blättern hier an die Spitze stellen, wird das oberste Blatt unter Durchschneidung der übrigen wieder zum untersten zurückführen (cf. Figuren 19 (pg. 91) und 22 (pg. 95)).

Unsere ν-blättrig überdeckte Umgebung von z_0 wird nun durch $\zeta = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ conform auf die einfach und vollständig bedeckte Umgebung von $\zeta = 0$ in der ζ-Ebene abgebildet, wobei nur die Winkel des Scheitelpunktes z_0 in der Abbildung auf ihre ν^{ten} Teile reduciert erscheinen. Man wird sich dies mit Hilfe der bei den Beispielen pg. 87 ff. zu Benutzung gekommenen Überlegungen leicht deutlich machen.

Wenn nun bei z_0 für $f(z)$ ein isoliert liegender irregulärer Punkt der jetzt in Rede stehenden Art vorliegt, so kommt dies eben darauf hinaus, dass sich $f(z)$ bei Umlaufung der Stelle z_0 als mehrdeutig erweist, und zwar als ν-deutig, insofern nach ν Umläufen die Anfangswerte der Function wieder erreicht werden. Wir sprechen demnach von ν „*Zweigen*" unserer Function, welche den Blättern der Fläche entsprechen. Gehen wir jetzt vermöge der vorhin angegebenen Transformation zur Umgebung von $\zeta = 0$ in der ζ-Ebene und setzen dementsprechend:

$$f(z) = f(z_0 + \zeta^\nu) = f_1(\zeta),$$

so ist $f_1(\zeta)$ in der Umgebung von $\zeta = 0$ eindeutig und regulär, falls wir als Wert $f(z_0) = f_1(0)$ den Grenzwert $\lim_{\zeta=0} f(\zeta)$ wählen. Indem man für $f_1(\zeta)$ seine Potenzreihe heranzieht und zu z zurückgeht, folgt der Satz: *Eine Function $f(z)$ gestattet in der Umgebung eines isoliert liegenden irregulären Punktes z_0, der ein Verzweigungspunkt mit endlicher Blätteranzahl ν ist, die Darstellung in einer convergenten Reihe:*

$$(4) \quad f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + a_2 (z - z_0)^{\frac{2}{\nu}} + a_3 (z - z_0)^{\frac{3}{\nu}} + \cdots.$$

Es ist hierbei stillschweigend angenommen, dass $\lim_{z=z_0} f(z)$ nicht ∞ ist. Wäre dies jedoch der Fall, so würde an Stelle von (4) die Entwicklung:

$$(5) \quad f(z) = a_{-m} (z - z_0)^{-\frac{m}{\nu}} + a_{-m+1} (z - z_0)^{-\frac{m-1}{\nu}} + \cdots$$
$$\cdots + a_{-1} (z - z_0)^{-\frac{1}{\nu}} + a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + \cdots$$

treten, und man würde sagen, *dass nun im Verzweigungspunkte zugleich ein m-facher Pol gelegen sei.*

Ist übrigens die fragliche irreguläre Stelle bei ∞ gelegen, so tritt in (4) und (5) wieder $\frac{1}{z}$ an Stelle von $(z - z_0)$.

III. Jede irreguläre Stelle, welche sich den bisher besprochenen Arten noch nicht einordnen lässt, wird als ein „*wesentlich singulärer Punkt*“ der Function bezeichnet.

Hierher werden wir *Verzweigungspunkte mit unendlich grosser Blätteranzahl* rechnen, wie wir einen solchen z. B. beim Studium der Function $\log z$ auffanden (cf. pg. 99).

Ganz besonders wichtig ist es, dass wir den Charakter wesentlich singulärer Stellen bei *eindeutigen* Functionen kennen lernen. Die Exponentialfunction e^z besitzt eine solche Stelle bei $z = \infty$. Setzen wir demnach der Anschaulichkeit halber $Z = e^{\frac{1}{z}}$, so wird der fragliche Punkt bei $z = 0$ gelegen sein.

Die conforme Beziehung, welche durch $Z = e^z$ zwischen den Ebenen von z und Z hergestellt wird, ist pg. 97 beschrieben und in Figur 23 daselbst versinnlicht. Man hat die z-Ebene in unendlich viele zur reellen Axe parallel laufende Streifen der Breite 2π zu zerlegen; jeder Streifen liefert ein einfaches und vollständiges Abbild der Z-Ebene, und zwar gewinnt man insbesondere die Werte $Z = 0$ und $Z = \infty$, wenn man sich im Streifen nach Seite der negativen bez. positiven reellen Axe dem Punkte $z = \infty$ annähert.

Man wolle jetzt auf die z-Ebene die pg. 82 ausführlich betrachtete durch $z' = \frac{1}{z}$ festgelegte Abbildung anwenden. Die Parallelstreifen gehen dabei in die durch Figur 34 angedeuteten Bereiche über, welche wir als durch Kreise begrenzte Sicheln mit je zwei an $z = 0$ heranragenden Spitzen bezeichnen können. Diese Sicheln häufen sich an der Stelle $z = 0$, so dass sich innerhalb eines um $z = 0$ zu legenden Kreises mit einem von 0 verschiedenen, wenn auch noch so klein gewählten Radius δ stets noch unendlich viele Sicheln finden. Nun ist aber jede Sichel ein vollständiges durch $Z = e^{\frac{1}{z}}$ vermitteltes Abbild der Z-Ebene. Man erkennt: *Innerhalb eines um den wesentlich singulären Punkt herumgelegten Kreises mit nicht-verschwindendem, aber beliebig klein gewähltem Radius δ nimmt die Function $Z = e^{\frac{1}{z}}$*

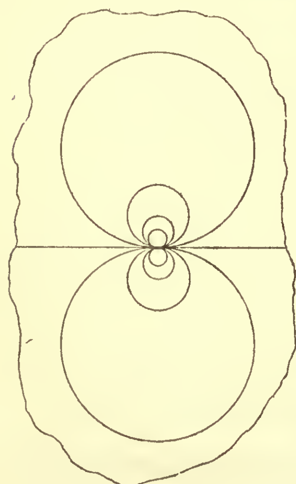


Fig. 34.

jeden einzelnen complexen Wert, abgesehen von den beiden Werten 0 *und* ∞, *noch unendlich oft an.*

Die beiden Werte 0, ∞ gewinnt man aber als Grenzwerte der Function, falls man sich der wesentlich singulären Stelle innerhalb der einzelnen Sichel, und also tangential zur reellen z-Axe annähert. Bei Annäherung an $z = 0$ in irgend einer anderen Richtung gewinnt die Function keine feste Grenze, ist vielmehr unaufhörlich Schwankungen unterworfen.

Ganz analoge Verhältnisse werden wir bei allen wesentlich singulären Stellen eindeutiger Functionen wiederfinden.

§ 16. Weiteres über Pole und Nullpunkte innerhalb eines Bereiches.

In der z-Ebene sei irgend ein Bereich B eingegrenzt, dessen Randcurve C aus einem oder mehreren Stücken bestehen mag. Innerhalb B sei $f(z)$ eindeutig und bis auf μ Pole überall regulär. Ist z_0 ein einzelner dieser Pole, und gilt für ihn:

$$(1)\quad f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

so bezeichnet man den Coefficienten a_{-1} der Potenz $(z-z_0)^{-1}$ als das „*Residuum*" des Poles z_0.

Man lege innerhalb des Convergenzkreises der einzelnen Reihe (1) um jeden der μ Pole als Mittelpunkt einen Kreis und wähle diese Kreise $k_1, k_2, \cdots k_\mu$ so klein, dass sie mit einander nicht collidieren und zugleich alle innerhalb des Bereiches B gelegen sind. Werden alsdann die Kreisflächen $k_1, k_2, \cdots k_\mu$ dem Bereiche B genommen, so wird im Restbereiche B' die Function $f(z)$ allenthalben regulär sein. Also muss nach einem pg. 117 bewiesenen Theoreme $\int f(z)\,dz$, über den gesamten aus C und den Peripherien von $k_1, k_2, \cdots k_\mu$ bestehenden Rand von B' ausgedehnt, verschwinden. Es folgt:

$$(2).\qquad \int\limits_{(C)} f(z)\,dz = \sum \int\limits_{(k)} f(z)\,dz,$$

wenn wir die μ rechts stehenden Kreisintegrale jedesmal in der für das Kreisinnere positiven Umlaufsrichtung ausgeführt denken. Wir können Formel (2) kurz dahin charakterisieren, dass es ohne Änderung des Integralwertes erlaubt ist, die Curve C auf die μ die Pole umgebenden Kreise zusammenzuziehen.

Für die Berechnung des einzelnen Kreisintegrals dürfen wir (cf. pg. 124) an Stelle von $f(z)$ die in (1) rechts stehende Reihe gliedweise integrieren. Hierbei aber liefert (cf. Aufgabe 2 pg. 120) allein

das Glied $a_{-1}(z - z_0)^{-1}$ einen von 0 verschiedenen Betrag, und zwar $2i\pi \cdot a_{-1}$. Also folgt der Satz: *Ist die Function $f(z)$ im Bereiche B eindeutig und bis auf μ Pole der Residuen $a'_{-1}, a''_{-1}, \cdots a^{(\mu)}_{-1}$ überall regulär, so gilt für die Summe der Residuen die Gleichung:*

$$(3) \qquad a'_{-1} + a''_{-1} + \cdots + a^{(\mu)}_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} f(z)\,dz,$$

wo das Integral in der positiven Umlaufsrichtung über den Rand von B auszudehnen ist.

Es wurde seinerzeit (pg. 108) festgesetzt, dass die für die Integralansätze zu benutzenden Bereiche B den Punkt ∞ nicht enthalten sollten. Nachdem wir zwischendurch gelernt haben, für die Entwicklung einer Function $f(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ bündige Aussagen zu machen, ist es an der Zeit, uns von der genannten Beschränkung zu befreien.

Wir fassen die Fälle, dass $f(z)$ in der Umgebung von $z = \infty$ regulär oder doch nur mit einem Pole behaftet ist, in den Ansatz zusammen:

$$(4) \quad f(z) = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \cdots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

wobei im Falle der Regularität die Coefficienten $a_{-m}, \cdots a_{-1}$ verschwinden.

Wir denken uns den Bereich B auf der „z-Kugel" gelegen und nehmen an, dass ausser den bisher gedachten μ Polen von $f(z)$ auch der Punkt $z = \infty$ im Innern von B liege. Die Randcurve C kann alsdann auf $(\mu + 1)$ Kreise um die μ Pole und den Punkt ∞ zusammengezogen werden. Der von den $(\mu + 1)$ Kreisinneren befreite Bereich B' hat eine Gestalt, wie sie in Figur 35 für ein zu $\mu = 3$ gehörendes Beispiel angezeigt ist. Diese Figur ist wieder in der z-Ebene gedacht; dortselbst wird der Kreis $k_{\mu+1}$ um ∞ ein die übrigen Kreise sowie C umschliessender Kreis mit dem Mittelpunkte $z = 0$ sein, dessen Radius so gross gewählt sein muss, dass auf und ausserhalb der Peripherie die Darstellung (4) von $f(z)$ gilt.

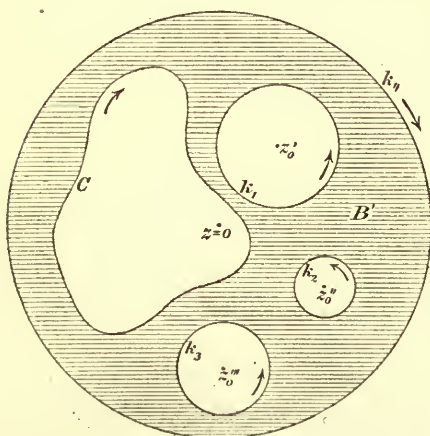


Fig. 35.

Führen wir $\int f(z)dz$ über den fraglichen Kreis $k_{\mu+1}$ in der richtigen (in Figur 35 durch den

Pfeil angegebenen) Richtung aus, so kommt, da man die Reihe (1) innerhalb des Bereiches gleichmässiger Convergenz gliedweise integrieren darf:

$$(5) \qquad \int\limits_{(k_\mu+1)} f(z)\,dz = -a_1 \cdot 2i\pi.$$

Hierauf basiert die Festsetzung: *Als „Residuum" der Function $f(z)$ für den Punkt ∞ bezeichnet man, gleichgültig ob daselbst ein Pol liegen mag oder Regularität besteht, den negativen Wert $-a_1$ des Coefficienten von z^{-1} in der zugehörigen Reihenentwicklung* (4). Im vorliegenden Falle tritt hiernach an Stelle der Formel (3) die folgende:

$$(6) \qquad -a_1 + a'_{-1} + a''_{-1} + \cdots + a^{(\mu)}_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} f(z)\,dz.$$

Zugleich merken wir an, *dass eine Integrationscurve auch im Falle der Regularität der zu integrierenden Function bei $z = \infty$ nur dann über diesen Punkt ohne Änderung des Integralwertes hinweggeschoben werden darf, wenn das zugehörige Residuum $= 0$ ist.*

Es sei jetzt im speciellen eine Function $f(z)$ vorgelegt, die auf der z-Kugel überall eindeutig und frei von wesentlich singulären Punkten ist. An irregulären Punkten hat also $f(z)$ nur Pole; wir werden alsbald erkennen, dass eine solche Function $f(z)$ eine rationale Function von z ist. Man ziehe nun auf der z-Kugel eine geschlossene Curve C, welche die Kugel in die beiden einfach zusammenhängenden Bereiche B und B' zerlegt. C sei derart gewählt, dass der Punkt $z = \infty$ sowie alle Pole von $f(z)$ in B liegen, während diese Function in B' überall regulär ist. Wegen des letzteren Umstandes wird $\int\limits_{(C)} f(z)\,dz$ verschwinden. Da aber C zugleich Randcurve des Bereiches B ist, so folgt auf Grund von Formel (6): *Ist $f(z)$ auf der ganzen Kugel eindeutig und bis auf endlich viele Pole regulär, so verschwindet die Summe aller zu diesen Polen und dem Punkte ∞ gehörenden Residuen.*

Es sei nach wie vor B ein beliebiger auf der z-Kugel gelegener Bereich, der den Punkt ∞ enthalten mag oder nicht. Die Function $f(z)$ sei auch weiter abgesehen von μ Polen der Ordnungen m_1, m_2, $\cdots m_\mu$ in B überall regulär und möge ebenda insgesamt ν Nullpunkte der Ordnungen n_1, n_2, $\cdots n_\nu$ aufweisen. Man kann alsdann für einen von ∞ verschiedenen Punkt z_0 von B schreiben:

$$(7) \qquad f(z) = (z - z_0)^l f_1(z),$$

wo $f_1(z)$ bei z_0 regulär und von 0 verschieden ist; dabei wird für ge-

wöhnlich $l = 0$ zutreffen, dagegen gilt $l = +n$ für einen Nullpunkt n^{ter} Ordnung, $l = -m$ für einen Pol m^{ter} Ordnung.

Aus (7) folgt:

$$(8) \qquad \frac{d \log f(z)}{dz} = \frac{l}{z - z_0} + \frac{d \log f_1(z)}{dz},$$

und da $f_1(z)$ bei z_0 regulär und von 0 verschieden ist, so ist nach früher bewiesenen Sätzen (pg. 99 und 105 u. f.) das letzte Glied rechter Hand bei z_0 regulär. Die in (8) links stehende Function ist hiernach bei z_0 regulär oder sie hat einen Pol vom Residuum l, je nachdem $f(z)$ ebenda endlich und von 0 verschieden ist oder einen Nullpunkt l^{ter} Ordnung hat; bei dieser Aussage ist jedoch ein Pol m^{ter} Ordnung als Nullpunkt der negativen Ordnung $l = -m$ mitgezählt.

Unter Benutzung des gleichen Sprachgebrauchs müssen wir für die Stelle ∞ unsere Function in der Gestalt $f(z) = z^{-l} f_1(z)$ ansetzen, wo $f_1(z)$ für $z = \infty$ regulär und $\neq 0$ ist. Es folgt:

$$\log f(z) = -l \log z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

$$\frac{d \log f(z)}{dz} = \frac{-l}{z} - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \cdots,$$

so dass die hier links stehende Function bei $z = \infty$ das Residuum l oder 0 bekommt, je nachdem $f(z)$ an dieser Stelle einen Nullpunkt l^{ter} Ordnung (Pol $-l^{\text{ter}}$ Ordnung) besitzt oder regulär ist.

Setzt man nun in der Formel (3) bez. (6) an Stelle von $f(z)$ die Function $\frac{d \log f(z)}{dz}$ ein, so ergiebt sich hiernach der folgende wichtige Satz: *Ist in einem den Punkt ∞ enthaltenden oder nicht enthaltenden Bereiche B die Function $f(z)$ eindeutig und bis auf μ Pole regulär, so kann man die Summe der Ordnungen aller in B liegenden Nullpunkte von $f(z)$, vermindert um die Summe aller Ordnungen $m_1, \cdots m_\mu$ der Pole, durch folgendes Integral darstellen:*

$$(9) \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - m_1 - m_2 - \cdots - m_\mu = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} d \log f(z),$$

auszudehnen über den Rand C von B in der positiven Umlaufsrichtung.

Als Beispiel wähle man eine ganze rationale Function m^{ten} Grades $f(z)$. Dieselbe hat nur einen Pol (bei $z = \infty$), und zwar von der Ordnung m. Sieht man demnach einen Nullpunkt n^{ter} Ordnung als äquivalent mit n zusammenfallenden einfachen Nullpunkten an, so ergiebt sich das Fundamentaltheorem der Algebra: *Eine ganze Function m^{ten} Grades besitzt stets m Nullpunkte erster Ordnung, die sich jedoch auch irgendwie zu Nullpunkten höherer Ordnung vereinigen können.* In

der That wolle man nur wieder wie oben die z-Kugel durch eine geschlossene Curve C in zwei solche Bereiche B, B' zerlegen, dass innerhalb B die Function $f(z)$ überall endlich und $\neq 0$ ist. Man findet für diesen Fall als Gestalt der Formel (9):

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - m = 0.$$

Übrigens lässt sich der Fundamentalsatz der Algebra leicht in die etwas allgemeinere Fassung umsetzen: *Jede rationale Function m^{ten} Grades von z nimmt einen beliebig vorzuschreibenden complexen Wert (∞ eingeschlossen) immer an m Stellen der z-Kugel an, die jedoch auch irgendwie zusammenfallen dürfen.*

§ 17. Laurent'sche Reihe für einen ringförmigen Bereich.

Eine weitere wichtige Anwendung unserer Integralansätze besteht in der Aufstellung der sogen. *Laurent'schen Reihe* *).

Es mögen in der z-Ebene um den im Endlichen gelegenen Punkt z_0 zwei concentrische Kreise k und K gezeichnet sein, von denen K der grössere ist. Dieselben grenzen einen zweifach zusammenhängenden ringförmigen Bereich B_2 ein. Die Function $f(z)$ sei innerhalb und auf dem Rande dieses Bereiches regulär. Dann liefert der Cauchy'sche Satz (6) pg. 119 für einen beliebigen Punkt z im Innern von B_2:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(k)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{1}$$

wenn hierbei die Integrationsvariabele ζ die Kreise in der Richtung durchläuft, welche für das jedesmalige Kreisinnere die positive Umlaufsrichtung ist.

Das erste Glied der rechten Seite der Formel (1) lässt sich nach der bereits pg. 125 u. f. befolgten Methode in eine convergente Potenzreihe:

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

entwickeln, wobei a_n gegeben ist durch:

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{2}$$

Für das zweite Integral in (1) setze man:

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(k)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(k)}\frac{f(z)\,d\zeta}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}.$$

*) Siehe die Comptes Rendus der Pariser Akad. von 1843 pg. 939.

Da jetzt $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ ist, so wird der letzte Factor unter dem Integral rechter Hand in eine convergente und gliedweise integrierbare Reihe entwickelbar sein. Man gewinnt:

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{(k)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \cdots,$$

wobei a_{-n} definiert ist durch:

$$(3) \qquad a_{-n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(k)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}d\zeta.$$

Es ergiebt sich hieraus das Theorem: *Die im ringförmigen Bereiche B_2 und auf dessen Rande allenthalben reguläre Function $f(z)$ gestattet die Entwicklung in eine innerhalb B_2 convergente sogen. Laurentsche Reihe:*

$$(4) \quad f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

wobei die Coefficienten durch die Formeln (2) *und* (3) *definiert sind.*

Man bemerke hierbei, *dass sich die Laurent'sche Reihe für $f(z)$ im Bereiche B_2 nur in einer einzigen Art ansetzen lässt*, d. h. dass die Coefficienten a in (4) eindeutig bestimmt sind, falls überhaupt eine convergente Entwicklung (4) in B_2 existiert. Es ist nämlich die Reihe $a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + \cdots$ ausserhalb k gleichmässig convergent und ebenso $a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$ innerhalb K. Ist demnach $\varkappa$ irgend ein im Bereiche B_2 verlaufender mit k und K concentrischer Kreis, und bedeutet n eine beliebige ganze positive oder negative Zahl oder 0, so folgt bei Integration längs des Kreises $\varkappa$:

$$\int_{(\varkappa)} f(z)(z - z_0)^{-n-1}\,dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{(\varkappa)} (z - z_0)^{m-n-1}dz.$$

Hier verschwinden alle rechts stehenden Integrale bis auf dasjenige mit $m = n$, welches letztere gleich $2i\pi$ wird (cf. Aufgabe 2 pg. 120). Es ist also in der That a_n eindeutig bestimmt durch:

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\varkappa)}\frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

In (4) liegt eine merkwürdige Zerlegung von $f(z)$ in die Summe zweier Functionen vor, die einzeln durch die Reihen:

$$(5) \qquad a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

$$(6) \qquad a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + \cdots$$

gegeben sind. Die erste Function ist innerhalb K überall regulär, die zweite ausserhalb k. Aber noch mehr: wir können K concentrisch mit sich selbst erweitern, bis wir an den nächsten irregulären Punkt von $f(z)$ und also von der durch (5) gelieferten Function gelangen. Ist K hierbei in K' übergegangen, so ist K' der Convergenzkreis von (5). Entsprechend werden wir k concentrisch mit sich selbst zum Convergenzkreise k' von (6) zusammenziehen können. *Diese beiden concentrischen Kreise k' und K', von denen jeder mindestens einen irregulären Punkt von $f(z)$ trägt, grenzen den wirklichen Convergenzbereich B_2' der Laurent'schen Reihe* (4) *ein.*

§ 18. Eindeutige Functionen.

I. Eine Function, die *für alle endlichen Punkte der z-Ebene regulär* ist, wird als eine *ganze Function* $G(z)$ bezeichnet. Sie ist für alle Werte von z, nötigenfalls von $z = \infty$ abgesehen, *eindeutig* und gestattet die Entwicklung in eine *beständig, d. i. für alle endlichen z convergente Reihe:*

$$(1) \qquad G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots,$$

wie aus den bezüglichen Theoremen in § 14 und 15 (pg. 132 und 137) hervorgeht.

Besitzt die Reihe (1) nur *endlich viele Glieder*, so möge $a_n z^n$ das höchste Glied mit nicht verschwindendem Coefficienten a sein. In diesem Falle ist $G(z)$ eine *ganze rationale Function n^{ten} Grades*; dieselbe hat bei $z = \infty$ einen Pol der n^{ten} Ordnung und besitzt hiernach auch bei $z = \infty$ einen eindeutig bestimmten Wert, nämlich ∞.

Liegt in (1) eine *unendliche* Reihe vor, so heisst $G(z)$ eine *ganze transcendente Function.* Es ist vor allem das Verhalten einer solchen ganzen transcendenten Function bei $z = \infty$ festzustellen.

Hierauf bezieht sich folgendes erste Theorem: *Ist ω ein beliebig gross, aber bestimmt gewählter Betrag, so giebt es für eine ganze transcendente Function $G(z)$ in jeder Umgebung von ∞ stets noch endliche z, für welche der absolute Betrag $|G(z)| > \omega$ ist.* Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde man nach Auswahl von ω einen Kreis K mit hinreichend grossem, übrigens aber willkürlich wählbaren Radius R um $z = 0$ legen können, längs dessen beständig $|G(z)| \leq \omega$ wäre. Die Coefficienten a_n der Reihe (1) sind gegeben durch:

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(K)} \frac{G(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

woraus man, wie pg. 127, für den absoluten Betrag $|a_n|$ die Folgerung

$|a_n| \leqq \frac{\omega}{R^n}$ ziehen würde. Da aber R nach Fixierung von ω noch beliebig vergrössert werden darf, so folgt $a_n = 0$ für alle $n > 0$. Unsere Function würde sich hiernach im gedachten Falle auf die Constante a_0 reducieren, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Übrigens bemerke man, *dass die Behauptung für die ganzen rationalen Functionen beliebigen Grades $n > 0$ zugleich mit bewiesen ist.*

Als zweiten Satz haben wir zu nennen: *Ist δ ein von 0 verschiedener, aber beliebig klein gewählter positiver Betrag, so giebt es für jede ganze transcendente Function ausserhalb eines um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit endlichem, aber beliebig gross gewählten Radius beschriebenen Kreises stets noch Stellen z, an denen $|G(z)| < \delta$ zutrifft.* Hat nämlich $G(z)$ *unendlich viele Nullpunkte,* so bemerke man, dass doch im Innern des gedachten Kreises nur endlich viele von diesen Nullpunkten liegen können; denn um jeden dieser Nullpunkte kann man nach pg. 138 einen endlichen Bereich eingrenzen, der frei von weiteren Nullpunkten ist. Ausserhalb jenes Kreises finden sich somit noch weitere Nullpunkte, womit der Satz in diesem Falle bewiesen ist. Hat indessen $G(z)$ nur die endlich vielen Nullpunkte $z_1, z_2, \cdots, z_\mu$ der Ordnungen $m_1, m_2, \cdots, m_\mu$, so wird $\frac{1}{G(z)}$ an eben diesen Stellen Pole der gleichen Ordnungen aufweisen und übrigens für alle endlichen z regulär sein. Für den einzelnen dieser Pole z_l gelte nach (1) pg. 137:

$$(2)\quad \frac{1}{G(z)} = \frac{a^{(l)}_{-m_l}}{(z-z_l)^{m_l}} + \frac{a^{(l)}_{-m_l+1}}{(z-z_l)^{m_l-1}} + \cdots + \frac{a^{(l)}_{-1}}{z-z_l} + a^{(l)}_0 + \cdots.$$

Setzt man daraufhin:

$$(3)\quad \frac{1}{G(z)} - \sum_{l=1}^{\mu}\left[\frac{a^{(l)}_{-1}}{z-z_l} + \frac{a^{(l)}_{-2}}{(z-z_l)^2} + \cdots + \frac{a^{(l)}_{-m_l}}{(z-z_l)^{m_l}}\right] = G_1(z),$$

so ist $G_1(z)$ eine für alle endlichen z reguläre und also ganze Function. Ist nun $G_1(z)$ nicht mit einer Constanten identisch, so wird es in der Umgebung von ∞ Stellen z geben, an denen $|G_1(z)|$ einen beliebig gross gewählten Betrag von ω überschreitet. Da aber die Summe auf der linken Seite von (3) für $\lim. z = \infty$ die Grenze 0 hat, so giebt es hiernach bei $z = \infty$ Stellen z, an denen $\frac{1}{G(z)}$ absolut den Betrag δ^{-1} übersteigt und also $|G(z)| < \delta$ ist. Wäre indessen $G_1(z)$ mit einer Constanten identisch, so wäre $\frac{1}{G(z)}$ in der Umgebung von ∞ regulär und somit $G(z)$ ebendort entweder selbst regulär oder mit

einem Pole endlicher Ordnung n behaftet. Wir hätten daraufhin nach Formel (2) pg. 138 die Entwicklung:

$$(4)\quad G(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots,$$

welche mit dem Ansatze (1) nur dann vereinbar ist, wenn $G(z)$ entgegen der Annahme eine „rationale“ ganze Function ist. Unsere Behauptung ist damit in allen Fällen bewiesen.

Ist Z_0 ein beliebig gewählter complexer Wert, so ist mit $G(z)$ auch $(G(z) - Z_0)$ eine ganze transcendente Function. Es folgt: *Ausserhalb jedes endlichen wenn auch noch so gross gewählten Kreises um den Nullpunkt giebt es Stellen z, an denen $G(z)$ dem Werte Z_0 beliebig nahe kommt; und zwar existieren daselbst noch unendlich viele solche Stellen.* Hat man nämlich eine erste gefunden, so kann man einen grösseren diese Stelle umschliessenden Kreis wählen, ausserhalb dessen dann eine zweite solche Stelle nachweisbar ist u. s. w. *Jede ganze transcendente Function $G(z)$ hat hiernach bei $z = \infty$ einen wesentlich singulären Punkt der Art, wie wir ihn an der ganzen transcendenten Function $G(z) = e^z$ oben (pg. 140) speciell kennen lernten.*

Auch noch folgenden wichtigen Satz können wir leicht zeigen: *Es giebt unendlich viele ganze transcendente Functionen ohne Nullpunkte; es sind dies die in der Gestalt:*

$$(5)\qquad G(z) = e^{g(z)}$$

mit beliebigen ganzen rationalen oder transcendenten Functionen $g(z)$ darstellbaren Functionen. Da nämlich die Exponentialfunction für alle endlichen Argumente regulär und $\neq 0$ ist, so ist jede in (5) dargestellte Function $G(z)$ ganz und ohne Nullpunkte. Ist andrerseits $G(z)$ irgend eine Function dieser Art, so erkennt man in $\log G(z)$ sofort eine ganze Function $g(z)$; denn der Logarithmus ist abgesehen von den Stellen 0 und ∞ regulär. Demnach ist in der That jede ganze transcendente Function ohne Nullpunkte in der Gestalt (5) darstellbar.

Endlich haben wir noch einige Ergänzungen über die ganzen rationalen Functionen nachzutragen. Eine ganze Function, die bei $z = \infty$ keinen wesentlich singulären Punkt hat, ist eine rationale ganze Function n^{ten} Grades und besitzt bei $z = \infty$ einen Pol n^{ter} Ordnung. Speciell für $n = 0$ folgt: *Eine auf der z-Kugel allenthalben reguläre Function ist mit einer Constanten identisch.*

Hat eine ganze rationale Function $G(z)$ die Nullpunkte $z_1, z_2, \cdot\cdot, z_\nu$ der Ordnungen $n_1, n_2, \cdot\cdot, n_\nu$, so ist (cf. pg. 144) die Summe der Ordnungen $n_1 + n_2 + \cdot\cdot + n_\nu = n$. Es folgt speciell, dass eine ganze

rationale Function ohne Nullpunkte eine Constante ist. Eben deshalb aber erkennt man sofort im Quotienten der eben gedachten Function $G(z)$ und des Productes $(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\cdots(z-z_\nu)^{n_\nu}$ eine Constante c. Es folgt: *Jede ganze rationale Function $G(z)$ vom n^{ten} Grade gestattet die „Linearfactorenzerlegung“:*

$$G(z)=c\,(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\cdots(z-z_\nu)^{n_\nu}, \tag{6}$$

wo c eine Constante ist und die Summe der Exponenten $n_1, n_2, \cdot\cdot, n_\nu$ gleich n ist. —

II. Es sollen jetzt solche Functionen betrachtet werden, die auch für endliche z unendlich werden können. Voran stellen wir folgenden Satz: *Eine Function $R(z)$, welche auf der ganzen z-Kugel eindeutig und frei von wesentlich singulären Stellen ist, ist eine „rationale“ Function von z.*

Eine solche Function muss nämlich, wenn sie nicht mit einer Constanten identisch ist, notwendig Pole haben. Die Anzahl der letzteren ist jedenfalls endlich. Wären nämlich unendlich viele Pole vorhanden, so würden dieselben auf der z-Kugel wenigstens eine Häufungsstelle darbieten. In der Umgebung dieser Stelle aber könnte keine für eine reguläre Stelle oder einen Pol charakteristische Potenzreihenentwicklung der Function bestehen (cf. pg. 137); hier würde also entgegen der Voraussetzung ein wesentlich singulärer Punkt der Function eintreten.

Mögen nun für $R(z)$ im ganzen die μ Pole $z_1, z_2, \cdot\cdot, z_\mu$ der Ordnungen $m_1, m_2, \cdot\cdot, m_\mu$ im Endlichen liegen, so können wir in der Umgebung des einzelnen unter ihnen, z_l, eine Entwicklung wie auf der rechten Seite von (2) pg. 148 für die vorgelegte Function $R(z)$ ansetzen. Daraufhin ist:

$$R(z)-\sum_{l=1}^{\mu}\left[\frac{a_{-1}^{(l)}}{z-z_l}+\frac{a_{-2}^{(l)}}{(z-z_l)^2}+\cdots+\frac{a_{-m_l}^{(l)}}{(z-z_l)^{m_l}}\right]$$

in der Umgebung jedes endlichen Wertes z regulär und also eine „ganze“ Function. Insbesondere haben wir mit einer ganzen „rationalen“ Function zu thun, da bei $z=\infty$ kein wesentlich singulärer Punkt derselben liegt. Hiernach hat $R(z)$ die Gestalt:

$$R(z)=a_0+a_1z+\cdot\cdot+a_nz^n$$
$$+\sum_{l=1}^{\mu}\left[\frac{a_{-1}^{(l)}}{z-z_l}+\frac{a_{-2}^{(l)}}{(z-z_l)^2}+\cdot\cdot+\frac{a_{-m_l}^{(l)}}{(z-z_l)^{m_l}}\right]. \tag{7}$$

Unsere Behauptung, $R(z)$ sei eine rationale Function von z, hat sich

damit bestätigt; in (7) liegt übrigens die *„Partialbruchzerlegung“* der rationalen Function $R(z)$ vor.

In dem Producte:

$$R(z)\cdot(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_\mu)^{m_\mu}$$

erkennt man sofort eine *ganze* rationale Function. Hat dieselbe die Nullpunkte $z_1', z_2', \cdots, z_\nu'$ der Ordnungen $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (6):

$$R(z)=c\,\frac{(z-z_1')^{n_1}(z-z_2')^{n_2}\cdots(z-z_\nu')^{n_\nu}}{(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_\mu)^{m_\mu}}\,. \tag{8}$$

Daraus folgt: *Eine rationale Function ist durch ihre Nullpunkte und Pole bis auf eine multiplicative Constante c fest bestimmt.*

III. Was weitere eindeutige Functionen betrifft, so kommt späterhin vor allem der Fall von Functionen in Betracht, die abgesehen von zwei bei $z=0$ und $z=\infty$ gelegenen wesentlich singulären Stellen überall regulär sind. Eine einzelne Function $f(z)$ dieser Art gestattet nach pg. 146 die Entwicklung in eine für alle endlichen von 0 verschiedenen z convergente Laurent'sche Reihe:

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots. \tag{9}$$

Hier liefert der Bestandteil $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ eine ganze transcendente Function $G(z)$, während der übrig bleibende Teil der Reihe (9) in Abhängigkeit von $\frac{1}{z}$ eine zweite ganze transcendente Function $G_1\left(\frac{1}{z}\right)$ darstellen würde. *Die gedachte Function wird sich demnach in die Gestalt setzen lassen:*

$$f(z)=G(z)+G_1\left(\frac{1}{z}\right)\cdot \tag{10}$$

Es würde nicht schwer sein, diesen Ansatz wieder unter Vermittlung der Laurent'schen Reihe auf eindeutige Functionen auszudehnen, die von endlich vielen Polen und gleichfalls endlich vielen wesentlich singulären Stellen abgesehen überall regulär sind.

Es sei endlich noch erwähnt, dass durch G. Mittag-Leffler*) Methoden zur Bildung eindeutiger Functionen mit unendlich vielen wesentlich singulären Stellen angegeben sind.

---

*) Siehe dessen Notizen *„Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable“*, Comptes rendus von 1882, sowie die Abhandlung *„Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes“*, Acta mathemat. Bd. 4 (1884).

Von anderer Seite her, nämlich aus der pg. 136 erwähnten Theorie der automorphen Functionen entspringen zahlreiche Arten eindeutiger Functionen mit unendlich vielen wesentlich singulären Punkten.

§ 19. Productdarstellung ganzer transcendenter Functionen.

Von hervorragendster Bedeutung ist die Möglichkeit, die Linearfactorenzerlegung ganzer rationaler Functionen auf ganze transcendente Functionen zu übertragen. Für eine ganze transcendente Function $G(z)$ mit *endlich* vielen Nullpunkten $z_1, z_2, \cdots, z_\nu$ der Ordnungen $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ ist diese Möglichkeit direct offenbar. Hier hat man:

$$(1) \qquad G(z) = e^{g(z)} (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_\nu)^{n_\nu};$$

denn der Quotient von $G(z)$ und $(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_\nu)^{n_\nu}$ ist eine ganze Function ohne Nullpunkte, welche sich auf Grund von (5) pg. 149 als Exponentialfunction $e^{g(z)}$ darstellt.

Hat $G(z)$ *unendlich* viele Nullpunkte, so dürfen wir annehmen, dass keiner derselben bei $z = 0$ gelegen ist. Hätte nämlich $G(z)$ an dieser Stelle einen ν-fachen Nullpunkt, so wäre $z^{-\nu} \cdot G(z)$ eine bei $z = 0$ nicht-verschwindende ganze Function, auf welche wir alsdann die weiter folgende Betrachtung beziehen würden. Wir bezeichnen nun die Nullpunkte von $G(z)$ durch $z_1, z_2, z_3, \cdots$ und wollen hierbei jeden einzelnen Nullpunkt so oft aufführen, als seine Ordnung angiebt. Für die Ausdrucksweise ist es eine Erleichterung, wenn wir die Anordnung der Nullpunkte so wählen, dass $|z_k| \geqq |z_{k-1}|$ beständig zutrifft.

Ist nun z_m irgend einer jener Nullpunkte und bedeutet $g_m(z)$ eine zunächst nicht näher specialisierte ganze Function, so bilden wir das Product:

$$(2) \qquad \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) e^{g_m(z)},$$

das wir als eine *„Primfunction“* bezeichnen wollen; dieselbe hat einen einzigen im Endlichen bei $z = z_m$ gelegenen Nullpunkt. Wird es möglich sein, unsere ganze Function $G(z)$ mittelbar oder unmittelbar durch das unendliche Product von Primfunctionen:

$$(3) \qquad \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) e^{g_m(z)},$$

welches gerade die vorgeschriebenen Nullpunkte besitzen würde, darzustellen oder nicht?

Um dies zu untersuchen, verstehen wir unter z einen ganz beliebig, aber bestimmt gewählten endlichen Wert und nennen den ab-

soluten Betrag $|z|$ kurz r. Im Innern und auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt finden sich nur endlich viele Nullpunkte $z_1, z_2, \cdot\cdot, z_{l-1}$. Die zugehörigen Factoren von (3) werden für sich genommen sicher eine ganze Function mit den erforderlichen Nullpunkten darstellen. Indem wir diese Factoren abseits lassen, kommt es für uns nur auf das Verhalten des unendlichen Productes:

$$(4) \qquad \prod_{m=l}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{g_m(z)}$$

an der gewählten Stelle z und in deren nächster Umgebung an.

Es gilt nun der Satz, *dass das Product* (4) *in der Umgebung der gedachten Stelle z sicher eine reguläre und ebendort nicht-verschwindende Function darstellt, falls die unendliche Reihe:*

$$(5) \qquad \sum_{m=l}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+g_m(z)\right]$$

in der Umgebung der Stelle z gleichmässig convergiert. Man nämlich für jedes endliche k:

$$(6) \qquad e^{\sum\limits_{m=l}^{k}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+g_m(z)\right]}=\prod_{m=l}^{k}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{g_m(z)}.$$

Da nun für lim. $k=\infty$ die linke Seite in der Umgebung von z eine reguläre und nicht-verschwindende Function liefern soll, so wird dasselbe auch vom rechtsseitigen Product, d. i. vom Product (4) gelten. Wir betonen weiter noch ausdrücklich: *Ist die Reihe* (5) *in der Umgebung von z „unbedingt“ und gleichmässig convergent, so stellt das Product nach beliebiger Abänderung der Factorenfolge dieselbe Function wie vordem dar.*

Indem wir uns zur Untersuchung der Reihe (5) wenden, müssen wir uns zunächst über die Gestalten der Functionen $g_m(z)$ schlüssig machen. Wird doch gerade die Convergenz unserer Reihe durch eine geschickte Auswahl der ganzen Functionen $g_m(z)$ erzielt werden, ein Umstand, der den Anlass bot, die Factoren $e^{g_m(z)}$ in (3) und die Glieder $g_m(z)$ in (5) als die *„convergenzerzeugenden Zusatzfactoren bez. Zusatzglieder“* zu benennen. Wir setzen aber:

$$(7) \qquad g_m(z)=\frac{z}{z_m}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_m}\right)^3+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_m}\right)^p,$$

wo p eine bestimmte und für alle Glieder der Reihe (5) gleiche positive ganze Zahl ist. Auch der Fall, dass $g_m(z)$ constant gleich 0 ist, soll nicht ausgeschlossen sein; wir sagen, dass alsdann $p=0$ sei.

Übrigens soll keineswegs behauptet werden, dass wir in jedem Falle mit ganzen rationalen Functionen $g_m(z)$ gleichen oder auch nur endlichen Grades die Convergenz von (5) erzielen könnten. Jedoch reicht unser Ansatz (7) in den späterhin in Betracht kommenden Fällen thatsächlich aus.

Da in (5) die sämtlichen Beträge $|z_m| = r_m > r$ sind, so kann man in jedem Gliede den Logarithmus in eine convergente Potenzreihe nach $\frac{z}{z_m}$ entwickeln. Die ersten p Glieder dieser Reihe heben sich gegen $g_m(z)$ gerade fort, und es bleibt:

$$(8) \qquad \sum_{m=l}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_m}\right)+g_m(z)\right] = -\sum_{m=l}^{\infty}\left[\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_m}\right)^n\right].$$

Man untersuche nun die rechts stehende Reihe auf absolute Convergenz. Die hierbei zulässigen Werte z sind zunächst näher zu beschreiben. Keiner von den absoluten Beträgen $r_l, r_{l+1}, \cdots$ ist kleiner als r_l, und es ist $r < r_l$. Entnimmt man demnach die Zahl ϱ dem Intervall $r < \varrho < r_l$ und setzt $\varrho = q \cdot r_l$, so ist q ein bestimmter echter Bruch, $q < 1$, und es ist $\varrho \leqq q r_m$ für alle $m \geqq l$. Fixiert man daraufhin die Umgebung der oben gewählten Stelle z innerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt, so wird für alle dieser Umgebung angehörenden z und bei sämtlichen $m = l,\ l+1,\ l+2, ..$ die Ungleichung:

$$(9) \qquad \frac{|z|}{|z_m|} = \frac{r}{r_m} < q$$

gelten. Für den Betrag des einzelnen Gliedes der auf m bezogenen Reihe (8) gilt nunmehr:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_m}\right)^n\right| \leqq \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_m}\right)^n < \left(\frac{r}{r_m}\right)^{p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_m}\right)^n,$$

woraus sich mit Rücksicht auf (9) ergiebt:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_m}\right)^n\right| < \frac{\varrho^{p+1}}{1-q}\cdot\left(\frac{1}{r_m}\right)^{p+1}.$$

Nehmen wir demnach an, dass die Reihe $\sum_{m=l}^{\infty}\left(\frac{1}{r_m}\right)^{p+1}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Reihe:

$$(10) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_m}\right)^{p+1}$$

convergiert, so ist die Reihe (8) absolut und also unbedingt convergent. Aber in (8) steht rechts eine Potenzreihe in z mit positiven ganz-

zahligen Exponenten; dass sie zunächst die Gestalt einer Doppelreihe hat, ist nach pg. 121 nur eine Formalität. Eine Potenzreihe ist nun im Innern ihres Convergenzkreises auch gleichmässig convergent. Dem Innern dieses Kreises aber gehört die von uns zuerst gewählte Stelle z an, da wir rings um dieselbe herum eine Umgebung abgrenzen konnten, in der die Potenzreihe überall convergiert.

Indem wir zusammenfassen, gelangen wir mit Rücksicht auf die Willkür der Auswahl unserer gedachten Stelle z zu folgendem Theoreme: *Wenn die Reihe* (10), *in welcher p eine nicht negative ganze Zahl ist, convergiert, so ist das unendliche Product:*

$$(11)\quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{g_m(z)} \quad \textit{mit}\ g_m(z)=\frac{z}{z_m}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_m}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_m}\right)^p$$

convergent und stellt unabhängig von der Reihenfolge der Factoren eine ganze transcendente Function mit den Nullpunkten $z_1, z_2, z_3, \cdots$ dar.

Dividieren wir nun mit dieser Function in die ursprünglich vorgelegte ganze transcendente Function, so ist der Quotient eine ganze Function ohne Nullpunkte und also nach (5) pg. 149 darstellbar. Gestatten wir gleich noch, dass auch bei $z=0$ ein Nullpunkt beliebiger Ordnung ν liegen darf, der jedoch in der Reihe $z_1, z_2, z_3, \cdots$ nicht mitgezählt wird, so entspringt als Fundamentalsatz: *Kann man eine endliche, nicht negative ganze Zahl p angeben, für welche die aus den Beträgen $r_m = |z_m|$ aller nicht bei $z=0$ gelegenen Nullpunkte der ganzen Function $G(z)$ gebildete Reihe* (10) *convergiert, so gestattet die ganze Function $G(z)$ die Darstellung:*

$$(12)\qquad G(z)=e^{g(z)}\cdot z^{\nu}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_m}\right)e^{g_m(z)},$$

wo $g(z)$ wieder eine ganze Function ist, ν eine nicht-negative ganze Zahl bedeutet und $g_m(z)$ gegeben ist durch:

$$(13)\qquad g_m(z)=\frac{z}{z_m}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_m}\right)^3+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_m}\right)^p.$$

Da die Zahlen r_m, von endlich vielen unter ihnen abgesehen, alle >1 sind, so wird die Reihe (10), falls sie für irgend eine Zahl p convergent ist, auch für alle grösseren Zahlen p convergieren. Indessen wird man für die Productdarstellung (12) unserer Function $G(z)$ zweckmässig die *kleinste* ganze Zahl p heranziehen, bei welcher Convergenz von (10) vorliegt. Diese Zahl p wird als die *„Höhe“* oder das *„Geschlecht“* der ganzen Function $G(z)$ bezeichnet, vorausgesetzt, dass die im ersten Factor der rechten Seite von (12) als Exponent von e auftretende ganze Function $g(z)$ rational und von einem Grade

$\leqq p$ ist. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, liefert der *Grad von* $g(z)$ die *„Höhe“* oder das *„Geschlecht“* von $G(z)$*).

Die Reihe (5) liefert, die Convergenz der Reihe (10) immer vorausgesetzt, im wesentlichen die Function $\log G(z)$; man hat nämlich:

$$(14)\quad \log G(z) = g(z) + \nu \log z + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\log\left(1 - \frac{z}{z_m}\right) + g_m(z)\right].$$

Die Natur der hier rechts stehenden Reihe ist die, dass zwar an der einzelnen Nullstelle z_m stets eines oder einige ihrer Glieder logarithmisch unendlich werden, dass aber eventuell von solchen einzelnen Gliedern abgesehen die Reihe für alle endlichen Werte z unbedingt und gleichmässig convergent ist.

Bilden wir nunmehr die abgeleitete Reihe:

$$(15)\quad \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z - z_m} + \frac{1}{z_m} + \frac{z}{z_m^2} + \frac{z^2}{z_m^3} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{z_m^p}\right],$$

indem wir den Ausdruck von $g_m(z)$ explicit benutzen, so ist zunächst wieder die unbedingte und gleichmässige Convergenz dieser Reihe für *alle* endlichen z beweisbar, sofern wir nur an den Stellen z_m je von dem einen unendlich werdendem Gliede bez. im Falle eines mehrfachen Nullpunktes von $G(z)$ von den unendlich werdenden Gliedern absehen. In der That gilt hier durchaus die obige Betrachtung. Man wähle irgend ein endliches z, sehe von den Gliedern mit $|z_m| \leqq |z|$ ab und entwickele das einzelne der übrigen Glieder unter Benutzung von:

$$\frac{1}{z - z_m} = -\frac{1}{z_m} - \frac{z}{z_m^2} - \frac{z^2}{z_m^3} - \frac{z^3}{z_m^4} - \cdots$$

nach Potenzen von z, wobei die Anfangsglieder bis $-\frac{z^{p-1}}{z_m^p}$ ausfallen. Man wird dann genau wie oben fortfahren und unter Voraussetzung der Convergenz der Reihe (10) die unbedingte und gleichmässige Convergenz unserer Reihe erkennen. Es zeigt sich sogar, dass die gleiche Überlegung noch sehr viel weiter reicht; man kann mit derselben im

*) An dieser Stelle setzen die wertvollen neueren Untersuchungen Hadamard's über ganze transcendente Functionen ein. Dieselben decken einen Zusammenhang zwischen den Coefficienten a_n der Potenzreihenentwicklung von $G(z)$ einerseits und dem Geschlecht, resp. der in (12) auftretenden ganzen Function $g(z)$ andrerseits auf. Es wird geradezu ein Theorem entwickelt, auf Grund dessen man aus der Abnahme der Beträge $|a_n|$ mit wachsendem n auf das Geschlecht von $G(z)$ zu schliessen vermag. Cf. J. Hadamard *„Étude sur les propriétés des fonctions entières en particulier d'une fonction considérée par Riemann“*, Journ. de Math., 4[te] Reihe, Bd. 9 (1893).

gleichen Umfange wie für (15) die absolute Convergenz derjenigen Reihe zeigen, welche man aus der Reihe (5) durch beliebig oft wiederholtes, sagen wir n-maliges, Differenzieren der einzelnen Glieder erzielt. Der einzige Unterschied ist, dass man im Verlaufe der Überlegung an Stelle der Convergenz der geometrischen Reihe $(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)$ für $q < 1$ diejenige der binomischen Reihe für $(1 - q)^{-n}$ benutzen muss.

Wir stützen uns nun auf das Differentialtheorem von pg. 124, indem wir den Satz aussprechen, *dass wir für jedes endliche z vermöge der eben gedachten abgeleiteten Reihen auch wirklich die Ableitungen der Function* $\log G(z)$ *darstellen können:*

$$(16)\begin{cases} \dfrac{d\log G(z)}{dz} = \dfrac{d\,g(z)}{dz} + \dfrac{\nu}{z} + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z-z_m} + \dfrac{1}{z_m} + \dfrac{z}{z_m^2} + \cdots + \dfrac{z^{p-1}}{z_m^p}\right), \\ \dfrac{d^2\log G(z)}{dz^2} = \dfrac{d^2 g(z)}{dz^2} - \dfrac{\nu}{z^2} - \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(z-z_m)^2} - \dfrac{1}{z_m^2} - \dfrac{2z}{z_m^3} - \cdots - \dfrac{(p-1)z^{p-2}}{z_m^p}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dass diese Darstellungen auch für die Nullpunkte $z_1, z_2, \cdots$ gelten, folgt freilich aus dem citierten Theoreme nicht ohne weiteres. Man erkennt dies aber für den einzelnen etwa ν-fachen Nullpunkt z_m leicht, indem man die durchlaufene Betrachtung zunächst auf die ganze Function:

$$G(z)\cdot\left(1-\frac{z}{z_m}\right)^{-\nu}\cdot e^{-\nu g_m(z)}$$

angewandt denkt.

§ 20. Productdarstellung der Function $\sin \pi z$.

Eines der einfachsten Beispiele zu den Erörterungen des vorigen Paragraphen liefert die Function $\sin \pi z$, welche eine ganze transcendente Function mit lauter einfachen bei $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ gelegenen Nullpunkten ist. Die Reihe (10) pg. 154 wird hier:

$$2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{p+1} + \cdots\right].$$

Dieselbe ist noch nicht für $p = 0$, wohl aber für $p = 1$ convergent. Es gilt nämlich die Ungleichung:

$$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{15^2}\right) + \cdots$$
$$< 1 + 2\cdot\frac{1}{2^2} + 4\cdot\frac{1}{4^2} + 8\cdot\frac{1}{8^2} + 16\cdot\frac{1}{16^2} + \cdots = 2.$$

Hiernach haben wir, da die Anordnung der Factoren beliebig wählbar ist, folgenden Ansatz:

$$\sin \pi z = e^{g(z)} \cdot z \prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{\frac{z}{m}},$$

wobei durch den oberen Index am Productzeichen angedeutet sein soll, dass $m = 0$ bei der Productbildung auszulassen ist.

Fasst man je die beiden Factoren für m und $-m$ in eins zusammen, so folgt:

$$\sin \pi z = e^{g(z)} \cdot z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right).$$

Die Function $g(z)$ ist hier constant $= \log \pi$, *so dass die Productdarstellung von sin πz geleistet wird durch:*

$$(1) \qquad \sin \pi z = \pi z \prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{\frac{z}{m}} = \pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right).$$

Zum Beweise der Angabe über $g(z)$ berufen wir uns der Kürze halber auf die für jede endliche Zahl n gültige Gleichung:

$$\frac{\sin \pi z}{n \sin \frac{\pi z}{n}} = \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{n}\right)}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}\right)^2\right],$$

welche für lim. $n = \infty$ die zweite Darstellung (1) von $\sin \pi z$ liefert.

Aus (1) folgt nach der ersten Formel (16) pg. 157 als *„Partialbruchreihe“ der Function* $\operatorname{ctg} \pi z$:

$$(2) \qquad \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m}\right),$$

wo der Index am Summenzeichen wieder andeuten soll, dass $m = 0$ auszulassen ist. Unter Zusammenfassung jeweils der zu m und $-m$ gehörenden Glieder folgt:

$$(3) \qquad \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{z+m}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2}.$$

Ist $|z| < 1$, so können wir die hier auftretende Summe nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen in eine convergente Potenzreihe verwandeln. Man hat des näheren:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{m^2} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right)^{-1} = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-2}}{m^{2n-2}}\right).$$

Ordnet man rechts nach ansteigenden Potenzen von z, so folgt:

$$\pi z \cdot \operatorname{ctg} \pi z = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}, \qquad a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{2n}.$$

Damit aber haben wir die Mac Laurin'sche Reihenentwicklung der Function $\pi z \cdot \operatorname{ctg} \pi z$ gewonnen, welche auch nach (6) pg. 131 direct berechnet werden kann und alsdann folgende Anfangsglieder hat:

$$\pi z \cdot \operatorname{ctg} \pi z = 1 - \frac{1}{3}(\pi z)^2 - \frac{1}{45}(\pi z)^4 - \frac{2}{945}(\pi z)^6 - \cdots.$$

Die Vergleichung der hier auftretenden Coefficienten mit denen der voraufgehenden Potenzreihe liefert die folgenden bemerkenswerten Formeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}, \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Aufgabe 1. Man leite die Productdarstellung der Function $\cos \pi z$ ab, welche wie $\sin \pi z$ eine ganze transcendente Function des Geschlechtes 1 ist.

Aufgabe 2. Man entwickele aus der Productformel für $\cos \pi z$ die Partialbruchreihe für $\operatorname{tg} \pi z$.

Aufgabe 3. Es ist auf Grund der Formel $\operatorname{tg} \pi z + \operatorname{ctg} \pi z = \frac{2}{\sin 2\pi z}$ die Partialbruchreihe für $\frac{1}{\sin \pi z}$ zu entwickeln.

§ 21. Die Γ-Function.

Zufolge der Entwicklung von $\log(1 + x)$ nach Potenzen von x gilt für alle ganzen Zahlen $m > 0$ die Ungleichung:

$$0 < \frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2m^2}.$$

Summiert man diese Ungleichungen für $m = 1$ bis ∞, so folgt mit Rücksicht auf (4) § 20:

$$0 < \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m} - \log\left(\frac{m+1}{m}\right)\right] < \frac{\pi^2}{12}.$$

Die hier auftretende Reihe aus lauter positiven Gliedern ist also convergent. Ihr Summenwert, der C genannt werden soll, ist angenähert $0{,}5772156649\cdots$; man bezeichnet diesen Wert C als die *„Euler'sche"* oder *„Mascheronische" Constante.* Übrigens kann man das Ergebnis auch durch die Grenzformel ausdrücken:

$$(1) \qquad \lim_{m=\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \log m\right] = C. -$$

Wir nehmen nun eine Hälftung des ersten in (1) pg. 158 für $\sin \pi z$ gegebenen Productes in der Art vor, dass wir die zu den positiven m gehörenden Factoren fortlassen. Das übrig bleibende Product versehen wir noch mit einem Exponentialfactor e^{az}, wobei der Coefficient a so gewählt sein soll, dass die ganze transcendente Function:

$$G(z) = e^{az} \cdot z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}$$

für $z = 1$ selbst den Wert 1 annimmt. Da man hat:

$$\log G(z) = az + \log z - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{z}{m} - \log\left(\frac{m+z}{m}\right)\right],$$

so muss man a gleich der Euler'schen Constanten C setzen.

Den reciproken Wert der ganzen Function $G(z)$ bezeichnet man als *„Gammafunction"* $\Gamma(z)$:

$$(2) \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} \cdot z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}.$$

Die Γ-Function ist hiernach eine transcendente Function, welche an den Stellen $z = 0, -1, -2, -3, \cdots$ lauter einfache Pole hat, übrigens aber für alle endlichen Werte z regulär und nicht-verschwindend ist und bei $z = \infty$ einen wesentlich singulären Punkt besitzt).*

Unter Benutzung von (1) können wir den reciproken Wert der Γ-Function als Grenzwert des Ausdrucks:

$$e^{\left(\frac{z}{1} + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z}{m-1} - z \log m\right)} \cdot z \left(1 + \frac{z}{1}\right) e^{-\frac{z}{1}} \left(1 + \frac{z}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}} \cdots \left(1 + \frac{z}{m-1}\right) e^{-\frac{z}{m-1}}$$

für $\lim. m = \infty$ ansehen. Dieser Ausdruck lässt sich leicht in den folgenden zusammenziehen:

$$e^{-\log(m^z)} \cdot z \cdot \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdot \frac{z+3}{3} \cdots \frac{z+m-1}{m-1}.$$

---

*) Die Bezeichnung Γ-Function rührt von Legendre her; die erste Untersuchung dieser und anderer damit verwandter Functionen hat Euler angestellt. In diesen sowie in den meisten späteren Darstellungen wird an eine Integralformel für die Γ-Function:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

angeknüpft. Die genannten Untersuchungen bleiben übrigens auf reelle Argumente z beschränkt.

Man gelangt hier zu derjenigen Definitionsgleichung, welche Gauss*) für die Γ-Function gegeben hat:

$$(3) \qquad \Gamma(z) = \lim_{m=\infty} \left[m^{z-1} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{2}{z+1} \cdot \frac{3}{z+2} \cdots \frac{m}{z+m-1} \right].$$

Um einige Fundamentalformeln für die Γ-Function abzuleiten, bemerken wir erstlich, dass offenbar der Quotient von $z\,\Gamma(z)$ und $\Gamma(z+1)$ eine ganze transcendente Function ohne Nullpunkte ist und als solche in der Gestalt $e^{g(z)}$ dargestellt werden kann. Aber diese letztere Exponentialfunction ist constant gleich 1; denn aus (3) ergiebt sich leicht:

$$\frac{\Gamma(z+1)}{z\,\Gamma(z)} = \lim_{m=\infty} \left(\frac{m}{z+m} \right) = 1.$$

Es gilt also die Regel:

$$(4) \qquad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Hieraus kann man mit Rücksicht auf $\Gamma(1) = 1$ den Wert der Γ-Function für alle positiven ganzen Zahlen $z = n$ durch Recursion berechnen; offenbar ergiebt sich:

$$(5) \qquad \Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1),$$

was man übrigens auch aus der vorhin unter dem Texte erwähnten Integraldarstellung von $\Gamma(z)$ leicht folgern kann.

Aus (2) entnimmt man:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{\frac{z}{m}}.$$

Setzt man hier $-z\,\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (1) pg. 158 als *Beziehung der Γ-Function zum Sinus:*

$$(6) \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Es folgt für $z = \frac{1}{2}$ bei Benutzung von (4):

$$(7) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \cdots.$$

Für irgend eine ganze Zahl $n > 1$ schliesst man aus (6) auf:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{n}}.$$

---

*) Siehe die „*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$“ Art. 18 ff., Gauss' Werke Bd. 3 pg. 144. An Stelle von $\Gamma(z)$ wird daselbst die Bezeichnung $\Pi(z-1)$ gebraucht.

Das rechts im Nenner stehende Sinusproduct hat, wie man in der Kreisteilungstheorie*) zeigt, den Wert $\frac{n}{2^{n-1}}$. Da die Γ-Function für reelle positive Argumente selber positiv und reell ist, *so besteht hiernach für* $\Gamma(z)$ *die weitere Regel:*

$$(8)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Formel (8) soll jetzt endlich noch verallgemeinert werden. Man bemerke, dass $\Gamma(nz)$ die Pole $0, \frac{-1}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{-3}{n}, \cdots$ hat, und dass eben dasselbe vom Producte:

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

gilt. Dies Product ist somit in der Gestalt $e^{g(z)}\,\Gamma(nz)$ darstellbar. Es muss nun $g(z)$ notwendig eine lineare Function sein; denn in den Productdarstellungen (2) aller hier auftretenden Γ-Functionen kommen überall nur Exponentialfactoren mit linearen Functionen von z in den Exponenten vor, so dass, falls:

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=e^{g(z)}\,\Gamma(nz)$$

in z identisch bestehen soll, $g(z)$ selbst den ersten Grad nicht übersteigen kann. Wir setzen demnach an:

$$(9)\quad \Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=ae^{bz}\,\Gamma(nz),$$

wo a und b constante Grössen sind. Zur Bestimmung der letzteren setzen wir erstlich $z+\frac{1}{n}$ an Stelle von z ein und finden unter Benutzung der Regel (4):

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)\cdot z\,\Gamma(z)=a\,e^{bz+\frac{b}{n}}\cdot nz\,\Gamma(nz).$$

---

*) Die betreffende Rechnung ist kurz die folgende. Erstlich hat man:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n}=\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{n}}-e^{-\frac{\nu\pi i}{n}}}{2i}=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\cdot e^{-\frac{\pi i}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu}\cdot\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}\right).$$

Die rechte Seite wird man leicht weiter zusammenfassen, wobei man den Wert des Productes aus der Gleichung:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}\right)$$

für $x=1$ zu n bestimmt. Damit ist die Angabe des Textes verificiert.

Die Division dieser Gleichung durch die voraufgehende liefert $ne^{\frac{b}{n}} = 1$, so dass $e^b = \frac{1}{n^n}$ wird. Tragen wir andrerseits $z = 0$ in Gleichung (9) ein und berücksichtigen, dass $\lim_{z=0} (z\,\Gamma(z)) = 1$ gilt, so folgt unter Benutzung der Formel (8):

$$\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} = a \cdot \frac{1}{n}\cdot$$

Für die Γ-Function besteht hiernach die Formel:

$$(10)\quad \Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\cdot n^{-nz}\,\Gamma(nz)\cdot$$

§ 22. Mehrdeutige Functionen. Zweiblättrige Riemann'sche Flächen.

Bei der analytischen Fortsetzung einer Function längs einer geschlossenen Curve wird man in dem Falle, dass im Innern jener Curve irreguläre Punkte der Function liegen, nicht notwendig zu den anfänglichen Werten der Function zurückgeführt werden. Gelangt man zu neuen Functionswerten, so liegt eine *„mehrdeutige" Function* vor; und wir besitzen dann in der zugehörigen *„Riemann'schen Fläche"* über der z-Ebene oder der z-Kugel ein wertvolles Hilfsmittel zur Veranschaulichung des „Verlaufs" der fraglichen Function.

Bei der Betrachtung der conformen Abbildungen in §§ 1 bis 5 haben wir bereits einige Beispiele mehrdeutiger Functionen und Riemannscher Flächen kennen gelernt. Insbesondere knüpfen wir jetzt nochmals an die unendlich-vieldeutige Function $\log z$ an, deren zugehörige unendlich-vielblättrige Fläche wir pg. 99 beschrieben. Es ist nämlich interessant, hier noch diejenige Auffassung der Vieldeutigkeit von $\log z$ zu erwähnen, welche Gauss in seinem pg. 75 genannten Briefe an Bessel entwickelt. Gauss knüpft daselbst an die Darstellung der Function $\log z$ durch das bestimmte Integral:

$$(1)\qquad \log z = \int_1^z \frac{dz}{z}$$

und erörtert die Grundeigenschaften der „complexen Integrale" an diesem Beispiele. Aus unseren obigen Theoremen geht ohne weiteres hervor, dass der Integralwert unverändert bleibt, wenn man die Integrationscurve unter Festhaltung ihres Anfangs- und Endpunktes derart

stetig deformiert, dass man sie weder über den irregulären Punkt $z=0$ der zu integrierenden Function $\frac{1}{z}$, noch über den Punkt $z=\infty$ des Residuums -1 hinwegschiebt. Ein geschlossener Umlauf um den irregulären Punkt $z=0$ (der auch als Umlauf um $z=\infty$ aufgefasst werden kann) liefert aber als Zuwachs des Integrales den Betrag $2i\pi$. Daraufhin gelangt man nun vermöge beliebig oft wiederholter Umläufe dieser Art direct zu der oben bereits besprochenen Vieldeutigkeit unserer Function zurück (cf. pg. 97). —

Zur Vorbereitung späterer Entwicklungen wollen wir hier nun vor allem solche *zweideutige* Functionen Z betrachten, welche definiert sind durch quadratische Gleichungen:

$$g_0(z)\,Z^2+g_1(z)\,Z+g_2(z)=0 \tag{2}$$

mit ganzen rationalen Functionen $g_0(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ als Coefficienten, von denen g_0 und g_2 nicht mit 0 identisch sein sollen. Durch Auflösung nach Z gewinnt man zunächst:

$$Z=\frac{-g_1(z)\pm\sqrt{g_1(z)^2-4\,g_0(z)\,g_2(z)}}{2\,g_0(z)}.$$

Unter dem Wurzelzeichen steht wieder eine ganze Function. Man zerlege dieselben in ihre Linearfactoren und wolle, falls mehrfach auftretende Linearfactoren vorhanden sind, einen möglichst grossen quadratischen Bestandteil absondern und vor das Wurzelzeichen ziehen. Man gewinnt so:

$$Z=R_1(z)\pm R_2(z)\sqrt{G(z)}, \tag{3}$$

wobei die ganze Function $G(z)$ von einem Grade $n>0$ sei und die Linearfactorenzerlegung:

$$G(z)=(z-z_1)\,(z-z_2)\cdots(z-z_n) \tag{4}$$

mit lauter von einander verschiedenen Factoren darbieten wird.

Die Hauptfrage ist, an welchen Stellen *Verzweigungspunkte* unserer zweideutigen Function Z gelegen sein mögen. Nun wird aber offenbar Z überall da eindeutig sein, wo dies von der etwa durch w zu bezeichnenden Wurzel $w=\sqrt{G(z)}$ gilt. Diese Function w kann als Product der n Functionen $\sqrt{z-z_1}$, $\sqrt{z-z_2}$, $\cdot\cdot$, $\sqrt{z-z_n}$ angesehen werden, deren einzelne in § 3 pg. 89 untersucht wurde. Wir stellten daselbst fest, dass die Function $\sqrt{z}$ bei $z=0$ und $z=\infty$ Verzweigungspunkte besass, insofern bei einmaligem Umlauf um einen dieser beiden Punkte $\sqrt{z}$ in $-\sqrt{z}$ überging, dass dagegen $\sqrt{z}$ in der nächsten Umgebung jedes anderen Punktes eindeutig ist. Es folgt, dass $\sqrt{z-z_k}$ allein die

Punkte z_k und ∞ zu Verzweigungspunkten hat. In der nächsten Umgebung von z_k sind die übrigen Wurzeln $\sqrt{z - z_1}, \cdot \cdot, \sqrt{z - z_{k-1}}$, $\sqrt{z - z_{k+1}}, \cdot \cdot, \sqrt{z - z_n}$ eindeutige Functionen: es wird somit w bei z_k einen Verzweigungspunkt haben. Führen wir auf der z-Kugel einen einmaligen Umlauf um $z = \infty$ aus, der keinen der Verzweigungspunkte $z_1, \cdot \cdot, z_n$ einschliesst, so erfährt jede der Wurzeln $\sqrt{z - z_k}$ einen Zeichenwechsel. Somit wird $w = \sqrt{G(z)}$ bei diesem Umlauf zu seinem Anfangswert zurückkehren oder einen Zeichenwechsel erfahren, je nachdem n gerade oder ungerade ist. *Die durch die quadratische Gleichung* (2) *definierte zweideutige Function Z hat die n Verzweigungspunkte $z_1, z_2, \cdot \cdot, z_n$, zu denen stets und nur dann noch als $(n+1)^{ter}$ Verzweigungspunkt der Punkt ∞ hinzutritt, wenn n ungerade ist.*

Man wolle jetzt einen einmaligen geschlossenen Umlauf um ν Verzweigungspunkte ausführen, welcher somit auf der z-Kugel ν Verzweigungspunkte von den $(n - \nu)$ bez. $(n + 1 - \nu)$ übrigen trennt. Bei diesem Umlauf wird offenbar Z seinen Anfangswert am Schlusse wieder annehmen oder einen Zeichenwechsel erfahren, je nachdem ν gerade oder ungerade ist. Wir können daraufhin die Zweideutigkeit der Function Z auf folgende Art durch eine zugehörige zweiblättrige Riemann'sche Fläche versinnlichen. Es sollen zwei Exemplare der z-Ebene (z-Kugel) über einander geschichtet werden, und in ihnen sollen die n bez. $(n+1)$ Verzweigungspunkte markiert werden. Man führe sodann einen durch beide Blätter hindurchgehenden Schnitt von z_1 nach z_2, einen zweiten ebensolchen Schnitt von z_3 nach z_4, einen dritten von z_5 nach z_6, einen letzten von z_{n-1} nach z_n resp. von z_n nach ∞. Über die Gestalt dieser Schnitte soll weiter nichts festgesetzt sein, als dass kein folgender einem schon gezeichneten Schnitte irgendwo unendlich nahe kommen soll. Die vier Ränder des einzelnen Schnittes sollen nun nicht, wie sie ursprünglich zusammenhingen, sondern über Kreuz wieder aneinander geheftet werden, d. h. der einzelne obere Rand an den gegenüberliegenden unteren Rand. *Führt man dies für alle $\frac{n}{2}$ bez. $\frac{n+1}{2}$ Schnitte aus, so hat man in der That eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche gewonnen, in welcher die durch Gleichung* (3) *gegebene Function Z eine „vom einzelnen Punkt der Fläche" eindeutig abhängige Function ist.*

Man wird sich dies mit Hilfe von Figur 36 vermöge des an die Spitze des vorigen Absatzes gestellten Satzes leicht deutlich machen. Die einzelnen „Verzweigungsschnitte" sind hier durch $S_1, S_2, \cdots$ bezeichnet. Eine in der Fläche verlaufende Curve wird beim Passieren eines Ver-

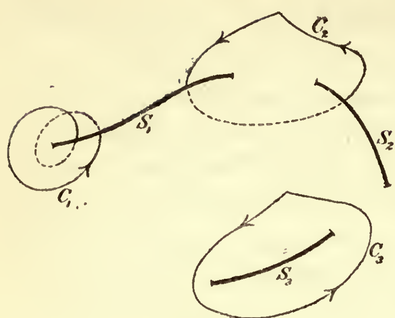


Fig. 36.

zweigungsschnittes jedesmal aus dem einen Blatte der Fläche in das andere führen. Die in der Figur gezeichneten Curven sollen, wo sie punktiert sind, als im unteren Blatte der Fläche gelegen vorgestellt werden. Die Curve C_1 wird den Zusammenhang der Fläche in der Umgebung eines Verzweigungspunktes angeben; diese Curve liefert nach zweimaligem Umlauf um z_1 eine auf der Fläche geschlossene Curve. Die Curven C_2 und C_3 stellen einmalige Umläufe um je zwei Verzweigungspunkte dar; sie müssen also im oberen Blatte endigen, wenn sie eben da beginnen.

Übrigens bemerke man noch, dass hier eine grosse Willkür in der Auswahl unserer Riemann'schen Fläche übrig bleibt. Einmal ist keinerlei bestimmte Reihenfolge vorgeschrieben, in welcher die Verzweigungspunkte mit $z_1, z_2, \cdots$ bezeichnet wurden. Sodann erkannten wir auch bereits den Verlauf der Verzweigungsschnitte zwischen je zwei Verzweigungspunkten als sehr willkürlich wählbar. Indessen ist jede unserer Vorschrift entsprechende Fläche zur Veranschaulichung des Verlauf der Function Z brauchbar. —

Es ist nun höchst bemerkenswert, dass die einzelne unserer Riemann'schen Flächen ein *„mehrfach zusammenhängendes“ Gebilde* in demselben Sinne darstellt, wie wir oben (pg. 102 ff.) von mehrfach zusammenhängenden Bereichen sprachen. In Figur 37 ist zunächst ein dreifach zusammenhängender Bereich durch die drei Randcurven C_1, C_2, C_3 eingegrenzt. In diesem Bereiche sind zwei sogen. *„Querschnitte“* Q_1 und Q_2 gezogen, von denen der erste einen Randpunkt von C_1 mit einem von C_2 verbindet, während der zweite von einem Punkte der Curve C_3 zu einem solchen von Q_1 läuft. Führt man diese beiden Schnitte als solche wirklich aus, so ist dadurch unser ursprünglich dreifach zusammenhängender Bereich in einen einfach zusammenhängenden verwandelt.

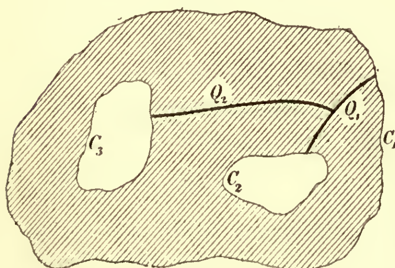


Fig. 37.

Wir haben hiermit einen für die allgemeine Theorie der mehrdeutigen, speciell der sogen. algebraischen Functionen höchst wichtigen

Gegenstand berührt. *Man kann geradezu einen Bereich dann als einen n-fach zusammenhängenden bezeichnen, wenn er durch $(n-1)$ passend gewählte Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt werden kann**).

Ohne auf die hier in Betracht kommenden allgemeinen Erörterungen weiter einzugehen, kehren wir zu unseren zweiblättrigen Riemann'schen Flächen zurück und wollen das für uns weiterhin wichtigste Beispiel einer solchen Fläche mit *vier* Verzweigungspunkten besonders betrachten. Es gilt der Satz, *dass unsere zweiblätterige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten ein „dreifach" zusammenhängendes Gebilde darstellt.*

Man wolle nämlich erstlich die in Figur 38 mit Q_1 bezeichnete im oberen Blatte gelegene Curve als Schnitt einführen. Dieser Schnitt verbindet freilich nicht wie die Schnitte in Figur 37 zwei Randpunkte des Bereiches, der ja hier als geschlossene Riemann'sche Fläche zunächst überhaupt keine Randpunkte besitzt; der Schnitt Q_1 kehrt vielmehr in sich selbst zurück und heisst in diesem Sinne auch wohl „Rückkehrschnitt". Nach Ausführung von Q_1 ziehe man einen zweiten Querschnitt Q_2 von einem „Uferpunkte" des Schnittes Q_1 nach dem gegenüberliegenden Punkte des anderen Ufers. Durch diese beiden Schnitte wird die Fläche noch nicht in getrennte Teile zerschnitten; denn man kann in der Fläche *ohne* Überschreitung von Q_1 oder Q_2 von jedem Uferpunkte eines dieser Schnitte zum gegenüberliegenden Uferpunkte gelangen, so dass weder Q_1 noch Q_2 eine Trennlinie zerfallender Teile der Fläche sein kann. Unsere ursprüngliche, d. i. noch nicht mit den Querschnitten Q_1, Q_2 versehene Fläche ist demnach wenigstens dreifach zusammenhängend.

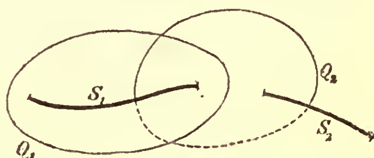


Fig. 38.

Etwas schwieriger ist einzusehen, dass sie auch keinen höheren Zusammenhang besitzt. Dies ergiebt sich aus der Thatsache, *dass sich unsere Fläche wechselweise eindeutig und stetig auf die Oberfläche eines Kreisringes beziehen lässt,* und dass sie eben deshalb denselben „Grad" des Zusammenhanges besitzt, wie die Kreisringfläche.

Es lässt sich in der That eine „stetige Deformation" unserer Fläche vornehmen, bei der dieselbe schliesslich die Gestalt der ge-

*) Vergl. z. B. H. Durège *„Elemente der Theorie der Functionen einer complexen Variabelen"* 3. Aufl., Leipzig (1882), neunter Abschnitt.

nannten Ringoberfläche annehmen wird. Bei dieser Umgestaltung kommt es nur auf die Lagen- und die Zusammenhangsverhältnisse unserer Fläche, nicht auf deren Massverhältnisse an; man sagt, es handele sich um eine Betrachtung im Sinne der „*analysis situs*".

Um die fragliche Deformation zu vollziehen, tragen wir zunächst Sorge, dass die vier Verzweigungspunkte auf der reellen z-Axe liegen, was nötigenfalls durch stetige Verschiebung dieser Punkte erreichbar ist. Die Verzweigungsschnitte denken wir dann gleichfalls längs der reellen z-Axe geführt. Die beiden Blätter der Fläche waren ursprünglich dadurch in Zusammenhang gesetzt, dass die Ränder der beiden Verzweigungsschnitte über Kreuz aneinander geheftet wurden. Wir wollen jetzt das obere Blatt *vor* Ausführung dieser Heftung um die reelle Axe umklappen, so dass der Punkt $(x+iy)$ des oberen Blattes über den Punkt $(x-iy)$ des unteren zu liegen kommt. Soll jetzt die Heftung vorgenommen werden, so sind die Ränder nicht über Kreuz einander zuzuordnen, sondern der einzelne Rand des oberen Blattes ist an den direct darunter liegenden Rand zu heften. Wir können die Fläche in ihrer jetzt gewonnenen Gestalt am besten versinnlichen, wenn wir die beiden Verzweigungsschnitte schlitzartig erweitern und übrigens beide Blätter ein wenig auseinander treiben. So entsteht das in Figur 39 gegebene Bild, in welchem man sich beide Blätter natürlich über die äusseren Randcurven fortgesetzt denken muss. Wir können diese Fortsetzung und namentlich den Zusammenhang beider Blätter bei ihren Punkten ∞ dadurch kenntlich machen, dass wir jedem Blatte nach aussen hin eine im Endlichen verlaufende kugelähnliche Gestalt verleihen, wie Figur 40 ausführt. Man bemerke, dass die *oberen* Seiten der ursprünglichen beiden Blätter unserer Fläche der *Aussenseite* der in Figur 40 dargestellten Fläche correspondieren. Die Möglichkeit der stetigen Umformung der jetzt erhaltenen Fläche in die Oberfläche des

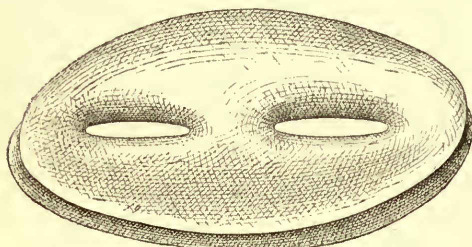


Fig. 39.

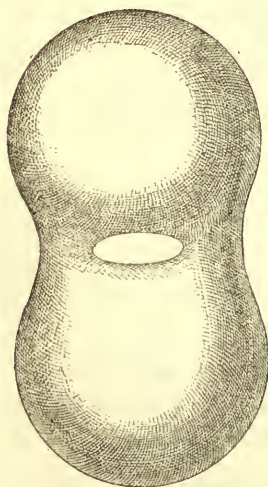
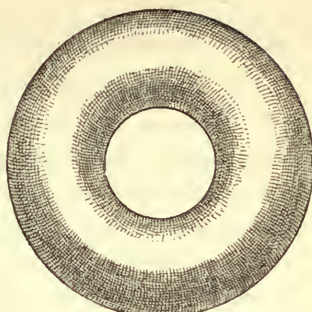


Fig. 40.

Kreisringes der Figur 41 ist nunmehr ohne weiteres evident.


Fig. 41.

Man überlege jetzt, welche Rolle die beiden Querschnitte Q_1, Q_2 auf dem Kreisringe spielen. Wir können, wie Figur 42 andeutet, Q_1 in einfachster Weise als „Meridiankreis", Q_2 als „Parallelkreis" annehmen. Durchschneidet man den Ring längs Q_1, so kann man denselben auseinander biegen und ihm so die Gestalt eines Kreiscylinders verleihen. Auf letzterem wäre dann, wie Figur 43 linker Hand zeigt, Q_2 eine Mantellinie. Denken wir längs der letzteren die Cylinderfläche durchschnitten, so kann man sie auf ein ebenes, einfach zusammenhängendes Viereck abwickeln (cf. Figur 43). *Unsere zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten ist hiernach in der That ein dreifach zusammenhängendes Gebilde; sie wird durch Ausführung der beiden Schnitte Q_1, Q_2 einfach zusammenhängend und lässt sich eindeutig und stetig auf die Fläche eines ebenen Vierecks beziehen, dessen Paare von Gegenseiten den Uferpaaren jener Schnitte Q_1, Q_2 entsprechen.*

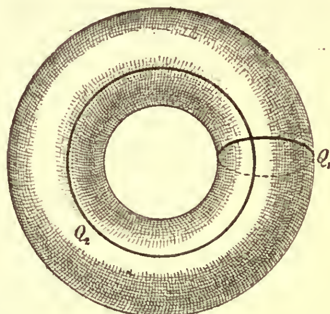


Fig. 42.

Es sei übrigens hier nochmals bemerkt, dass es sich bei der Abbildung unserer Riemann'schen Fläche auf die Fläche eines einfach bedeckten Vierecks zunächst nur um eine Betrachtung im Sinne der analysis situs und nicht um eine „conforme" Abbildung handelt. Erst im nächsten Kapitel werden wir auf jeder zweiblättrigen Fläche unserer Art eine Function kennen lernen, welche bei geeignetem Verlaufe der Querschnitte Q_1 und Q_2 als „conformes" Abbild der Fläche stets ein einfach bedecktes und geradlinig begrenztes Parallelogramm liefert.



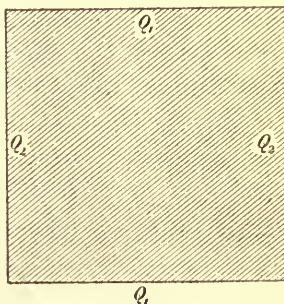


Fig. 43.

§ 23. Hauptrichtungen der Riemann'schen Functionentheorie.

Die voraufgehende Darstellung musste sich in der Hauptsache auf die Grundlagen der Theorie der Functionen einer complexen Variabelen beschränken. Beim weiteren Aufbau haben die Schöpfungen Riemann's einen besonders befruchtenden Einfluss ausgeübt; es sei erlaubt, hier am Schlusse noch einige Angaben über die Hauptrichtungen zu machen, in denen Riemann gewirkt hat.

Zuvörderst bietet sich die Verallgemeinerung des Ansatzes (2) pg. 164 auf die Gleichung n^{ten} Grades:

$$(1)\qquad g_0(z)\,Z^n + g_1(z)\,Z^{n-1} + g_2(z)\,Z^{n-2} + \cdots + g_n(z) = 0$$

fast von selbst dar. Hier sollen $g_0(z), \cdots, g_n(z)$ ganze rationale Functionen von z sein, von denen g_0 und g_n nicht mit 0 identisch sein mögen. Die Gleichung (1) werden wir etwa als irreducibel voraussetzen; d. h. es soll nicht möglich sein, die linke Seite der Gleichung in zwei Factoren zu zerlegen, die beide in z und Z rational und ganz wären. Die durch solche Gleichungen definierbaren Functionen Z von z werden allgemein als *algebraische Functionen* bezeichnet.

Speciell die Gleichung (1) definiert eine *n-deutige* Function Z von z. Der Zusammenhang der n „Zweige" dieser Function wird versinnlicht werden können durch eine die z-Kugel n-fach überdeckende *Riemann'sche Fläche*, deren Blätter in „Verzweigungspunkten" zusammenhängen und über „Verzeigungsschnitte" in einander übergehen. In dieser Fläche ist Z eine eindeutige Function des Ortes, und dasselbe gilt mit Z offenbar von jeder rationalen Function $R(Z, z)$ von Z und z. Alle diese aus dem vorliegenden Z und z zu bildenden Functionen $R(Z, z)$ liefern ein Functionensystem, welches man nach Weierstrass als ein *„algebraisches Gebilde"* bezeichnet. Es ist ein Fundamentalsatz dieser Theorie, *dass die Functionen $R(Z, z)$ auf der Fläche überall frei von wesentlich singulären Punkten sind.*

Von grösster Bedeutung ist es, den *Grad des Zusammenhanges* der Riemann'schen Fläche festzustellen. Die Anzahl der Verzweigungspunkte ist in jedem Falle (1) eine endliche, und der Grad des Zusammenhanges erweist sich als eine ungerade positive Zahl $(2p+1)$. Die hierbei eintretende ganze Zahl p heisst das *„Geschlecht"* der Fläche; es entspringt eine erste grosse *Einteilung aller algebraischen Gebilde nach dem Geschlechte p.*

Einen besonders breiten Raum nimmt die Lehre von der *Zerschneidung der Riemann'schen Fläche durch $2p$ Schnitte $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{2p}$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich ein.* Man gewinnt hiermit

die Grundlage für die Untersuchung der *zur Fläche bez. zum algebraischen Gebilde gehörenden Integrale:*

$$\int R(Z, z)\, dz.$$

Diese „algebraischen" oder „Abel'schen" Integrale ihrerseits aber liefern den Eingang in die *Theorie der Abel'schen Functionen* und speciell für $p = 1$ in diejenige der *elliptischen Functionen,* auf welche letztere wir im nächsten Kapitel ausführlich zurückkommen*).

Die Riemann'schen Ansätze enthalten nun aber noch mehr. *Man kann durch eine Riemann'sche Fläche unserer Art ein zugehöriges algebraisches Gebilde geradezu als definiert ansehen,* d. h. falls man eine derartige Riemann'sche Fläche willkürlich auswählt, so giebt es gleichwohl stets eine und damit unendlich viele Functionen Z von z, welche von sich aus zu dieser Fläche hingeführt hätten. Es hängt dies zusammen mit einem Grundprincip der Riemann'schen Auffassungen, über welches wir hier gleichfalls kurz berichten wollen.

Ist $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Bereiche B_1 überall regulär, so geht aus dem Cauchy'schen Satze (6) pg. 119 hervor, dass die Functionswerte innerhalb B_1 durch diejenigen auf dem Rande bereits vollständig bestimmt sind. Wenden wir dies insbesondere auf den reellen Bestandteil $X(x, y)$ unserer Function an, so würden wir im Anschluss an dieses Sachverhältnis das folgende Problem formulieren können: *Längs des Randes vom einfach zusammenhängenden Bereiche B_1 ist eine etwa stetige Folge reeller Werte gegeben; gesucht ist eine der Laplace'schen Differentialgleichung genügende, im Bereiche B_1 überall eindeutige, stetige und differenzierbare Function $X(x, y)$, welche stetig in die vorgeschriebenen Randwerte übergeht.*

Diese sogen. „*Randwertaufgabe*" ist im Anschluss an Riemann mit neuen und weittragenden Mitteln für zahlreiche Bereiche B_1 von Schwarz**) und C. Neumann***) behandelt; und es ist letzterem im Verfolg dieser Untersuchungen auch gelungen, die oben formulierte

---

*) Siehe über die Theorie der algebraischen Functionen die beiden pg. 76 genannten Abhandlungen Riemann's. Von neueren einführenden Werken sei neben dem pg. 76 citierten Buche von Durège vor allem genannt; Appell et Goursat „*Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*", Paris (1895).

**) Siehe die Abhandlung „*Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren*", Vierteljahrsschrift der Züricher naturforsch. Gesellsch. von 1870, sowie eine Mitteilung in den Berliner Monatsberichten vom Oct. 1870.

***) Vergl. die beiden Werke „*Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*" (Leipzig 1877), „*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*", 2. Aufl. (Leipzig, 1884).

Behauptung Riemann's von der Existenz eines zugehörigen algebraischen Gebildes bei beliebig gewählter Fläche einwandfrei darzuthun.

Eine höchst folgenreiche Fassung des hier in Rede stehenden Riemann'schen Grundprincips ist diese: *Ist wieder ein einfach zusammenhängender Bereich B_1 gegeben, so existiert eine innerhalb B_1 eindeutige, stetige und reguläre Function $Z = f(z)$, welche B_1 auf die Fläche irgend eines in der Z-Ebene willkürlich gewählten Kreises abbildet; zugleich ist diese Function eindeutig bestimmt, falls man drei Punkten des Randes von B_1 irgend drei in derselben Ordnung auf einander folgende Punkte der Kreisperipherie zuordnet.* Dieses Theorem ist vermöge der von Schwarz und Neumann entwickelten Methoden insbesondere für alle diejenigen Bereiche B_1 beweisbar, welche *Kreisbogenpolygone endlicher Seitenzahl* darstellen, deren Rand also durch eine Kette endlich vieler Kreisbogen gebildet wird (cf. Figur 44). Die zu diesen Polygonen gehörenden abbildenden Functionen $Z = f(z)$ bilden eine specielle Gattung der sogen. *„automorphen Functionen“*, deren Theorie von F. Klein*) und H. Poincaré**) ausgebildet worden ist.

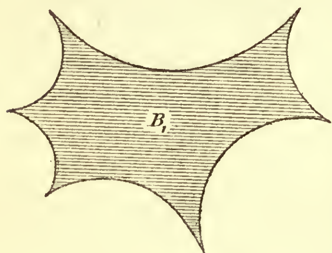


Fig. 44.

*) Siehe die *„Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen“* von Klein und Fricke (Leipzig 1890 und 1892), sowie die *„Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen“* von den gleichen Verfassern (erster Band, Leipzig, 1897).

**) Man vergl. dessen Abhandlungen über Fuchs'sche und Klein'sche Gruppen und Functionen in den ersten Bänden der Acta mathematica (1881 u. f.).

Viertes Kapitel.

Elliptische Functionen.

Die Tragweite der im vorigen Kapitel entwickelten allgemeinen Theoreme soll jetzt dadurch geprüft werden, dass wir dieselben zur Grundlage für eine Theorie der „elliptischen" oder „doppeltperiodischen" Functionen machen. Einfach-periodische Functionen kennt bereits die Elementarmathematik; so hat z. B. die Function $f(z) = e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$ die „Periode" ω. Dagegen gehören die doppeltperiodischen Functionen dem Gebiete der elementaren transcendenten Functionen nicht mehr an.

Die Anfänge derjenigen Entwicklungen, welche zur Schöpfung der Theorie der elliptischen Functionen hinführten, reichen weit in das vorige Jahrhundert zurück und knüpfen zumeist an die Rectification von Ellipse und Hyperbel an, wo man zu speciellen „elliptischen Integralen" hingeführt wurde. Vor allem ist es Euler gewesen, welcher in dieser Richtung weit vordrang, und z. B. die „Additionstheoreme" der elliptischen Integrale auffand. Neben Lagrange widmete sich sodann vornehmlich Legendre seit Mitte der achtziger Jahre vorigen Jahrhunderts der von Euler u. A. eingeschlagenen Untersuchungsrichtung mit der grössten Ausführlichkeit; sein grosses Werk „*Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*"*) giebt umfassenden Bericht über die Ergebnisse und Anschauungen, welche er hierbei gewonnen hat.

Eine höchst universelle Kenntnis der Theorie der elliptischen Functionen hat Gauss besessen. Er ist, wie seine bezüglichen nachgelassenen Schriften und Aufzeichnungen**) erkennen lassen, von verschiedenen Seiten an die Theorie der elliptischen Functionen herangegangen. Erstlich liegen ausgedehnte Untersuchungen über den Specialfall der sogen. „lemniscatischen" Functionen vor. Die hier ge-

---

*) Paris (1825—28).

**) Siehe Gauss' Werke Bd. 3, pg. 361 ff., sowie die bezügl. Ergänzungen in Bd. 8.

wonnenen Ansätze sind von Gauss alsdann frühzeitig auf den allgemeinen Fall übertragen. Vor allem aber ist Gauss mit dem grössten Erfolge auf dem vor ihm schon von Landen und Lagrange betretenen Wege weitergegangen, von Seiten der sogen. „Transformation zweiten Grades" in die Theorie der elliptischen Functionen hineinzugelangen. Es handelt sich um Gauss' Untersuchungen über das „arithmetisch-geometrische Mittel", welche eine zwar schwer zugängliche, aber höchst vielseitig entwickelte Theorie unserer Functionen enthalten. Als besonders bemerkenswert ist hierbei immer genannt, dass Gauss die Eigenschaften und die Darstellung der Thetafunctionen fast 30 Jahre früher gekannt hat, ehe Jacobi dieselben aufs neue fand. Es ist sehr zu beklagen, dass Gauss nicht die Zeit gewinnen konnte, die reichen Ergebnisse seiner Forschungen über elliptische Functionen zu einer reifen und abgerundeten Theorie auszugestalten.

Dass Gauss die Kenntnis des Princips der doppelten Periode bereits zu Ende vorigen Jahrhunderts besessen hat, ist seit Dirichlet die herrschende Ansicht. Zum wesentlichen Fundament der ganzen Theorie aber wird dieses Princip erst bei Jacobi und Abel, welche in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts an die elliptischen Functionen ohne Kenntnis der Gauss'schen Ergebnisse herangingen, und deren geniale Forschungen der Theorie im wesentlichen diejenige Gestalt gaben, welche bleibend geworden ist. Jacobi hat den grössten Teil seiner gedachten Untersuchungen in seinem berühmten Werke „*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*"*) niedergelegt. Abel's Abhandlungen über elliptische Functionen erschienen zuerst in den ersten Bänden des Crelle'schen Journals**).

Eine höchst wichtige Ergänzung hat die Theorie der doppeltperiodischen Functionen endlich durch die Untersuchungen von Eisenstein***) und Weierstrass†) erfahren. Die von Eisenstein durch unendliche Producte und Partialbruchreihen definierten Functionen und die zwischen letzteren aufgestellten Relationen sind eben die, welche später bei Weierstrass wiederkehren. Wenn man gleichwohl diese ganze Theorie mit Weierstrass Namen in Verbindung setzt, so hat

---

*) Königsberg (1829); siehe übrigens Jacobi's ges. Werke Bd. 1, Berlin (1881).

**) Berlin (1826 u. f.). Eine neue Ausgabe von Abel's gesammelten Werken ist von Sylow und Lie veranstaltet (Christiania 1881).

***) „*Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind*", Crelle's Journ. für Mathem. Bd. 35 (1847).

†) Man vergl. z. B. die „*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*", nach Vorlesungen und Aufzeichnungen von Weierstrass bearbeitet von H. A. Schwarz, Göttingen (1881—85).

dies seinen Grund darin, dass Weierstrass mit viel tiefer begründeten und der Verallgemeinerung fähigen functionentheoretischen Anschauungen an die elliptischen Functionen herangeführt wurde und eine weit abgeschlossenere Theorie geschaffen hat, als die Eisenstein'schen Ansätze darstellen. Weierstrass' Functionen sollen hier vorangestellt werden, die Behandlung von Jacobi's Functionen wird sich in der zweiten Hälfte des Kapitels anreihen. Wegen der tiefer liegenden Erörterungen über das gegenseitige Verhältnis der beiderseitigen Theorien von Jacobi und Weierstrass muss auf Seite 1 bis 8 im zweiten Bande der *„Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen“* von Klein und Fricke*) verwiesen werden.

Unter den zahlreichen Lehrbüchern über elliptische Functionen sei erstlich Halphen's *„Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications“* **) genannt. Für das einführende Studium eignen sich Appell-Lacour, *„Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications“* ***), L. Lévy, *„Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications“* †), sowie das jüngst erschienene Werk H. Burkhardt's, *„Elliptische Functionen“* ††). Eine ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwicklung unserer Theorie findet man bei Enneper, *„Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte“* †††).

§ 1. Begriff der doppeltperiodischen Functionen. Periodenparallelogramm.

Es ist eine ziemlich allgemein üblich gewordene Bezeichnungsweise, dass man die unabhängige complexe Variabele, welche das Argument der doppeltperiodischen Functionen bilden soll, mit u benennt. Es seien weiter ω_1, ω_2 zwei bestimmte, aber zunächst ganz willkürlich gewählte complexe Grössen. Wir bezeichnen alsdann, unter Vorbehalt eines weiter unten noch zu nennenden Merkmals, $f(u)$ als eine *„doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2“, falls $f(u)$ eine für alle endlichen u eindeutige analytische Function ist, die bei Vermehrung ihres Argumentes um beliebige ganzzahlige Vielfache von ω_1 und ω_2 unverändert bleibt;* es soll also gelten:

*) Leipzig (1892).

**) Drei Bände, Paris (1886—91).

***) Paris (1897).

†) Paris (1898).

††) Zweiter Band von Burkhardt's *„functionentheoretischen Vorlesungen“*, Leipzig (1899).

†††) Zweite Aufl., bearbeitet von Felix Müller, Halle (1890).

$$f(u+\omega_1)=f(u),\quad f(u+\omega_2)=f(u),\quad f(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)=f(u)$$

für alle Paare ganzer Zahlen m_1 und m_2. Will man die Zahlwerte der Perioden mit in die Bezeichnung der Function aufnehmen, so schreibe man $f(u;\ \omega_1,\ \omega_2)$.

Der Quotient $\omega_1:\omega_2$ der Perioden, welcher in der Folge oft zu nennen sein wird, heisse kurz ω. Es gilt das erste, die Auswahl der Perioden beschränkende Theorem, *dass wir den Periodenquotienten* $\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *als nicht-reell anzunehmen haben.*

Um diese Aussage zu prüfen, setzen wir $f(u\omega_2)=F(u)$ und besitzen in $F(u)$ eine doppeltperiodische Function mit den Perioden 1, ω. Ist nun ω reell, so dürfen wir auch $\omega>0$ annehmen, was nötigenfalls durch Zeichenwechsel von ω_1 erreichbar ist. Man bilde dann die Multipla $\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\cdots$ und untersuche erstlich den Fall, dass in dieser Zahlenreihe ganze Zahlen auftreten. Möge $q\omega$ das kleinste Vielfache sein, welches eine ganze Zahl $p=q\omega$ liefert; dann sind $p,\ q$ offenbar relative Primzahlen, und $\omega=\frac{p}{q}$ ist ein rationaler Bruch. Von den $(q-1)$ ersten Vielfachen:

$$(1)\quad \omega=\frac{p}{q},\quad 2\omega=\frac{2p}{q},\quad 3\omega=\frac{3p}{q},\cdots,\quad (q-1)\omega=\frac{(q-1)p}{q}$$

hat keines einen ganzzahligen Wert. Verstehen wir nun unter $E(\mu\omega)$ die grösste, den Betrag $\mu\omega$ nicht übertreffende, ganze Zahl, so sind mit ω und 1 auch die $(q-1)$ von 0 verschiedenen echten Brüche:

$$(2)\qquad \frac{p}{q}-E\left(\frac{p}{q}\right),\quad \frac{2p}{q}-E\left(\frac{2p}{q}\right),\cdots,\quad \frac{(q-1)p}{q}-E\left(\frac{(q-1)p}{q}\right)$$

Perioden von $F(u)$. Keine zwei unter diesen $(q-1)$ Brüchen sind gleich. Wäre nämlich:

$$\frac{\mu p}{q}-E\left(\frac{\mu p}{q}\right)=\frac{\nu p}{q}-E\left(\frac{\nu p}{q}\right),$$

so wäre $(\mu-\nu)p$ und also $(\mu-\nu)$ durch q teilbar, was doch nicht der Fall ist. Da die $(q-1)$ echten Brüche (2) sämtlich den Nenner q haben, so sind sie in irgend einer Reihenfolge mit $\frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \frac{3}{q},\cdots,\ \frac{q-1}{q}$ identisch. Hiernach hat $F(u)$ auch die Periode $\omega_0=\frac{1}{q}\cdot$ Da aber $1=q\omega_0,\ \omega=p\omega_0$ gilt, so erkennen wir in $F(u)$ eine nur *einfach*-periodische Function der Periode ω_0; diesen Fall werden wir als elementar ausschliessen.

Ist zweitens in der Zahlenreihe $\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\cdots$ keine ganze Zahl enthalten, so ist ω irrational. Unter den unendlich vielen echten

Brüchen $\omega - E(\omega)$, $2\omega - E(2\omega)$, $3\omega - E(3\omega)$, $\cdots$ sind keine zwei identisch. Man kann somit nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ stets noch zwei verschiedene ganze Zahlen μ, ν angeben, für welche die Periode:

$$\omega_0 = [\mu\omega - E(\mu\omega)] - [\nu\omega - E(\nu\omega)]$$

absolut $< \delta$ ist. Aus $F(u_0 + \omega_0) = F(u_0)$ folgt alsdann, dass unsere Function in jeder noch so klein gewählten Umgebung eines einzelnen Punktes u_0 noch an einer zweiten Stelle $(u_0 + \omega_0)$ den Wert $F(u_0)$ annimmt. Nach einem pg. 138 bewiesenen Theoreme kann diese Eigenschaft bei keiner von einer Constanten verschiedenen analytischen Function bestehen; somit ist jetzt $F(u)$ mit einer Constanten identisch, einen Fall, den wir jedoch gleichfalls ausschliessen werden.

Die obige Bestimmung, dass ω nicht reell gewählt werden soll, ist hiermit begründet. Setzen wir $\omega = \xi + i\eta$, so ist $\eta \gtrless 0$ anzunehmen. Wir dürfen aber gleich hier vorschreiben, *dass* $\eta > 0$ *sein soll*, da dies nötigenfalls nach Zeichenwechsel einer der Perioden ω_1, ω_2 erreichbar ist.

Man wolle nun, indem man u_0 willkürlich wählt, in der u-Ebene die gesamten Punkte $(u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ für alle Paare ganzer Zahlen m_1, m_2 markieren. Dies kann man dadurch vollziehen, dass man die in Figur 45 angedeuteten zwei Systeme paralleler Geraden zieht, wo alsdann die Schnittpunkte der Geraden des einen Systems mit denen des anderen die gesamten zu markierenden Punkte abgeben. Es entspringt so eine zu unserem Periodenpaar ω_1, ω_2 gehörende „*Parallelogrammteilung*“ *der u-Ebene*, wobei dann die sogenannten „*Gitterpunkte*“ *des Parallelogrammnetzes* die zu den complexen Werten $(u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ gehörenden Punkte liefern. Ein einzelnes Parallelogramm des Netzes heisst ein „*Periodenparallelogramm*“.

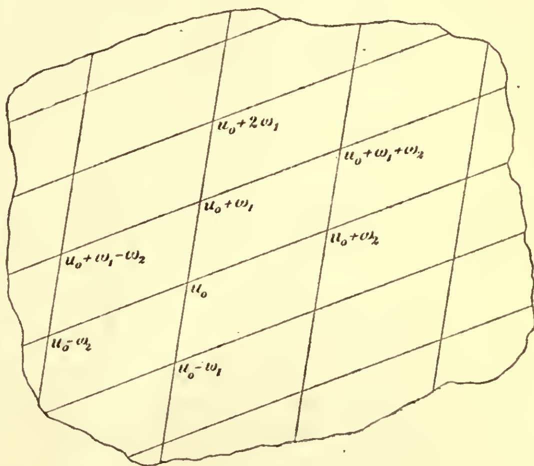


Fig. 45.

Die Bedeutung der vollzogenen Einteilung der u-Ebene für unsere

Functionen $f(u;\, \omega_1,\, \omega_2)$ besteht offenbar darin, *dass die einzelne Function in homologen Punkten aller Parallelogramme des Netzes gleiche Werte besitzt.*

Der oben schon angekündigte Zusatz zur Definition der doppeltperiodischen Functionen kann aber jetzt dahin formuliert werden, *dass $f(u;\, \omega_1,\, \omega_2)$ innerhalb und auf dem Rande des einzelnen Periodenparallelogramms frei von wesentlich singulären Stellen sein soll, d. h. dass sich $f(u;\, \omega_1,\, \omega_2)$ daselbst von endlich vielen Polen abgesehen allenthalben regulär verhält.*

Wir können gleich hinzusetzen, *dass mindestens ein Pol im Parallelogramm (den Rand eingeschlossen) auftreten muss.* Wäre dies nämlich nicht der Fall, so liesse sich eine endliche Zahl M so auswählen, dass $|f(u)| < M$ im ganzen Parallelogramm und also für alle endlichen Argumente u zutrifft. Dies aber widerspricht dem pg. 147 u. f. bewiesenen Satze, dass eine ganze Function — und um eine solche würde es sich hier handeln — in der Umgebung von $u = \infty$ stets Stellen besitzt, an denen $|f(u)| > M$ ist.

Einige weitere sich hier anschliessende Angaben gründen wir auf den Gebrauch des Periodenparallelogramms. Wir denken den ersten Gitterpunkt u_0 so gewählt, dass nicht gerade auf den Rand des Parallelogramms Pole von $f(u)$ zu liegen kommen. Integriert man daraufhin $f(u)du$ in der positiven Umlaufsrichtung über den gesamten Rand R des Parallelogramms, so ergiebt sich:

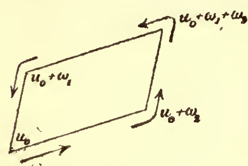


Fig. 46.

$$\int_{(R)} f(u)du = 0. \tag{3}$$

Man hat nämlich, wie ein Blick auf Figur 46 lehrt:

$$\int_{(R)} f(u)\, du = \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} + \int_{u_0+\omega_2}^{u_0+\omega_1+\omega_2} + \int_{u_0+\omega_1+\omega_2}^{u_0+\omega_1} + \int_{u_0+\omega_1}^{u_0},$$

wo sich rechter Hand jede Integration auf $f(u)\,du$ beziehen soll. Durch Zusammenfassung des ersten und dritten Integrals, sowie andererseits des zweiten und vierten folgt:

$$\int_{(R)} f(u)\, du = \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} [f(u) - f(u+\omega_1)]\, du - \int_{u_0}^{u_0+\omega_1} [f(u) - f(u+\omega_2)]\, du.$$

Aus $f(u+\omega_1) = f(u)$ und $f(u+\omega_2) = f(u)$ ergiebt sich sonach die Gleichung (3).

Vermöge des pg. 142 an Formel (3) angeschlossenen Satzes entspringt hieraus weiter: *Die Summe der Residuen aller im Parallelogramm gelegenen Pole der Function $f(u)$ ist gleich null.* Sehen wir einen m-fachen Pol als äquivalent mit m einfachen mit einander zusammenfallenden Polen an, so hat man als fernere Folgerung: *Eine doppeltperiodische Function $f(u; \omega_1, \omega_2)$ hat im Periodenparallelogramm mindestens zwei einfache Pole.* Hätte nämlich $f(u)$ im Parallelogramm nur einen Pol erster Ordnung, der etwa bei $u = u_1$ gelegen ist, so würde in der Umgebung desselben die Darstellung:

$$f(u) = \frac{a_{-1}}{u - u_1} + a_0 + a_1(u - u_1) + \cdots$$

mit $a_{-1} \neq 0$ gelten (cf. pg. 137). Der Satz vom Verschwinden der Residuensumme aber würde $a_{-1} = 0$ erfordern, so dass die Annahme *eines* einfachen Pols auf einen Widerspruch führt.

Die Function $f(u)$ wird im Parallelogramm stets nur *endlich* viele Pole und Nullpunkte aufweisen. Lägen nämlich unendlich viele Pole oder Nullpunkte vor, so würden diese wenigstens eine Häufungsstelle besitzen, und diese wäre für $f(u)$ wesentlich singulär. Es hat hiernach keine Schwierigkeit, den ersten Gitterpunkt u_0 so auszuwählen, dass auf dem Rande R des Parallelogramms $f(u)$ weder verschwindet, noch unendlich wird. Nun ist mit $f(u)$ offenbar auch die Ableitung $f'(u)$ eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2; und dasselbe gilt demnach auch von:

$$\frac{d \log f(u)}{du} = \frac{f'(u)}{f(u)},$$

eine Function, die überdies zufolge unserer Festsetzung auf dem Rande R überall regulär ist. Die Anwendung der Formel (3) auf diese Function führt auf die Formel:

$$\int_{(R)} \frac{f'(u)}{f(u)} du = \int_{(R)} d \log f(u) = 0$$

und liefert damit den Satz: *Die Anzahl einfacher Nullpunkte einer doppeltperiodischen Function $f(u)$ im Periodenparallelogramm ist gleich der Gesamtzahl der ebendort befindlichen einfachen Pole.* Man hat hierbei natürlich wieder einen n-fachen Nullpunkt mit n einfachen als äquivalent anzusehen.

Übrigens wird man den angegebenen Satz leicht unabhängig davon machen, ob auf dem Rande R Nullpunkte und Pole auftreten oder nicht. Nimmt man eine stetige Verschiebung des Gitterpunktes u_0 und damit des ganzen Parallelogrammnetzes derart vor, dass etwa ein

Nullpunkt aus dem Innern des Parallelogramms auf eine Seite desselben rückt, so wird zugleich die Gegenseite an der homologen Stelle einen dem Parallelogramm bislang fremden Nullpunkt erreichen. Wir werden nur den einen dieser beiden Nullpunkte als dem Parallelogramm zugehörig ansehen, den anderen jedoch dem benachbarten Parallelogramm zurechnen. Wir entsprechen dieser Forderung am einfachsten dadurch, *dass wir vom Rande des Periodenparallelogramms nur zwei benachbarte Seiten, etwa die in Figur 47 stark markierten, dem Parallelogramm als zugehörig ansehen, von den vier Ecken aber nur die eine bei u_0 gelegene.*

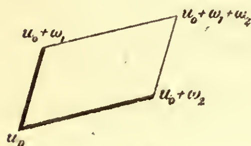


Fig. 47.

Nach dieser Festsetzung gilt ganz allgemein folgender Satz: *Hat $f(u)$ im Periodenparallelogramm insgesamt m (einfache) Pole, so nimmt $f(u)$ einen beliebig vorzuschreibenden complexen Wert C stets auch gerade an m Stellen des Parallelogramms an.* In der That hat die doppeltperiodische Function $f(u) - C$ im Parallelogramm m Nullstellen. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass diese m Nullstellen teilweise oder gar ganz coincidieren.

Die hier auftretende ganze Zahl m wird die „*Wertigkeit*“ der Function $f(u; \omega_1, \omega_2)$ genannt. Mit Hülfe dieser Bezeichnung können wir einen der vorhin bewiesenen Sätze kurz dahin formulieren, *dass es keine einwertige doppeltperiodische Function $f(u; \omega_1, \omega_2)$ giebt.* Zweiwertige Functionen $f(u, \omega_1, \omega_2)$ werden wir bald kennen lernen.

§ 2. Convergenz der Doppelreihen $\sum(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-k}$.

Um tiefer in die Theorie der doppeltperiodischen Functionen einzudringen, ziehen wir die pg. 152 ff. entwickelten Ansätze über Productdarstellung ganzer transcendenter Functionen heran. Die dieser Entwicklung zu Grunde liegenden Convergenztheoreme, welche von Eisenstein in der pg. 174 genannten Abhandlung aufgestellt sind, sollen zunächst behandelt werden.

Die ganzzahlige Combination $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ der Perioden soll symbolisch durch (m_1, m_2) bezeichnet werden:

$$(m_1, m_2) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2. \tag{1}$$

Man verstehe unter k eine positive ganze Zahl und bilde die Reihe:

$$\sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right)^k = \sum_{m_1, m_2}{}' (m_1, m_2)^{-k}, \tag{2}$$

wo sich die Summe auf alle Paare ganzer (positiver und negativer)

Zahlen mit alleiniger Ausnahme der Combination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ beziehen soll; an den Ausschluss letzterer Combination soll der obere Index am Zeichen $\sum'$ erinnern. Nach den Angaben von pg. 121 wird die unendliche Doppelreihe (2) unbedingt convergent sein, falls sie absolut convergiert.

Um letzteres zu untersuchen, multiplicieren wir die Reihe (2) mit ω_2^k oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir setzen $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 1$. Das Quadrat des absoluten Betrages von (m_1, m_2), welches $[m_1, m_2]$ heissen möge, ist gegeben durch:

$$(3) \qquad [m_1, m_2] = (m_1\xi + m_2)^2 + m_1^2\eta^2,$$

wenn wir wie oben $\omega = \xi + i\eta$ setzen. Berücksichtigt man, dass $[m_1, m_2]$ bei gleichzeitigem Zeichenwechsel von m_1, m_2 unverändert bleibt, so wird man die auf Convergenz zu untersuchende Reihe folgendermassen auseinanderlegen können:

$$\sum_{m_1, m_2}{}'[m_1, m_2]^{-\frac{k}{2}} = 2\sum_{m=1}^{\infty}[m, 0]^{-\frac{k}{2}} + 2\sum_{m=1}^{\infty}[0, m]^{-\frac{k}{2}}$$
$$+ 2\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}[m_1, m_2]^{-\frac{k}{2}} + 2\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}[m_1, -m_2]^{-\frac{k}{2}}.$$

Die beiden ersten Summen rechter Hand lassen sich auf Grund von (3) leicht weiter entwickeln. Indem man zugleich die beiden letzten Summen zusammenfasst, folgt:

$$(4) \quad \frac{1}{2}\sum_{m_1, m_2}{}'[m_1, m_2]^{-\frac{k}{2}} = [1 + (\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{k}{2}}]\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^k$$
$$+ \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}([m_1, m_2]^{-\frac{k}{2}} + [m_1, -m_2]^{-\frac{k}{2}}).$$

Nun rechnet man Formel (3) leicht in die folgenden Gestalten um:

$$[m_1, m_2] = m_1^2[(\xi - 1)^2 + \eta^2] + 2m_1(m_1 + m_2)(\xi - 1) + (m_1 + m_2)^2,$$

$$[m_1, m_2] = \frac{[m_1((\xi - 1)^2 + \eta^2) + (m_1 + m_2)(\xi - 1)]^2}{(\xi - 1)^2 + \eta^2} + \frac{(m_1 + m_2)^2\eta^2}{(\xi - 1)^2 + \eta^2}.$$

Die letzte Gleichung aber liefert:

$$(5) \qquad [m_1, m_2] \geqq (m_1 + m_2)^2 \cdot \frac{\eta^2}{(\xi - 1)^2 + \eta^2}.$$

Ebenso ergiebt sich aus:

$$[m_1, -m_2] = m_1^2[(\xi+1)^2+\eta^2] - 2m_1(m_1+m_2)(\xi+1) + (m_1+m_2)^2$$

die Ungleichung:

$$[m_1, -m_2] \geqq (m_1+m_2)^2 \cdot \frac{\eta^2}{(\xi+1)^2+\eta^2},$$

welche im Verein mit (5) die Richtigkeit der ferneren Ungleichung:

$$(6)\quad [m_1, m_2]^{-\frac{k}{2}} + [m_1, -m_2]^{-\frac{k}{2}} \leqq \frac{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{\frac{k}{2}} + [(\xi+1)^2+\eta^2]^{\frac{k}{2}}}{\eta^k} \cdot \left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)^k$$

darlegt. Als wesentliche Bedingung für die Brauchbarkeit aller dieser Rechnungen wird man übrigens die oben (pg. 177) festgesetzte Ungleichung $\eta > 0$ erkennen.

Die letzte in (4) zu bildende Summe wollen wir nun in der Weise berechnen, dass wir alle Glieder mit gleicher Summe $m_1 + m_2 = n$ zusammenfassen. Wir haben $(n-1)$ derartige Glieder, welche den Combinationen $m_1 = 1$, $m_2 = n-1$; $m_1 = 2$, $m_2 = n-2$; $\cdots$; $m_1 = n-1$, $m_2 = 1$ entsprechen. Zufolge (6) ist die Summe dieser $(n-1)$ Glieder kleiner als

$$\frac{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{\frac{k}{2}} + [(\xi+1)^2+\eta^2]^{\frac{k}{2}}}{\eta^k} \cdot \frac{1}{n^{k-1}}.$$

Aus Formel (4) ergiebt sich somit:

$$\frac{1}{2}\sum_{m_1, m_2}{}' [m_1, m_2]^{-\frac{k}{2}} < [1 + (\xi^2+\eta^2)^{-\frac{k}{2}}] \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^k$$
$$+ \frac{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{\frac{k}{2}} + [(\xi+1)^2+\eta^2]^{\frac{k}{2}}}{\eta^k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

Damit die rechts auftretenden Reihen convergent sind, haben wir nach pg. 157 der Bedingung $k > 2$ zu genügen. Es entspringt damit das von Eisenstein a. a. O. aufgestellte fundamentale Theorem: *Die durch Formel (2) in Ansatz gebrachte unendliche Reihe ist jedenfalls absolut und demnach auch unbedingt convergent, wenn die ganze Zahl $k > 2$ ist.*

Für jede ungerade Zahl $k > 1$ wird übrigens der Summenwert der Reihe gleich 0 sein; denn in diesem Falle werden sich je die beiden Glieder mit (m_1, m_2) und $(-m_1, -m_2)$ fortheben. Wir setzen demnach sogleich $2k$ an Stelle von k und können somit die Betrachtung auf die weiterhin durch $G_k(\omega_1, \omega_2)$ zu bezeichnenden Summen:

$$(7)\qquad G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}\right)^{2k}$$

einschränken. Man bemerke übrigens, dass man hierbei setzen kann:

$$\omega_2^{2k} G_k(\omega_1, \omega_2) = G_k(\omega, 1).$$

Es bleibt uns jetzt noch zu zeigen, *dass die Reihe* (7) *auch für* $k = 1$ *wenigstens bei bestimmt vorgeschriebener Anordnung der Glieder einen endlichen und bestimmten Summenwert besitzt.* Die Gliederanordnung, mit der wir hierbei zunächst arbeiten wollen, sei gegeben durch:

$$(8) \qquad G_k(\omega, 1) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k} + 2\sum_{m_1=1}^{\infty}\left(\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{m_1\omega + m_2}\right)^{2k}\right).$$

Der Summenwert der ersten rechter Hand auftretenden Reihe, deren Convergenz für $k \geqq 1$ oben (pg. 157) festgestellt wurde, möge S_k heissen:

$$(9) \qquad S_k = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k}.$$

Wir vereinigen nun die Untersuchung des Falles $k = 1$ mit einer Entwicklung, die wir ohnehin für jedes k ausführen müssen. Nach pg. 157 kann man die pg. 158 bewiesene Gleichung:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z + m_2} - \frac{1}{m_2}\right)$$

beliebig oft gliedweise differenzieren, ohne dass die entstehenden Gleichungen für irgend ein endliches z unrichtig würden. Es folgt somit:

$$(10) \qquad -\frac{\pi}{(2k-1)!}\frac{d^{2k-1}\operatorname{ctg}\pi z}{dz^{2k-1}} = \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z + m_2}\right)^{2k}$$

für jede ganze Zahl $k \geqq 1$. Hat die complexe Zahl $z = x + iy$ ein $y > 0$, so ist $p = e^{\pi i z}$ eine Zahl mit einem absoluten Betrage $|p| < 1$ (man vergl. die Entwicklungen über Abbildung durch die Exponentialfunction pg. 97 u. f.). Demnach gestattet die Function:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \pi i \frac{p + p^{-1}}{p - p^{-1}} = -\pi i - 2i\pi\frac{p^2}{1 - p^2}$$

die Reihenentwicklung:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = -\pi i - 2i\pi\sum_{n=1}^{\infty} p^{2n} = -\pi i - 2i\pi\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\pi i z},$$

welche für alle z mit $y > 0$ gleichmässig convergent ist. Durch Vermittlung der Potenzreihe nach p findet man vermöge der Grundeigenschaften der Potenzreihen, dass man die höheren Ableitungen von

$\pi \operatorname{ctg} \pi z$ gewinnt, indem man die Reihe auf der rechten Seite der letzten Gleichung gliedweise differenziert:

$$-\pi \frac{d^{2k-1} \operatorname{ctg} \pi z}{dz^{2k-1}} = (2i\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} e^{2n\pi i z}.$$

Der Vergleich mit (10) liefert:

$$(11) \qquad \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+m_2}\right)^{2k} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} e^{2n\pi i z}$$

für alle ganzen Zahlen $k > 0$, falls $z = x + iy$ ein $y > 0$ hat.

Die letztere Bedingung ist nun erfüllt für $z = m_1\omega$, falls $m_1 > 0$ ist; in der That hatten wir über $\omega = \xi + i\eta$ bereits pg. 177 vorgeschrieben, dass $\eta > 0$ sein soll. Benutzen wir die weiter oft vorkommende Bezeichnung:

$$(12) \qquad q = e^{\pi i \omega},$$

so ist $|q| < 1$, und aus (11) ergiebt sich:

$$(13) \qquad \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_1\omega + m_2}\right)^{2k} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} q^{2nm_1}.$$

Diese Gleichung haben wir zufolge (8) für alle ganzen Zahlen $m_1 = 1, 2, 3, \cdots$ zu bilden und alle entstehenden Gleichungen zu addieren. Man erhält rechts eine absolut convergente Doppelreihe; denn es ist:

$$\sum_{m_1=1,}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} |q|^{2nm_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{2k-1} \sum_{m_1=1}^{\infty} |q|^{2nm_1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \cdot \frac{|q|^{2n}}{1-|q|^{2n}},$$

und die hier rechts stehende Reihe ist deshalb convergent, weil der Quotient des n^{ten} Gliedes und des $(n-1)^{\text{ten}}$ für lim. $n = \infty$ der Grenze $|q|^2 < 1$ zustrebt. Die blosse Convergenz der aus der rechten Seite von (13) entspringenden Doppelreihe für $k = 1, 2, \cdots$ lehrt bereits, was wir behaupteten, dass nämlich:

$$\sum_{m_1=1,}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_1\omega + m_2}\right)^{2k}$$

auch für $k = 1$ endlich und bestimmt ist. Die bewiesene unbedingte Convergenz der Doppelreihe zeigt vermöge der eben bereits ausgeführten Umordnung der Glieder die Gültigkeit der Gleichung:

$$(14) \qquad \sum_{m_1=1,}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_1\omega + m_2}\right)^{2k} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \cdot \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}$$

für alle ganzen Zahlen $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Für die Anfangswerte $k = 1, 2$ und 3 sind an Stelle von $G_k(\omega_1, \omega_2)$ besondere Bezeichnungen gebräuchlich, welche hier genannt werden sollen. Das Product $\omega_2 \cdot G_1(\omega_1, \omega_2)$, berechnet vermöge der Anordnung (8), bezeichnet man mit η_2:

$$(15) \qquad \frac{\eta_2}{\omega_2} = 2 \sum_{m_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m_2 \omega_2}\right)^2 + 2 \sum_{m_1=1,}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2}\right)^2.$$

Da nach (4) pg. 159 die in (9) erklärte Summe $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$ ist, so findet man vermöge (14):

$$(16) \qquad \eta_2 = \frac{\pi^2}{3\omega_2}\left[1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right].$$

In (15) ist die Summation für m_2 zunächst ausgeführt. Wird zuerst für m_1 summiert, so hat man wegen der bedingten Convergenz einen anderen Summenwert zu erwarten. Wir definieren sogleich η_1 als eine mit η_2 coordinierte Grösse durch:

$$(17) \qquad \frac{\eta_1}{\omega_1} = 2 \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m_1 \omega_1}\right)^2 + 2 \sum_{m_2=1,}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2}\right)^2.$$

Die Berechnung von η_1 aus $\eta_2, \omega_1, \omega_2$ werden wir später auf anderem Wege leisten.

An Stelle der Grössen G_2 und G_3 benutzt man gewöhnlich:

$$(18) \qquad \begin{aligned} g_2(\omega_1, \omega_2) &= 60 \sum_{m_1, m_2}{}' (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^{-4}, \\ g_3(\omega_1, \omega_2) &= 140 \sum_{m_1, m_2}{}' (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^{-6}. \end{aligned}$$

Aus (8) und (14) folgt mit Rücksicht auf die pg. 159 gegebenen Werte von S_2 und S_3:

$$(19) \qquad g_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right],$$

$$(20) \qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right].$$

§ 3. **Weierstrass' Functionen $\sigma(u)$ und $\zeta(u)$.**

Wir kehren zum Parallelogrammnetz des § 1 zurück und wollen dasselbe fortan in der Regel derart auswählen, dass der erste Gitterpunkt u_0 der Nullpunkt ist. Allgemein entsprechen alsdann die Gitterpunkte des Parallelogrammnetzes den ganzzahligen Combinationen der

Perioden $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$, die wir wie pg. 180ff. wieder abgekürzt durch (m_1, m_2) bezeichnen.

Es soll nun nach Vorgang von Weierstrass eine ganze transcendente Function $\sigma(u)$ gebildet werden, welche in den Gitterpunkten (m_1, m_2) jeweils lauter einfache Nullpunkte hat, übrigens aber nicht verschwindet. Da nach dem Eisenstein'schen Convergenztheorem (pg. 182) die Reihe $\sum |(m_1, m_2)|^{-3}$ convergiert, so wird eine derartige Function zufolge der pg. 155 entwickelten Ansätze durch *das unabhängig von der Factorenanordnung convergente Product:*

$$(1)\qquad \sigma(u;\,\omega_1,\omega_2) = u\prod_{m_1,\,m_2}{}'\left(1-\frac{u}{(m_1,\,m_2)}\right)e^{\frac{u}{(m_1,\,m_2)}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{(m_1,\,m_2)}\right)^2}$$

geliefert. Hierbei soll sich das Product auf alle Paare ganzer Zahlen m_1, m_2 beziehen mit alleiniger Ausnahme der Combination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, deren Ausfallen durch den oberen Index am Productzeichen angedeutet sein soll. *Die in* (1) *gewonnene ganze transcendente Function ist die Weierstrass'sche σ-Function; dieselbe ist, wenn wir sie als Function der drei Argumente u, ω_1, ω_2 auffassen wollen, in diesen homogen von der ersten Dimension; übrigens merken wir die aus* (1) *sofort hervorgehende Formel an:*

$$(2)\qquad \lim_{u=0}\frac{\sigma(u)}{u} = 1.$$

Als ganze transcendente Function ist $\sigma(u)$ für alle endlichen u eindeutig; endlich bemerken wir noch, dass $\sigma(u)$ eine ungerade Function von u ist:

$$(3)\qquad \sigma(-u) = -\sigma(u).$$

Um das Verhalten von $\sigma(u)$ bei Vermehrung von u um Perioden zu untersuchen, definieren wir zunächst die Function:

$$(4)\qquad \zeta(u;\,\omega_1,\omega_2) = \frac{d\log\sigma(u)}{du}.$$

Dieselbe ist für alle endlichen u eindeutig und besitzt in den Gitterpunkten jeweils einfache Pole. Diese „*ζ-Function*" wird nach pg. 157 dargestellt durch die für alle endlichen u unbedingt und gleichmässig convergente Reihe:

$$(5)\quad \zeta(u;\,\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{u} + \sum_{m_1,\,m_2}{}'\left[\frac{1}{u-(m_1,\,m_2)} + \frac{1}{(m_1,\,m_2)} + \frac{u}{(m_1,\,m_2)^2}\right],$$

wobei jedoch zu bemerken ist, dass für den einzelnen Gitterpunkt immer eines der Reihenglieder einen einfachen Pol besitzt.

Die Doppelreihe (5) der ζ-Function soll in eine einfache Reihe umgewandelt werden. Wir schreiben zu diesem Ende $u = v\omega_2$ und

bringen die Reihenglieder in eine Anordnung, welche aus folgender Gleichung ersichtlich ist:

$$(6) \qquad \omega_2\,\zeta(u) = \frac{1}{v} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m} + \frac{v}{m^2}\right]$$

$$+ \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{v - m_1\omega - m_2} + \frac{1}{m_1\omega + m_2} + \frac{v}{(m_1\omega + m_2)^2}\right]$$

$$+ \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{v + m_1\omega - m_2} - \frac{1}{m_1\omega - m_2} + \frac{v}{(m_1\omega - m_2)^2}\right].$$

Zur weiteren Umgestaltung der rechten Seite dieser Gleichung machen wir von folgendem, aus dem Begriffe der gleichmässigen Convergenz leicht ableitbaren, Princip Gebrauch. Ist $\sum\limits_n [\varphi_n(z) + \psi_n(z)]$ in der Umgebung einer Stelle z unbedingt und gleichmässig convergent, und gilt dasselbe von einer der beiden Reihen $\sum\limits_n \varphi_n(z)$ oder $\sum\limits_n \psi_n(z)$, so gilt es auch von der anderen, und man darf setzen:

$$\sum_n [\varphi_n(z) + \psi_n(z)] = \sum_n \varphi_n(z) + \sum_n \psi_n(z).$$

Auf Grund dieses Princips haben wir für die erste Reihe auf der rechten Seite von (6):

$$\frac{1}{v} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m} + \frac{v}{m^2}\right] = \frac{1}{v} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m}\right) + 2v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

$$(7) \qquad \frac{1}{v} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m} + \frac{v}{m^2}\right] = \pi \operatorname{ctg} \pi v + 2v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Entsprechend folgern wir für die zweite in (6) rechts stehende Summe:

$$\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{v - m_1\omega - m_2} + \frac{1}{m_1\omega + m_2} + \frac{v}{(m_1\omega + m_2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{v - m_1\omega} + \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{v - m_1\omega - m_2} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$+ \frac{1}{m_1\omega} + \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{m_1\omega + m_2} - \frac{1}{m_2}\right) + v \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^2},$$

woraus bei Benutzung von (2) pg. 158 hervorgeht:

$$(8)\quad \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{v-m_1\omega-m_2}+\frac{1}{m_1\omega+m_2}+\frac{v}{(m_1\omega+m_2)^2}\right]$$
$$=\pi\operatorname{ctg}\pi(v-m_1\omega)+\pi\operatorname{ctg}\pi m_1\omega+v\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m_1\omega+m_2)^2}.$$

Hieran reiht sich vermöge einer analogen Rechnung:

$$(9)\quad \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{v+m_1\omega-m_2}-\frac{1}{m_1\omega-m_2}+\frac{v}{(m_1\omega-m_2)^2}\right]$$
$$=\pi\operatorname{ctg}\pi(v+m_1\omega)-\pi\operatorname{ctg}\pi m_1\omega+v\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m_1\omega+m_2)^2}.$$

Unter erneuter Anwendung des vorhin genannten Princips finden wir für die erste Doppelsumme auf der rechten Seite von (6):

$$\pi\sum_{m_1=1}^{\infty}\left[\operatorname{ctg}\pi(v-m_1\omega)+\operatorname{ctg}\pi m_1\omega\right]+v\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m_1\omega+m_2)^2};$$

denn nach pg. 184 ist die zweite auf m_1 bezogene Reihe unbedingt convergent, und also wird die erste Reihe unbedingt und gleichmässig convergent sein. Für die letzte Doppelreihe in (6) ergiebt sich aus Formel (9) entsprechend der Wert:

$$\pi\sum_{m_1=1}^{\infty}\left[\operatorname{ctg}\pi(v+m_1\omega)-\operatorname{ctg}\pi m_1\omega\right]+v\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m_1\omega+m_2)^2}.$$

Durch Vereinigung zweier auf m_1 bezogenen Reihen und Benutzung von (7) nimmt daraufhin Formel (6) die Gestalt an:

$$\omega_2\zeta(u)=\pi\operatorname{ctg}\pi v+\pi\sum_{m_1=1}^{\infty}[\operatorname{ctg}\pi(v+m_1\omega)+\operatorname{ctg}\pi(v-m_1\omega)]$$
$$+v\left[2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}+2\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{m_1\omega+m_2}\right)^2\right].$$

In der letzten Klammer rechter Hand steht zufolge (15) pg. 185 nichts anderes als $\eta_2\omega_2$. Benutzen wir dies, setzen ausserdem n statt des Summationsbuchstabens m_1 und führen endlich u wieder ein, so entspringt als *einfach unendliche Reihe für die* ζ*-Function:*

$$(10)\quad \zeta(u)=\frac{\eta_2 u}{\omega_2}+\frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2}$$
$$+\frac{\pi}{\omega_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{\omega_2}+n\pi\omega\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{\omega_2}-n\pi\omega\right)\right].$$

Diese Reihe ist für alle endlichen u unbedingt und gleichmässig convergent, nur weist im einzelnen Gitterpunkte je ein Reihenglied einen einfachen Pol auf.

Vermehrt man u um ω_2, so bleiben die Glieder auf der rechten Seite von (10) sämtlich unverändert bis auf das erste, welches um den Betrag η_2 grösser wird. Man hat also $\zeta(u+\omega_2) = \zeta(u) + \eta_2$. Es ist bei der vorstehenden Entwicklung allenthalben die Periode ω_2 bez. der Summationsbuchstabe m_2 vorgezogen. Hätten wir statt dessen ω_1 be.orzugt, so wären wir zu der Gleichung $\zeta(u+\omega_1) = \zeta(u) + \eta_1$ geführt entsprechend der in Formel (17) pg. 185 geleisteten Darstellung von η_1. Wir können demnach folgende Ergebnisse zusammenfassen: $\zeta(u)$ *ist eine für alle endlichen* u *eindeutige und bis auf die in den Gitterpunkten liegenden einfachen Pole stetige Function, welche bei Vermehrung von* u *um Perioden folgendes Verhalten zeigt:*

$$(11) \qquad \zeta(u+\omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \quad \zeta(u+\omega_2) = \zeta(u) + \eta_2.$$

Indem wir jetzt von $\zeta(u)$ zu $\sigma(u)$ auf Grund der Relation (4) zurückgehen, schliessen wir aus (11) auf die beiden Gleichungen:

$$\sigma(u+\omega_1) = e^{\eta_1 u + c_1}\,\sigma(u), \quad \sigma(u+\omega_2) = e^{\eta_2 u + c_2}\,\sigma(u),$$

wo c_1 und c_2 zwei noch zu bestimmende Constante sind. Setzt man in die erste Gleichung $u = -\frac{\omega_1}{2}$ ein, so folgt unter Benutzung der Relation (3) pg. 186, da $\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \neq 0$ ist:

$$e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2} + c_1} = -1 \quad \text{und also} \quad c_1 = \pi i + \frac{\eta_1\omega_1}{2}.$$

Analog bestimmt sich c_2. *Die σ-Function geht bei Vermehrung von* u *um eine der Perioden in sich selbst, multipliciert mit einem bestimmten Exponentialfactor über; und zwar hat man:*

$$(12) \quad \sigma(u+\omega_1) = -e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\,\sigma(u), \quad \sigma(u+\omega_2) = -e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\,\sigma(u).$$

Aufgabe. Man beweise durch wiederholte Anwendung der Regeln (12):

$$\sigma(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2) = (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2}\, e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)}\,\sigma(u).$$

§ 4. **Weierstrass' Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$.**

Da $\zeta(u)$ sich bei Vermehrung des Argumentes u um Perioden bis auf additive Constante reproduciert, so wird die Ableitung dieser Function bei der gedachten Veränderung von u unverändert bleiben. Wir bezeichnen diese Ableitung, mit negativem Zeichen versehen, durch:

(1) $$\wp(u;\omega_1,\omega_2) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = -\frac{d\zeta(u)}{du}$$

und reihen ihr sogleich die nächst folgende Ableitung an:

(2) $$\wp'(u;\omega_1,\omega_2) = \frac{d\wp(u)}{du} = -\frac{d^3\log\sigma(u)}{du^3}.$$

In $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ haben wir alsdann diejenigen beiden fundamentalen doppeltperiodischen Functionen mit den Perioden ω_1, ω_2 gewonnen, welche Weierstrass der ganzen Theorie der elliptischen Functionen zu Grunde gelegt hat.

Die Function $\zeta(u)$ hatte in den Gitterpunkten einfache Pole. Ebenda wird also $\wp(u)$ Pole der zweiten, $\wp'(u)$ solche der dritten Ordnung aufweisen. Übrigens werden diese Functionen für alle endlichen Werte u regulär sein. Unter Benutzung der pg. 180 verabredeten Sprechweise können wir sagen: *$\wp(u)$ stellt eine zweiwertige doppeltperiodische Function der Perioden ω_1, ω_2 vor, $\wp'(u)$ eine dreiwertige.*

Um den Charakter der Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ bei $u=\infty$ zu beleuchten, projicieren wir das Parallelogrammnetz der u-Ebene stereographisch auf die Kugeloberfläche. Das einzelne System paralleler Geraden liefert dabei auf der Kugel ein System von Kreisen, welche sich im Punkte $u=\infty$ berühren und ebendort eine Häufungsstelle haben. Die Kugel erscheint somit überdeckt durch ein Netz von Kreisbogenvierecken, die sich bei $u=\infty$ zu unendlich vielen zusammenhäufen. Nun nimmt nach pg. 180 im einzelnen Viereck $\wp(u)$ jeden complexen Wert zweimal, $\wp'(u)$ sogar dreimal an. Wir sind demnach bei $u=\infty$ zu dem pg. 140 aufgewiesenen Charakter eines wesentlich singulären Punktes zurückgeführt: *Die Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$, sowie überhaupt alle doppeltperiodischen Functionen $f(u;\omega_1,\omega_2)$ haben je einen bei $u=\infty$ gelegenen wesentlich singulären Punkt.*

Nach einem pg. 157 bewiesenen allgemeinen Theoreme kann man analytische Darstellungen für $\wp(u)$, $\wp'(u)$ aus der in (5) pg. 186 angegebenen Reihe für $\zeta(u)$ gewinnen, indem man letztere gliedweise nach u differenziert. Es entspringen auf diese Weise die *Partialbruchreihen für $\wp(u)$, $\wp'(u)$:*

(3) $$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1,m_2}{}' \left[\left(\frac{1}{u-(m_1,m_2)}\right)^2 - \left(\frac{1}{(m_1,m_2)}\right)^2\right],$$

(4) $$\wp'(u) = -2\sum_{m_1,m_2}\left(\frac{1}{u-(m_1,m_2)}\right)^3.$$

Wir lesen aus diesen Darstellungen ab: *Will man $\wp$ und $\wp'$ als Functionen der drei Argumente u, ω_1, ω_2 auffassen, so sind sie in denselben*

homogen von der $(-2)^{ten}$ *bez.* $(-3)^{ten}$ *Dimension.* Die Reihen (3) und (4) sind übrigens wieder für alle endlichen u gleichmässig convergent, wobei nur im einzelnen Gitterpunkt immer ein Reihenglied einen Pol besitzt.

Die Function $\wp(u) - \frac{1}{u^2} = \varphi(u)$ ist in der Umgebung von $u = 0$ regulär und gestattet daselbst die Entwicklung in eine Potenzreihe, deren Convergenzkreis bis an den nächstliegenden Gitterpunkt gerade heranreicht. Da $\wp(u)$ als Ableitung der zufolge (10) ungeraden Function $\zeta(u)$ selber gerade ist, so werden in der fraglichen Potenzreihe nur gerade Exponenten auftreten. Man gelangt zu demselben Ergebnis, wenn man zunächst allgemein ansetzt:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot \frac{u}{1} + \varphi''(0) \cdot \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \varphi'''(0) \cdot \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

und für $\varphi^{(n)}(u)$ mit $n > 0$, immer gestützt auf das Convergenztheorem von pg. 157, die Entwicklung benutzt:

$$\varphi^{(n)}(u) = (-1)^n (n+1)! \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)}\right)^{n+2}.$$

Wir finden nämlich:

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = (n+1) \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{(m_2, m_2)}\right)^{n+2}.$$

Nach pg. 182 haben wir zu unterscheiden, ob n ungerade oder gerade ist; es ergiebt sich mit Hilfe der in (7) pg. 182 erklärten Bezeichnung:

$$\varphi^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} = (2k+1)\, G_{k+1}(\omega_1, \omega_2).$$

Indem wir noch $\varphi(0) = 0$ aus Formel (3) ablesen, gewinnen wir:

(5) $$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3 G_2 u^2 + 5 G_3 u^4 + 7 G_4 u^6 + \cdots,$$

oder wenn wir statt G_2, G_3 die pg. 185 erklärten g_2, g_3 einführen:

(6) $$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \frac{1}{28} g_3 u^4 + 7 G_4 u^6 + 9 G_5 u^8 + \cdots.$$

Bevor wir diese Gleichung weiter entwickeln, wollen wir aus ihr auf eine zwischen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ bestehende Relation schliessen. Man hat erstlich:

$$\wp''(u) = \frac{6}{u^4} + \frac{1}{10} g_2 + \frac{3}{7} g_3 u^2 + \cdots,$$

so dass die doppeltperiodische Function $12\,\wp(u)^2 - 2\,\wp''(u)$ für $u = 0$ den endlichen Wert g_2 annimmt. Da dieselbe auch an allen übrigen Stellen des Periodenparallelogramms endlich ist, so ist sie nach einem

pg. 178 bewiesenen Satze mit einer Constanten identisch, welche letztere wir bereits als g_2 erkannten. Es besteht hiernach für alle u die Relation:

$$(7) \qquad 2\wp''(u) = 12\wp(u)^2 - g_2.$$

Multiplicieren wir dieselbe mit $\wp'(u)\,du$ und integrieren, so folgt:

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) + C,$$

wo C eine von u unabhängige Grösse ist. Entwickelt man die rechte und linke Seite dieser Gleichung nach Potenzen von u, so wird das Absolutglied der linken Seite $-\frac{4}{7}g_3$, dasjenige der rechten $C+\frac{3}{7}g_3$. Durch Gleichsetzen beider Werte folgt $C = -g_3$. *Zwischen den beiden Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ besteht hiernach die folgende algebraische Relation identisch:*

$$(8) \qquad \wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3.$$

Wir besitzen jetzt alle Mittel zum Beweise des bemerkenswerten Satzes, *dass sich die sämtlichen Coefficienten G_4, $G_5, \cdots$ der Reihenentwicklung* (6) *rational und ganz in g_2 und g_3 darstellen lassen.* Setzen wir nämlich an:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + a_1u^2 + a_2u^4 + a_3u^6 + \cdots,$$

so ist:

$$\wp(u)^2 = \frac{1}{u^4} + 2a_1 + 2a_2u^2 \\ + \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n+1} + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1)\,u^{2n}.$$

Andrerseits hat man:

$$\wp''(u) = \frac{6}{u^4} + 2a_1 + 4\cdot 3a_2u^2 \\ + 6\cdot 5a_3u^4 + \cdots + (2n+2)(2n+1)\,a_{n+1}u^{2n} + \cdots.$$

Tragen wir diese beiden Reihen in (7) rechts und links ein und vergleichen die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u, so ergiebt sich die Recursionsformel:

$$(4n^2 + 6n - 10)\,a_{n+1} = 6(a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + a_3a_{n-3} + \cdots + a_{n-1}a_1),$$

welche zur Berechnung von $a_3, a_4, \cdots$ aus $a_1 = \frac{1}{20}g_2$ und $a_2 = \frac{1}{28}g_3$ tauglich ist. Man findet für $n = 2, 3, 4, \cdots$:

$$a_3 = \frac{1}{1200}g_2^2,\quad a_4 = \frac{3}{6160}g_2g_3,\quad a_5 = \frac{1}{1456}g_3^2 + \frac{1}{156000}g_2^3, \cdots,$$

womit unsere obige Behauptung über die Coefficienten G_4, $G_5, \cdots$ sich bestätigt.

Als hauptsächliches Ergebnis fassen wir zusammen: *Die Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ gestatten die Potenzreihenentwicklungen:*

$$(9)\ \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3\, g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \cdots,$$

$$(10)\quad \wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \frac{g_2^2}{2^3 \cdot 5^2} u^5 + \frac{3\, g_2 g_3}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^7 + \cdots;$$

der Convergenzkreis dieser Reihen hat den Nullpunkt zum Mittelpunkt und reicht bis an den dem Nullpunkt nächstgelegenen Gitterpunkt gerade heran.

Da die Function $\zeta(u)$ ungerade ist, so kann die Reihe für $\zeta(u)$ nach Potenzen von u ein Absolutglied nicht enthalten. Durch Integration und Zeichenwechsel findet man somit aus Gleichung (9) folgende *Potenzreihe der Function* $\zeta(u)$:

$$(11)\quad \zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^9 + \cdots.$$

Der Convergenzkreis dieser Reihe ist derselbe, wie derjenige der Reihen (9) und (10).

Aus (11) ergiebt sich mit Rücksicht auf (4) pg. 186 weiter:

$$\int\left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du = \log\left(\frac{\sigma(u)}{u}\right)$$

$$= -\frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^4 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^6 - \frac{g_2^2}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^8 - \frac{g_2 g_3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} u^{10} + \cdots,$$

da zufolge (1) pg. 186 in der Reihenentwicklung von $\log\,[\sigma(u) : u]$ ein Absolutglied nicht auftreten kann. Durch Vermittelung der Exponentialreihe gewinnt man von hieraus als *Reihenentwicklung der Function* $\sigma(u)$:

$$(12)\quad \sigma(u) = u - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^5 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^7 - \frac{g_2^2}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} u^9 - \frac{g_2 g_3}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} u^{11} + \cdots.$$

Diese Reihe ist *beständig, d. i. für alle endlichen Werte von u convergent.*

§ 5. Neue Productformeln für $\sigma(u)$.

In (10) pg. 188 haben wir eine Reihe für $\zeta(u)$ kennen gelernt, die für alle endlichen u unbedingt und gleichmässig convergent war,

jedoch so, dass in den Gitterpunkten je ein Reihenglied einen Pol besass. Man kann jener Reihe die folgende Gestalt geben:

$$\zeta(u) - \frac{1}{u} = \frac{\eta_2}{\omega_2} u + \frac{d}{du}\left[\log\left(\frac{\sin\frac{\pi u}{\omega_2}}{u}\right)\right]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{du}\left[\log \frac{\sin \pi\left(n\omega + \frac{u}{\omega_2}\right) \sin \pi\left(n\omega - \frac{u}{\omega_2}\right)}{\sin^2 n\pi\omega}\right].$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus die im gleichen Umfange (cf. pg. 124) convergente Reihe:

$$\int_0^u \left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] du = \frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} + \log\left(\frac{\sin\frac{\pi u}{\omega_2}}{u}\right) - \log\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{\sin\left(n\pi\omega + \frac{\pi u}{\omega_2}\right) \sin\left(n\pi\omega - \frac{\pi u}{\omega_2}\right)}{\sin^2 n\pi\omega}.$$

Nun aber hat man doch:

$$\sigma(u) = u\, e^{\int_0^u \left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] du}.$$

Es ergiebt sich sonach als *eine für alle endlichen Werte von u gültige Productdarstellung der σ-Function:*

$$(1) \qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi\omega + \frac{\pi u}{\omega_2}\right) \sin\left(n\pi\omega - \frac{\pi u}{\omega_2}\right)}{\sin^2 n\pi\omega}.$$

Drückt man die unter dem Productzeichen stehenden Sinus durch die Exponentialfunction aus und benutzt für $e^{\pi i \omega}$ die bereits pg. 184 eingeführte Abkürzung q, so kann man der Formel (1) auch noch die folgenden Gestalten verleihen:

$$(2) \quad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n} e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}{1 - q^{2n}} \cdot \frac{1 - q^{2n} e^{-\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}{1 - q^{2n}}\right),$$

$$(3) \qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}.$$

§ 6. Fourier'sche Reihen für $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$.

Drückt man im allgemeinen Gliede der Reihe (10) pg. 188 die Functionen ctg direct durch die Exponentialfunction aus, so nimmt diese Darstellung von $\zeta(u)$ die Gestalt an:

$$(1)\quad \zeta(u) = \frac{\eta_2 u}{\omega_2} + \frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2} - \frac{2\pi i}{\omega_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}{1-q^{2n}e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}} - \frac{q^{2n}e^{-\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}{1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}\right),$$

wie eine leichte Zwischenrechnung zeigt.

Wir machen nunmehr von der oben (pg. 184) festgestellten Ungleichung $|q| < 1$ Gebrauch und wollen überdies u derart einschränken, dass die Ungleichung:

$$(2)\qquad \left| q^{2n}\cdot e^{\pm\frac{2\pi i u}{\omega_2}} \right| < 1$$

für beide Vorzeichen und für alle $n = 1, 2, 3 \cdots$ erfüllt ist. Es ist dies wegen $|q| < 1$ sicher der Fall, wenn diese Forderung für $n = 1$ gilt. Da wir in diesem Falle auch schreiben können:

$$\left| e^{\frac{\pi i}{\omega_2}(\omega_1 \pm u)} \right| < 1,$$

so muss $\frac{\omega_1 \pm u}{\omega_2}$ für beide Vorzeichen einen positiven imaginären Bestandteil haben. Man findet, *dass u auf einen aus zwei Reihen unend-*

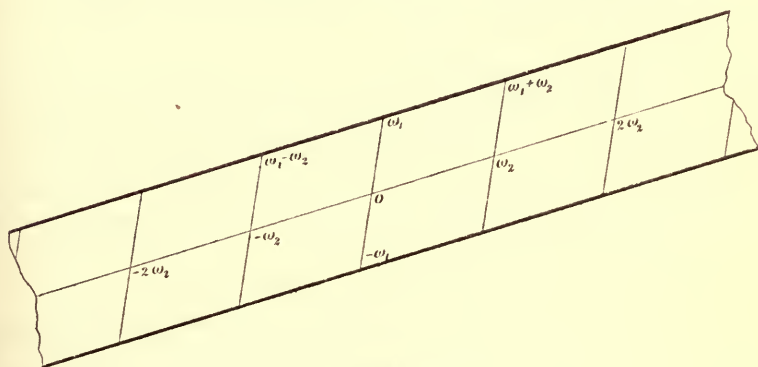


Fig. 48.

lich vieler Periodenparallelogramme bestehenden Streifen der u-Ebene eingegrenzt ist, wie ihn Figur 48 zur Darstellung bringt.

Unter Gültigkeit der Bedingung (2) kann man nun das allgemeine Glied der Reihe (1) in folgende convergente Reihe entwickeln:

$$\frac{q^{2n}e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}{1-q^{2n}e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}}} - \frac{q^{2n}e^{-\frac{2\pi i u}{\omega_2}}}{1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi i u}{\omega_2}}} = 2i\sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn}\sin\frac{2m\pi u}{\omega_2}.$$

Die Eintragung dieses Wertes in (1) liefert:

$$\zeta(u) = \frac{\eta_2 u}{\omega_2} + \frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2} + \frac{4\pi}{\omega_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn}\sin\frac{2m\pi u}{\omega_2}.$$

Die hier rechts stehende Reihe ist nun, immer unter Voraussetzung der Gültigkeit der Bedingung (2), absolut und demnach auch unbedingt convergent, was man durch eine Überlegung zeigt, wie wir sie ähnlich bereits pg. 184 ausführten. Es ist demnach gestattet, bei stehendem m zunächst nach n zu summieren, wobei man zu einer geometrischen Reihe geführt wird. Auf diese Weise gelangen wir zu der folgenden *Fourier'schen Reihe der Function* $\zeta(u)$:

$$(3) \qquad \zeta(u) = \frac{\eta_2 u}{\omega_2} + \frac{\pi}{\omega_2} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{\omega_2} + \frac{4\pi}{\omega_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin \frac{2m\pi u}{\omega_2}.$$

Durch Differentiation nach u findet man als Fourier'sche Reihen für $\wp(u)$ und $\wp'(u)$:

$$(4) \quad \wp(u) = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{\omega_2}} - \frac{8\pi^2}{\omega_2^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m q^{2m}}{1-q^{2m}} \cos \frac{2m\pi u}{\omega_2},$$

$$(5) \qquad \wp'(u) = -2\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^3 \frac{\cos \frac{\pi u}{\omega_2}}{\sin^3 \frac{\pi u}{\omega_2}} + \frac{16\pi^3}{\omega_2^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin \frac{2m\pi u}{\omega_2}.$$

Die hier rechts stehenden Reihen convergieren nämlich, wie man ohne Mühe nachweist, bei Gültigkeit von (2) gleichmässig und liefern demnach zufolge eines pg. 124 bewiesenen Satzes Darstellungen für die Ableitungen $-\zeta'(u)$, $-\zeta''(u)$. Wir heben nochmals hervor, *dass der Gültigkeitsbereich der Reihen* (3), (4) *und* (5) *der in Figur* 48 *dargestellte Streifen der u-Ebene ist.*

§ 7. Partialbruchzerlegung der doppeltperiodischen Functionen.

Wir wenden uns jetzt zur Discussion der Frage, inwieweit wir in den bisherigen Entwicklungen zugleich die Mittel gewonnen haben, beliebige doppeltperiodische Functionen darzustellen. Wir bringen zu diesem Ende erstlich die Function $\zeta(u)$ zur Verwendung. Schreibt man in (11) pg. 189 an Stelle von u die Differenz $(u-\alpha)$, unter α eine beliebige Constante verstanden, so zeigt sich, dass $\zeta(u-\alpha)$ bei Vermehrung von u um Perioden durchaus das Verhalten von $\zeta(u)$ teilt. Man merke überdies an, dass $\zeta(u-\alpha)$ im einzelnen Periodenparallelogramm nur einen Pol besitzt, nämlich bei $u=\alpha$, resp. der mit α homologen Stelle. In der Umgebung von α gilt zufolge (11) pg. 193 die Entwicklung:

$$(1) \qquad \zeta(u-\alpha) = \frac{1}{u-\alpha} - \frac{g_2}{60}(u-\alpha)^3 + \cdots.$$

Nun sei $f(u; \omega_1, \omega_2)$ irgend eine doppeltperiodische Function, von der wir zuvörderst annehmen, dass sie nur einfache Pole besitzt. Ist $f(u)$ n-wertig, so finden sich in einem einzelnen Periodenparallelogramm n Pole, die etwa bei $u = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ gelegen seien. Die zu letzteren gehörenden Residuen von $f(u)$ seien $a_1, a_2, \cdots, a_n$; nach einem pg. 179 bewiesenen Satze verschwindet die Summe dieser Residuen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0. \tag{2}$$

Man betrachte jetzt die Differenz $f(u) - a_1 \zeta(u - \alpha_1)$; zufolge (1) wird dieselbe bei $u = \alpha_1$ regulär sein. Entsprechend schliesst man sofort weiter, dass:

$$F(u) = f(u) - a_1 \zeta(u - \alpha_1) - a_2 \zeta(u - \alpha_2) - \cdots - a_n \zeta(u - \alpha_n)$$

im ganzen Parallelogramm regulär ist. Nun ist überdies $F(u)$ doppeltperiodisch. Wenn nämlich u um ω_1 wächst, so nimmt $F(u)$ um $\eta_1 \sum_{k=1}^{n} a_k$ ab; dieser Betrag ist aber zufolge (2) gleich 0, so dass $F(u)$ die Periode ω_1 und offenbar auch ω_2 besitzt. Eine im ganzen Parallelogramm reguläre doppeltperiodische Function ist aber mit einer Constanten identisch. Nennen wir letztere A, so folgt: *Eine n-wertige doppeltperiodische Function $f(u)$ mit nur einfachen Polen lässt sich vermöge der Function $\zeta(u)$ in der Gestalt:*

$$f(u) = A + a_1 \zeta(u - \alpha_1) + a_2 \zeta(u - \alpha_2) + \cdots + a_n \zeta(u - \alpha_n) \tag{3}$$

darstellen, wo A eine Constante bedeutet und $a_1, a_2, \cdots, a_n$ die zu den Polen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ gehörenden Residuen unserer Function sind.

Die in Formel (3) geleistete Darstellung bezeichnen wir als *„Partialbruchzerlegung der doppeltperiodischen Function $f(u)$"*. Dieselbe correspondiert genau der gewöhnlichen Partialbruchzerlegung einer rationalen Function mit nur einfachen Polen (cf. (7) pg. 150), wo an Stelle von $\zeta(u - \alpha)$ der Partialbruch $\frac{1}{u - \alpha}$ tritt.

Möge jetzt $f(u; \omega_1, \omega_2)$ Pole beliebiger Ordnungen besitzen, und zwar seien im Periodenparallelogramm insgesamt n Pole der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ bei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ gelegen. Für die Residuen $a_1, a_2 \cdots, a_n$ derselben gilt wiederum die Gleichung (2). Hier muss man nun neben $\zeta(u - \alpha)$ noch die Functionen $\wp(u - \alpha)$, $\wp'(u - \alpha)$, $\wp''(u - \alpha), \cdots$ benutzen, deren Verhalten bei $u = \alpha$ aus (9) und (10) pg. 193 abzulesen ist. Es sind dieses die Grössen, welche die Stelle der rationalen Partialbrüche $\frac{1}{(u-\alpha)^2}, \frac{1}{(u-\alpha)^3}, \cdots$ vertreten. Man kann nämlich jetzt leicht die Coefficienten $a_k', a_k'', \cdots$ für den einzelnen Pol α_k derart bestimmen, dass die Differenz:

$$f(u) - \sum_{k=1}^{n} [a_k \zeta(u - \alpha_k) + a'_k \wp(u - \alpha_k) + a''_k \wp'(u - \alpha_k) + \cdots + a_k^{(\nu_k - 1)} \wp_k^{(\nu_k - 2)}(u - \alpha_k)]$$

im Parallelogramm überall regulär ist. Da sich diese Differenz aber in Abhängigkeit von u zufolge (2) als doppeltperiodisch zu erkennen giebt, so ist sie wiederum mit einer Constanten A identisch. So entspringt die *allgemeine Formel für die Partialbruchzerlegung der doppeltperiodischen Functionen:*

$$(4) \quad f(u) = A + \sum_{k=1}^{n} [a_k \zeta(u - \alpha_k) + a'_k \wp(u - \alpha_k) + a''_k \wp'(u - \alpha_k) + \cdots + a_k^{(\nu_k - 1)} \wp_k^{(\nu_k - 2)}(u - \alpha_k)],$$

welche genau der allgemeinen Gleichung (7) pg. 150 für die rationalen Functionen entspricht.

§ 8. Factorenzerlegung der doppeltperiodischen Functionen.

Für eine zweite Art der Darstellung der doppeltperiodischen Functionen benutzen wir die σ-Function. Hierbei ist eine kurze Vorentwicklung vorauszusenden, welche die Aufstellung einer schon oben (pg. 185) erwähnten Relation zwischen $\omega_1, \omega_2; \eta_1, \eta_2$ zum Ziele hat.

Man führe das Integral $\int \zeta(u)\, du$ über den Rand R eines Periodenparallelogramms im positiven Umlaufssinne aus. Wir benutzen hierbei etwa das in Figur 46 pg. 178 gezeichnete Parallelogramm, wo jedoch u_0 nicht gerade mit einer ganzzahligen Combination $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ der Perioden identisch genommen sein soll; denn in diesem Falle würde $\zeta(u)$ auf dem Rande R einen Pol besitzen. Es folgt zunächst genau wie pg. 178:

$$\int_{(R)} \zeta(u)\, du = \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} [\zeta(u) - \zeta(u + \omega_1)]\, du - \int_{u_0}^{u_0+\omega_1} [\zeta(u) - \zeta(u + \omega_2)]\, du.$$

Da aber die hier in Klammern stehenden Differenzen zufolge (11) pg. 189 constant gleich $-\eta_1$ bez. $-\eta_2$ sind, so hat man:

$$\int_{(R)} \zeta(u)\, du = \omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1.$$

Andrerseits ergiebt sich bei Benutzung der Regel (9) pg. 144:

$$\int_{(R)} \zeta(u)\, du = \int_{(R)} d \log \sigma(u) = 2 i \pi,$$

da $\sigma(u)$ im Parallelogramm einen Nullpunkt erster Ordnung hat, übrigens aber daselbst allenthalben endlich und von null verschieden ist. Setzt man die beiden für das fragliche Integral gewonnenen Werte gleich, so ergiebt sich als *eine zwischen* $\omega_1, \omega_2; \eta_1, \eta_2$ *bestehende Relation:*

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2i\pi. \tag{1}$$

Man bezeichnet dieselbe als die *„Legendre'sche Relation"*, weil sich in der That bei Legendre eine mit der Gleichung (1) dem Wesen nach übereinstimmende Gleichung findet.

Sei jetzt $f(u; \omega_1, \omega_2)$ irgend eine doppeltperiodische Function. In einem ausgewählten Periodenparallelogramm möge dieselbe Pole der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ bei $u = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ besitzen, sowie Nullpunkte der Ordnungen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ bei $u = \beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_m$, während sie übrigens im Parallelogramm allenthalben endlich und von 0 verschieden ist. Hier gilt alsdann nach einem pg. 179 bewiesenen Theoreme:

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n, \tag{2}$$

wobei der Summenwert der rechten oder linken Seite die Wertigkeit von $f(u)$ darstellt.

Unter diesen Umständen ist $\frac{d\log f(u)}{du} = \frac{f'(u)}{f(u)}$ eine $(m+n)$-wertige doppeltperiodische Function mit lauter einfachen Polen; und zwar haben wir erstlich Pole der Residuen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ bei $u = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$, weiter Pole der Residuen $-\nu_1, -\nu_2, \cdots, -\nu_n$ bei $u = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Der Ansatz (3) pg. 197 liefert somit:

$$\frac{d\log f(u)}{du} = A + \mu_1\zeta(u-\beta_1) + \mu_2\zeta(u-\beta_2) + \cdots \\ + \mu_m\zeta(u-\beta_m) - \nu_1\zeta(u-\alpha_1) - \cdots - \nu_n\zeta(u-\alpha_n)$$

oder unter Benutzung von (4) pg. 186:

$$d\log f(u) = A\,du + \mu_1\,d\log\sigma(u-\beta_1) + \cdots - \nu_1\,d\log\sigma(u-\alpha_1) - \cdots,$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$\log f(u) = Au + B + \log\frac{\sigma^{\mu_1}(u-\beta_1)\cdots\sigma^{\mu_m}(u-\beta_m)}{\sigma^{\nu_1}(u-\alpha_1)\cdots\sigma^{\nu_n}(u-\alpha_n)},$$

unter B eine neue Constante verstanden. Setzt man $e^B = C$, so hat man für $f(u)$ die Darstellung:

$$f(u) = C\cdot e^{Au}\cdot\frac{\sigma^{\mu_1}(u-\beta_1)\,\sigma^{\mu_2}(u-\beta_2)\cdots\sigma^{\mu_m}(u-\beta_m)}{\sigma^{\nu_1}(u-\alpha_1)\,\sigma^{\nu_2}(u-\alpha_2)\cdots\sigma^{\nu_n}(u-\alpha_n)}. \tag{3}$$

Zur Bestimmung von A lassen wir u um ω_1 zunehmen. Mit Rücksicht auf (2) findet man durch Gebrauch der Regel (12) pg. 189, dass die rechte Seite der Gleichung (3) dabei in sich selbst multipliciert mit:

$$e^{A\omega_1 + (\nu_1\alpha_1 + \nu_2\alpha_2 + \cdots + \nu_n\alpha_n - \mu_1\beta_1 - \mu_2\beta_2 - \cdots - \mu_m\beta_m)\eta_1}$$

übergeht. Da aber dieser Factor wegen $f(u + \omega_1) = f(u)$ gleich 1 ist, so schliessen wir auf die Gleichung:

$$(4)\qquad A\omega_1 + \eta_1\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\alpha_k - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\beta_l\right) = -2m_2\pi i,$$

wo m_2 eine bestimmte ganze Zahl ist. Ebenso gewinnt man:

$$(5)\qquad A\omega_2 + \eta_2\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\alpha_k - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\beta_l\right) = 2m_1\pi i,$$

wo auch m_1 ganzzahlig ist.

Man multipliciere nun erstlich diese beiden Gleichungen mit $-\omega_2$ bez. ω_1 und addiere. Es folgt:

$$(\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1)\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\alpha_k - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\beta_l\right) = 2\pi i\,(m_1\omega_1 + m_2\omega_2),$$

woraus wir mit Rücksicht auf die Legendre'sche Relation (1) die Gleichung gewinnen:

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{n}\nu_k\alpha_k - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\beta_l = m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen: *Für irgend eine doppeltperiodische Function $f(u;\omega_1,\omega_2)$ ist die Summe aller im einzelnen Parallelogramm gelegenen Nullpunkte β abgesehen von ganzzahligen Vielfachen der Perioden ω_1, ω_2 gleich der Summe aller im Parallelogramm befindlichen Pole α; jeder Nullpunkt und Pol muss hierbei in der ihm zukommenden Multiplicität in der Summe enthalten sein.*

Combiniert man zweitens die Gleichungen (4) und (5) zur Elimination der links stehenden Summen, so folgt:

$$A(\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1) = -2i\pi\,(m_1\eta_1 + m_2\eta_2),$$
$$A = -(m_1\eta_1 + m_2\eta_2).$$

Daraufhin ist die „Factorenzerlegung" der vorliegenden doppeltperiodischen Function $f(u)$ durch die folgende Formel geleistet:

$$(7)\quad f(u) = C \cdot e^{-(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\,u} \cdot \frac{\sigma^{\mu_1}(u-\beta_1)\,\sigma^{\mu_2}(u-\beta_2)\cdots\sigma^{\mu_m}(u-\beta_m)}{\sigma^{\nu_1}(u-\alpha_1)\,\sigma^{\nu_2}(u-\alpha_2)\cdots\sigma^{\nu_n}(u-\alpha_n)},$$

wo m_1, m_2 *zwei, etwa durch die Gleichung* (6) *zu definierende ganze Zahlen sind und* C *eine Constante bedeutet.* Diese Formel correspondiert genau der in (8) pg. 151 gegebenen Factorenzerlegung einer rationalen Function. Wir entnehmen aus (7) noch das Theorem: *Eine doppeltperiodische Function ist durch ihre Pole und Nullpunkte bis auf einen constanten Factor eindeutig bestimmt.*

Die durchlaufene Entwicklung ist übrigens auch der Umkehrung fähig in dem Sinne, *dass überhaupt jeder Ausdruck von der Gestalt der rechten Seite der Gleichung* (7), *falls die Gleichungen* (2) *und* (6) *erfüllt sind, eine doppeltperiodische Function* $f(u; \omega_1, \omega_2)$ *darstellt.* Man überblickt also hiermit den Gesamtumfang der doppeltperiodischen Functionen $f(u; \omega_1, \omega_2)$.

Um die Darstellung (7) z. B. auf $\wp'(u)$ anzuwenden, erinnern wir daran, dass diese Function ausschliesslich in den Gitterpunkten des Parallelogrammnetzes Pole besitzt, und zwar solche dritter Ordnung; wir setzen dieserhalb $\alpha_1 = 0$, $\nu_1 = 3$, $n = 1$. Für die drei Nullpunkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ wird dann die Gleichung mit ganzzahligen m_1, m_2:

$$(8)\qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

gelten. Mit β_1 ist auch $-\beta_1$ Nullpunkt der „ungeraden" $\wp'$-Function. Wäre nun $-\beta_1$ mit β_2 homolog, so wäre $(\beta_1 + \beta_2)$ eine ganzzahlige Combination der Perioden, und dasselbe würde demnach zufolge (8) auch von β_3 gelten. Das aber würde der Thatsache widersprechen, dass $\wp'(u)$ in den Gitterpunkten Pole hat. Dieserhalb muss $-\beta_1$ mit β_1 homolog sein, so dass $\beta_1 = \frac{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}{2}$ sein wird, wobei jedoch nicht beide ganze Zahlen n_1, n_2 gerade sein dürfen. Offenbar werden sich auch β_2 und β_3 in dieser Gestalt darstellen müssen. Es lässt sich weiter leicht zeigen, dass von den drei Nullpunkten β_1, β_2, β_3 keine zwei coincidieren resp. homolog sein können. Wären nämlich β_1 und β_2 bis auf ganzzahlige Multipla von ω_1, ω_2 gleich, so wäre bei dem für die β gewonnenen Gesetze $\beta_1 + \beta_2$ eine ganzzahlige Combination von ω_1, ω_2, und dasselbe würde zufolge (8) von β_3 gelten, was doch nicht der Fall ist. Damit ist bewiesen: *Die* $\wp'$*-Function hat nur einfache Nullpunkte; und zwar werden diese durch die mit* $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ *homologen Stellen, d. i. durch die Seitenmitten und Mittelpunkte der Parallelogramme des Netzes geliefert.* Setzen wir jetzt insbesondere $\beta_1 = \frac{\omega_1}{2}$,

$\beta_2 = \frac{\omega_2}{2}$, $\beta_3 = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, so gilt in (8) rechter Hand $m_1 = m_2 = 0$; und man hat alsdann den constanten Factor C (cf. Formel (7)) noch so zu bestimmen, dass $\lim_{u=0} u^3 \wp'(u) = -2$ wird. Die gesuchte Darstellung der $\wp'$-Function ist daraufhin:

$$(9) \qquad \wp'(u) = -\frac{2\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\cdot\sigma^3(u)}.$$

Aufgabe 1. Ist bei $u = a$ eine der Nullstellen der $\wp$-Function gelegen, so beweise man die Gültigkeit der Formel:

$$(10) \qquad \wp(u) = -\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2(a)\,\sigma^2(u)}.$$

Aufgabe 2. Man beweise die später zur Verwendung kommende Formel:

$$(11) \qquad \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}.$$

§ 9. Abbildung der u-Ebene durch die $\wp$-Function.

Zur Abkürzung verstehen wir unter ω_3 die Summe $\omega_1 + \omega_2$. Das Parallelogrammnetz der u-Ebene möge so gelegen sein, dass $u = 0$, ω_2, ω_3, ω_1 die Ecken eines ersten Parallelogramms sind. Die Function $\wp(u)$ als zweiwertige doppeltperiodische Function nimmt den einzelnen complexen Wert im allgemeinen in zwei getrennt liegenden Punkten des Parallelogramms an. Man kann auch sofort angeben, dass zwei bezüglich der Parallelogrammmitte $\frac{1}{2}\omega_3$ diametrale Punkte u und $(\omega_3 - u)$ immer denselben Wert $\wp$ besitzen.

Trennen wir hiernach vermöge der einen Diagonale vom Parallelogramm das Dreieck der Eckpunkte 0, ω_1, ω_2 ab, *so wird dieses gerade ein einfaches und vollständiges Abbild der Ebene von $z = \wp(u)$ sein* (cf. Fig. 49). Freilich haben wir betreffs der Eindeutigkeit über die Randpunkte des Dreiecks folgende Zusätze zu machen. Halten wir an der Bezeichnung $\wp(u) = z$ weiterhin fest, so werden erstlich die drei Ecken 0, ω_1, ω_2 einen und denselben Punkt, nämlich $z = \infty$, liefern. Überdies werden auf der einzelnen Seite je zwei von der Mitte gleich weit abstehende Punkte dasselbe z liefern, wie denn z. B. $\wp(u) = \wp(\omega_1 - u)$ ist.

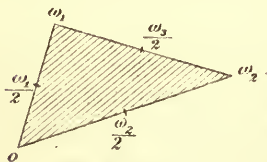


Fig. 49.

Man kann sich hiernach von der Beziehung des Dreiecks auf die z-Ebene dadurch ein anschauliches Bild machen, dass man ersteres in die letztere durch mechanische Deformation in der Weise umgestaltet, wie Figur 50 näher andeutet. Setzen wir zur Abkürzung:

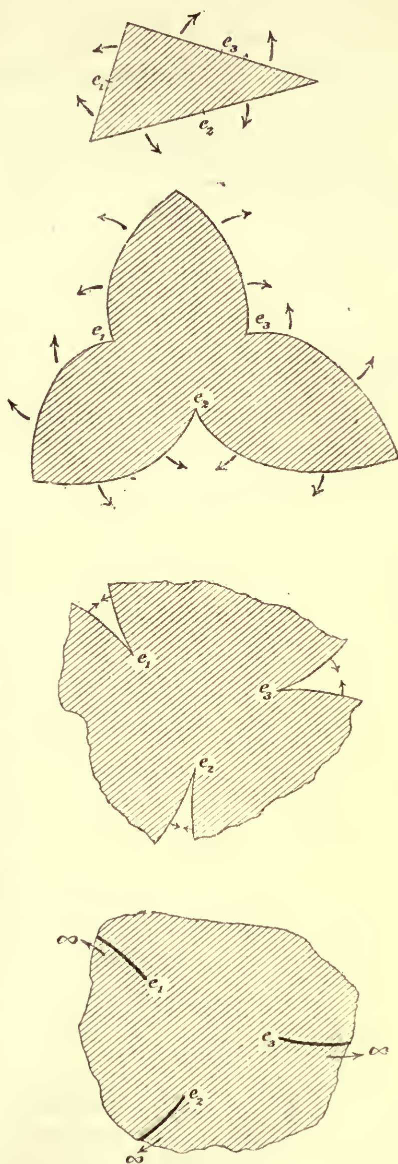


Fig. 50.

$$(1) \quad \begin{cases} \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1, \\ \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2, \\ \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = e_3, \end{cases}$$

so werden die drei Seitenmitten des Dreiecks schliesslich in die Punkte $z = e_1, e_2, e_3$ der z-Ebene rücken. Die drei Seitenmitten haben dieserhalb bereits gleich anfangs in Figur 50 die Bezeichnungen e_1, e_2, e_3 bekommen. Die einander correspondierenden Hälften jeder Seite des Dreiecks kommen schliesslich zum Zusammenfall und liefern eine vom betreffenden Punkte e_k nach $z = \infty$ ziehende Curve (cf. die letzte Zeichnung in Figur 50).

Aus dieser Darlegung geht hervor, *dass die Ecken und Seitenmitten des Dreiecks irreguläre Punkte, und zwar Verzweigungspunkte, der conformen Abbildung sind.* In der That werden die Winkel der u-Ebene, welche diese sechs Punkte zu Scheitelpunkten haben, auf Winkel doppelter Grösse der z-Ebene abgebildet. Man kann dies auch sehr leicht durch Rechnung beweisen. Erstlich nämlich gilt für $u = 0$ in erster Annäherung $z = \frac{1}{u^2}$ und also $u = \frac{1}{\sqrt{z}}$ für $z = \infty$. Andrerseits ergiebt sich, indem man in (11) pg. 202 für v den Wert $\frac{\omega_k}{2}$ einträgt, für die nächste Umgebung von $\frac{\omega_k}{2}$ bez. e_k:

$$z - e_k = c\left(u - \frac{\omega_k}{2}\right)^2, \quad u - \frac{\omega_k}{2} = C\sqrt{z - e_k},$$

da $\sigma\left(u + \frac{\omega_k}{2}\right)$ bis auf einen Exponentialfactor gleich $\sigma\left(u - \frac{\omega_k}{2}\right)$ ist, wie aus der Grundformel (12) pg. 189 für die σ-Function leicht hervorgeht.

Das Periodenparallelogramm besteht aus *zwei* Dreiecken unserer Art. *Somit wird sich das Parallelogramm vermöge $z = \wp(u)$ auf eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche über der z-Ebene abbilden, welche offenbar vier bei e_1, e_2, e_3, ∞ gelegene Verzweigungspunkte besitzt.* Bei der Abbildung des Parallelogramms sollen je zwei homologe Randpunkte u und $(u + \omega_1)$ bez. u und $(u + \omega_2)$, insofern sie gleiche Werte von $\wp(u)$, und ebenso auch von $\wp'(u)$ liefern, den gleichen Punkt der Riemann'schen Fläche liefern. Die nähere Betrachtung zeigt, dass wir diese Riemann'sche Fläche gewinnen, wenn wir die am Schlusse in Fig. 50 gewonnene z-Ebene in zwei Exemplaren übereinander schichten und beide Blätter je längs der von e_1, e_2, e_3 nach ∞ ziehenden „Verzweigungsschnitte" S_1, S_2, S_3 ineinander übergehen lassen. Die in Figur 51 gezogenen, auf der Fläche geschlossenen Curven, welche längs ihres Verlaufs im unteren Blatte punktiert sind, mögen den Zusammenhang der Blätter erläutern.

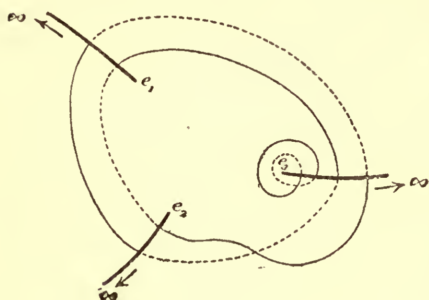


Fig. 51.

Hiermit vergleiche man nun die geometrischen Ausführungen von pg. 167 ff., wo wir bereits die Möglichkeit erkannten, eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten eindeutig stetig auf ein Viereck zu beziehen. Handelte es sich aber dort nur um Überlegungen der „analysis situs", so haben wir darüber hinaus hier mit einer „conformen Abbildung" zu thun.

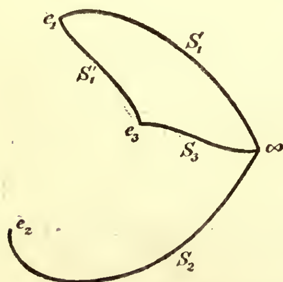


Fig. 52.

Wir hatten damals zwei Verzweigungsschnitte gebraucht, welche die vier Verzweigungspunkte paarweise verbanden. Es ist ein Leichtes, unser jetziges System der Verzweigungsschnitte S_1, S_2, S_3 so abzuändern, dass wir zum früheren Schnittpaare zurückkommen. Figur 52 möge uns ein schematisches Bild der Verhältnisse auf der z-Kugel liefern,

die wir zur Veranschaulichung des Punktes ∞ heranziehen. Führen wir hier den e_1 und e_3 verbindenden Schnitt S_1' durch beide Blätter und vertauschen die beiden durch S_1, S_3, S_1' eingegrenzten dreieckförmigen Stücke beider Blätter mit einander, so hören offenbar S_1 und S_3 auf, Verzweigungsschnitte zu sein, während S_1' als solcher eintritt.

Die Querschnitte Q_1, Q_2, welche wir früher (pg. 167) benutzten, lieferten mit ihren vier „Ufern" die vier Seiten des Vierecks. Q_1, Q_2 waren so gewählt, dass sie durch keinen Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche liefen. Hier sind wir zunächst zu etwas anderen Verhältnissen geführt, weil die Parallelogrammseiten gerade durch die irregulären Punkte der conformen Abbildung hindurchlaufen. Um auch in dieser Hinsicht Übereinstimmung zu erzielen, verschieben wir zuvor das Parallelogramm, wie Fig. 53 zeigt, ein wenig, so dass die neuen Eckpunkte u_0, $u_0 + \omega_1, \cdots$ nicht auf den Seiten des bisherigen Netzes gelegen sind. Die neue von u_0 nach $(u_0 + \omega_1)$ laufende Seite wird sich, wie man aus der Stetigkeit der Abbildung leicht schliesst, auf den Schnitt Q_1 der Figur 54 übertragen; und entsprechend liefert die von u_0 nach $u_0 + \omega_2$ ziehende

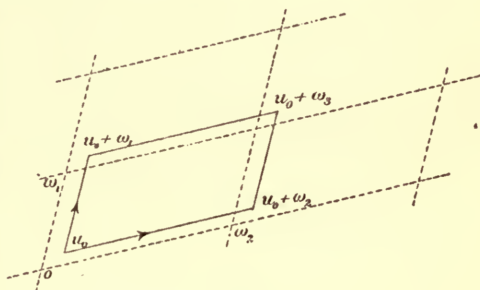


Fig. 53.

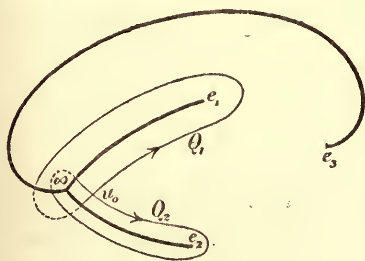


Fig. 54.

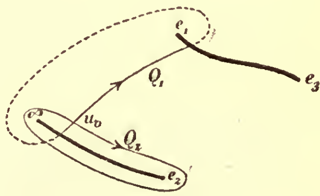


Fig. 55.

Seite den Schnitt Q_2. Ersetzen wir noch die Schnitte S_1, S_3 durch S_1', so verlaufen die jetzt erhaltenen Querschnitte Q_1, Q_2, wie Figur 55 zeigt. Diese kommt aber im wesentlichen mit der früher benutzten Figur 38 pg. 167 überein.

Jedes einzelne Parallelogramm des Netzes mit den Gitterpunkten $u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, die wir soeben benutzten, wird vermöge $z = \wp(u)$ auf eine genau ebensolche zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit zwei

Schnitten Q_1, Q_2 abgebildet, wie sie Figur 55 darstellt. *Um hiernach das Abbild der gesamten u-Ebene vermöge* $z = \wp(u)$ *zu gewinnen, hat man alle diese Riemann'schen Flächen über einander zu lagern und nunmehr längs der „Verzweigungsschnitte"* Q_1, Q_2 *in der Folge ineinander übergehen zu lassen, wie ihre Originale, d. i. die Parallelogramme der u-Ebene vorschreiben.* Wir haben damit *„die zur unendlich-vieldeutigen Function* $u(z)$ *gehörige unendlich vielblättrige Riemann'sche Fläche"* gewonnen. In den unendlich vielen an der einzelnen Stelle übereinander liegenden Punkten hat die Function die Werte $(\pm u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$, zu bilden für beide Vorzeichen und für alle Combinationen ganzer Zahlen m_1, m_2.

Die Function $u(z)$ hat übrigens auf der Riemann'schen Fläche einen sehr bekannten Charakter. Da die $\wp'$-Function an den Stellen $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_3}{2}$ Nullpunkte hat, so ist die Gleichung:

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 = 0$$

erfüllt, falls man $u = \frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ oder $\frac{\omega_3}{2}$, d. i. $\wp(u) = e_1$, e_2 oder e_3 setzt. Es sind hiernach e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der eben angegebenen cubischen Gleichung für $\wp$. Merken wir also an:

$$(2)\quad \wp'(u) = \frac{d\wp(u)}{du} = 2\sqrt{\left(\wp(u)-\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(\wp(u)-\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\left(\wp(u)-\wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)\right)}$$

oder, falls wir uns der Bezeichnung z an Stelle von $\wp$ bedienen:

$$(3)\qquad \frac{dz}{du} = 2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass $u = 0$ den Wert $z = \infty$ liefert, werden wir aus der Gleichung (3) die Folgerung ziehen können:

$$(4)\qquad u = \int_\infty^z \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Hieraus entspringt das fundamentale Resultat: *Auf unserer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche, welche wir vom algebraischen Standpunkte aus als die zur zweideutigen algebraischen Function* $w = \sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$ *gehörende Fläche charakterisieren können, ist u eines von den „zur Fläche gehörenden Integralen"* $\int R(w, z)\,dz$. Man vergl. hierzu die Angaben pg. 171 oben.

Diese Auffassung macht die Eigenschaften von u in neuer Weise verständlich. Durch die Querschnitte Q_1, Q_2 wird die Fläche in einen *einfach* zusammenhängenden Bereich zerschnitten (cf. pg. 168 u. f.). Innerhalb des letzteren ist jede zwischen zwei Punkten verlaufende Integrationscurve in jede andere die gleichen Punkte verbindende Curve

stetig deformierbar. *Erlauben wir also der Integrationscurve kein Überschreiten von* Q_1 *oder* Q_2, *so ist das in* (4) *definierte Integral eine eindeutige Function seiner oberen Grenze* z.

Integrieren wir du über die geschlossene Curve Q_1 in der Pfeilrichtung der Figur 55, so kommt (cf. Figur 53) als Integralwert ω_1, und entsprechend kann man ω_2 durch das über die geschlossene Curve Q_2 genommene Integral definieren:

$$(5)\quad \omega_1 = \int\limits_{(Q_1)} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \quad \omega_2 = \int\limits_{(Q_2)} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Man bezeichnet dieserhalb ω_1, ω_2 auch wohl als „*die Perioden des Integrales* $\int \frac{dz}{2w}$ “.

Bei stetiger Deformation des Weges Q_1 resp. Q_2 bleibt der Integralwert unverändert. Hieraus aber ergiebt sich wiederum eine höchst wichtige Folge für die Function u, wenn wir sie auf die längs Q_1, Q_2 zerschnittene Fläche beschränken und damit zu einer eindeutigen Function machen. In der That wolle man sich etwa mit Figur 55 überzeugen, dass in der längs Q_1, Q_2 zerschnittenen Fläche ein Weg, welcher von einem Uferpunkte des Schnittes Q_1 zum gegenüberliegenden Uferpunkte hinführt, im wesentlichen mit dem „Periodenwege“ Q_2 aequivalent ist. So gelangt man zu dem Ergebnis: *In zwei einander gegenüberliegenden Uferpunkten des Schnittes* Q_1 *hat jene eindeutige Function* u *Werte, die längs des Schnittes immer die gleiche Differenz* ω_2 *aufweisen; und entsprechend findet längs* Q_2 *die constante Differenz* ω_1 *statt.*

Daraufhin ist dann auch wieder sofort deutlich, wie der allgemeinste Wert des Integrales (4), d. i. der bei einer ganz beliebig auf der Riemann'schen zweiblättrigen Fläche zu ziehenden Integralcurve entspringende Wert u aus dem correspondierenden Werte u_0 der eben gedachten eindeutigen Function zu bestimmen ist. Jede für u vollzogene Überschreitung eines Querschnitts Q_1 oder Q_2 bedingt eine Abänderung des u_0 gegenüber u um $\pm\omega_2$ bez. $\pm\omega_1$. Somit wird, wenn wir irgend eine Anzahl solcher Überschreitungen gestatten, $u = u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ sein, unter m_1 und m_2 ganze Zahlen verstanden.

Wir machen endlich noch auf die höchst wichtige Eigenschaft von u aufmerksam, *auf der ganzen Riemann'schen Fläche endlich zu sein;* $\int\limits_{\infty}^{z} \frac{dz}{2w}$ wird in diesem Sinne als *ein „überall endliches“ Integral der Fläche* bezeichnet. Wir können beweisen, *dass es im wesentlichen nur*

ein einziges solches Integral $\int R(w, z)\, dz$ *auf unserer Fläche giebt.* Gäbe es nämlich noch ein zweites überall endliches Integral $u' = \int R'(w, z)\, dz$ auf unserer Fläche, so definiere man dessen Perioden ω_1', ω_2' genau nach Analogie der Gleichungen (5). Man erkennt alsdann sofort, dass ein auf der Fläche geschlossener Weg, welcher u überführt in $(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$, vom Integralwert u' zu $(u' + m_1\omega_1' + m_2\omega_2')$ hinführt, während andrerseits auf der längs Q_1 und Q_2 zerschnittenen Fläche u' eindeutig ist. Fasst man hiernach u' als Function $\varphi(u)$ von u auf, so handelt es sich um eine eindeutige und für alle endlichen u reguläre Function mit den Eigenschaften:

$$\varphi(u + \omega_1) = \varphi(u) + \omega_1', \quad \varphi(u + \omega_2) = \varphi(u) + \omega_2'.$$

Hiernach ist die erste Ableitung $\varphi'(u)$ doppeltperiodisch; und da überdies $\varphi'(u)$ frei von Polen ist, so ist $\varphi'(u)$ nach pg. 179 mit einer Constanten identisch. Man hat demnach $u' = au + b$; beide Integrale werden also, abgesehen davon, dass sie verschiedene untere Grenzen haben mögen, nur um einen constanten Factor a von einander abweichen. Unter diesen Umständen sehen wir aber u' als von u nicht wesentlich verschieden an.

§ 10. Abbildung einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit vier Verzweigungspunkten durch das überall endliche Integral.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen sind deshalb für die ganze Theorie der elliptischen Functionen von principieller Bedeutung, weil sie im vollen Umfange der Umkehrung fähig sind. Nicht nur jedes Periodenparallelogramm wird durch die zugehörige doppeltperiodische Function $z(u)$ auf eine Riemann'sche Fläche beschriebener Art abgebildet, *sondern umgekehrt wird jede zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten vermöge ihres gleich näher zu bestimmenden überall endlichen Integrals* $u(z)$ *auf ein Viereck abgebildet, das ein Periodenparallelogramm unserer Art vorstellt.*

Wir gehen zum Beweise dieses fundamentalen Satzes auf die pg. 164 ff. definierte zweiblättrige Riemann'sche Fläche zurück, welche zur zweideutigen Function:

$$w = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \tag{1}$$

gehörte. Die Verzweigungspunkte der Fläche liegen an den vier Stellen z_1, z_2, z_3, z_4, welche nur der einen Bedingung zu genügen haben, dass keine zwei von ihnen coincidieren.

Es ist alsdann der erste Schritt, dass wir durch Ausführung einer linearen Substitution:

(2) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

d. i. durch eine Transformation der *Kreisverwandtschaft* (cf. 83), die z-Ebene derart umformen, dass die Verzweigungspunkte die im vorigen Paragraphen benutzte Lage haben. Die Einzelheiten der hierbei nötigen Rechnungen werden durch die Invariantentheorie der binären biquadratischen Formen geliefert*). Es genüge hier, nur die Möglichkeit der gewünschten Transformation aufzuweisen.

Man wird zunächst eine solche Transformation (2) ausüben, dass einer der vier bisherigen Punkte z_k in der neuen z-Ebene an die Stelle ∞ rückt. Des weiteren hat man zu bedenken, dass zufolge der Gleichung:

$$4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

die Summe der drei in (1) pg. 203 eingeführten Werte e_k verschwindet:

(3) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Indem wir die drei im Endlichen verbliebenen Verzweigungspunkte jetzt gleich wieder e_1, e_2, e_3 nennen, unterscheiden wir *zwei* Fälle, *je nachdem die vier Verzweigungspunkte auf einem Kreise liegen* (*Specialfall*) *oder nicht* (*allgemeiner Fall*).

Im allgemeinen Fall, den wir voranehmen, interpretieren wir die Gleichung (3) dahin, dass die im Endlichen liegenden drei Verzweigungspunkte ein Dreieck liefern sollen, *dessen Schwerpunkt der Nullpunkt* $z = 0$ *ist.* Diese Lage des Dreiecks ist nötigenfalls durch eine Translation (cf. pg. 78) sofort erreichbar. Die gewonnene Lage der Verzweigungspunkte e_1, e_2, e_3, ∞ bleibt im wesentlichen erhalten gegenüber jeder Transformation $z' = \alpha z$, d. i. bei einer beliebigen Drehung um den Nullpunkt, combiniert mit einer beliebigen Ähnlichkeitstransformation (cf. pg. 79). Wir merken sogleich an, dass bei Übergang von z zu $z' = \alpha z$ die Function w in $w' = \alpha^{\frac{3}{2}} w$ übergeht, da in der That w jetzt durch:

(4) $$w = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$$

zu definieren ist (siehe die allgemeinen Entwicklungen pg. 165).

Liegt der Specialfall vor, dass die vier Verzweigungspunkte auf einem Kreise liegen, so bleibt dies bekanntlich bei allen Transformationen (2) erhalten. Die drei im Endlichen verbliebenen Verzweigungspunkte liegen somit auf einer Geraden. Man wolle alsdann nötigenfalls noch eine solche Translation vornehmen, *dass diese Gerade die*

*) Siehe z. B. die pg. 175 genannten *„Vorlesungen über Modulfunctionen"* von Klein und Fricke, Bd. 1 pg. 3 ff.

reelle z-Axe wird, und dass die Relation (3) *erfüllt ist.* Bei dieser Lage der Verzweigungspunkte wird die zu betrachtende Abbildung besonders zugänglich sein.

Wir definieren nunmehr nach Vorschrift von (4) pg. 206 auf unserer Riemann'schen Fläche das Integral:

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \tag{5}$$

und behaupten zuvörderst, *dass dasselbe eine überall endliche und stetige Function seiner oberen Grenze z ist.*

Dass nämlich erstlich die Integration bis ∞ ausgedehnt werden kann oder auch bei ∞ begonnen werden darf, geht aus der bei ∞ gültigen Entwicklung:

$$\frac{1}{w} = z^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots\right)$$

hervor, welche bei unbestimmter Integration liefert:

$$\int \frac{dz}{2w} = C - \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{a_1}{3z^{\frac{3}{2}}} - \frac{a_2}{5z^{\frac{5}{2}}} - \cdots.$$

Da für das durch Gleichung (5) definierte bestimmte Integral u hiernach bei $z = \infty$ in erster Annäherung $u = -z^{-\frac{1}{2}}$ gilt, so wird die Umgebung des Verzweigungspunktes ∞ der Riemann'schen Fläche, welche sich erst nach zweimaligem Umlaufe schliesst, auf die *einfach und vollständig* bedeckte Umgebung des Nullpunktes der u-Ebene abgebildet.

Die gleichen Verhältnisse treten bei den drei anderen Verzweigungspunkten ein. So berechnet man z. B. für die Umgebung von e_1:

$$u = b_0 + b_1(z-e_1)^{\frac{1}{2}} + b_2(z-e_1)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wo der für die Natur der Abbildung ausschlaggebende Coefficient b_1 den endlichen, von null verschiedenen Wert:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}$$

besitzt. Man bemerke, dass in der eben angegebenen Potenzreihe negative Exponenten von $(z-e_1)$ nicht mehr auftreten; somit bleibt u auch für $z = e_1$ und entsprechend bei e_2 und e_3 endlich.

In der Umgebung jeder anderen Stelle z_0 des einzelnen Blattes ist w^{-1} regulär; es gilt daselbst:

$$\frac{1}{2w} = c_1 + c_2(z - z_0) + c_3(z - z_0)^2 + \cdots,$$

$$u = c_0 + c_1(z - z_0) + \frac{c_2}{2}(z - z_0)^2 + \frac{c_3}{3}(z - z_0)^3 + \cdots,$$

und zwar mit $c_1 \neq 0$. Die Umgebung von z_0 im einzelnen Blatte wird sich demnach *conform* auf die u-Ebene übertragen.

Als wichtigstes Ergebnis machen wir namhaft, *dass das Abbild der Riemann'schen Fläche auf die u-Ebene ganz im Endlichen liegt, und dass sich überdies die jedesmal doppelt überdeckten Umgebungen der Verzweigungspunkte auf die einfach bedeckten Umgebungen der correspondierenden Stellen u übertragen.*

Wegen der Vieldeutigkeit von u gelten uneingeschränkt alle Überlegungen und Bestimmungen des vorigen Paragraphen. Wir werden wie in (5) pg. 207 zwei Perioden ω_1, ω_2 unseres jetzigen Integrals u definieren, wobei die geschlossenen Integrationswege Q_1, Q_2 die in Figur 54 oder 55 (pg. 205) charakterisierte Lage haben sollen. Dem einzelnen Punkte der Riemann'schen Fläche kommen alsdann den verschiedenartigen zu ihm hinführenden Integrationscurven entsprechend unendlich viele Integralwerte zu, welche sich aus einem unter ihnen u wieder in den bekannten Gestalten $(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ bestimmen.

Bei der genauen Untersuchung der Abbildung der Riemann'schen Fläche durch $u(z)$ discutieren wir zunächst den allgemeinen Fall, dass e_1, e_2, e_3 *nicht* auf einer Geraden liegen. Die Verzweigungsschnitte wählen wir nach Figur 51 (pg. 204); und zwar ziehen wir vom Nullpunkte aus drei geradlinige Strahlen durch die Punkte e_1, e_2, e_3 bis ∞, wobei die von e_k nach ∞ ziehenden Strecken dieser Strahlen als Verzweigungsschnitte S_k benutzt werden sollen. Indem wir S_k von e_k in der Richtung nach ∞ durchlaufen, unterscheiden wir zwischen einem rechten und einem linken Ufer dieses Schnittes (cf. Fig. 56).

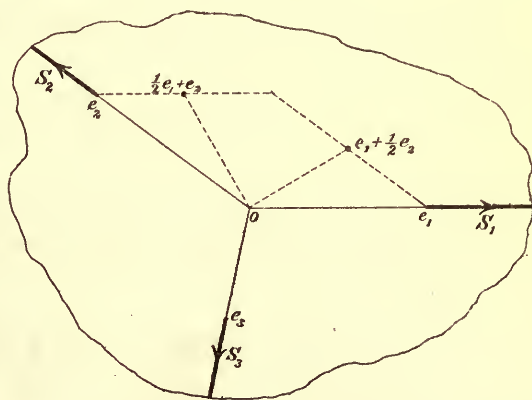


Fig. 56.

Der die Periode ω_1 liefernde geschlossene Weg Q_1 umgiebt, wie Figur 54 (pg. 205) zeigt, den Schnitt S_1 im oberen Blatte und darf beliebig eng um diesen Schnitt zusammengezogen werden.

Figur 57 möge andeuten, wie wir uns den Integrationsweg Q_1 denken wollen. Derselbe besteht aus zwei geradlinigen Stücken, die am linken und



Fig. 57.

rechten Ufer von S_1 in der Richtung von ∞ auf e_1 bez. von e_1 auf ∞ verlaufen, sowie aus zwei Kreisbogen um e_1 und ∞. Ziehen wir Q_1 um S_1 mehr und mehr zusammen und lassen hierbei die Radien der eben genannten Kreisbogen gegen 0 abnehmen, so nähern sich die beiden Kreisintegrale selbst der Grenze 0, wie aus der Abbildung der Umgebungen von e_1 und ∞ durch u hervorgeht. Hieraus ergiebt sich für ω_1 folgende Gleichung:

(6)
$$\omega_1 = \int_{\infty}^{e_1} \frac{dz}{2w_l} + \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{2w_r},$$

wo das erste Integral längs des linken Ufers von S_1 zu erstrecken ist, das zweite längs des rechten; w_l seien dieserhalb die Werte von w am linken, w_r die am rechten Ufer. Nun aber gilt für zwei gegenüberliegende Uferpunkte $w_l + w_r = 0$. Die beiden Integrale in (6) erweisen sich demnach als gleich, und man hat:

(7)
$$\int_{\infty}^{e_1} \frac{dz}{2w_l} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{2w_r} = \frac{\omega_1}{2}.$$

Sind z_l und z_r zwei einander gegenüberliegende Uferpunkte von S_1, so setze man:

$$\int_{\infty}^{z_l} \frac{dz}{2w_l} = u, \quad \int_{\infty}^{z_r} \frac{dz}{2w_r} = u',$$

wo beide Integrale von ∞ längs des Integrationsweges Q_1 in der durch Figur 57 angegebenen Pfeilrichtung geleitet werden sollen. Nun hat man aber:

$$u' + \int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{2w_r} = \omega_1 \qquad \text{und} \qquad \int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{2w_r} = \int_{\infty}^{z_l} \frac{dz}{2w_l}.$$

Hieraus geht hervor, dass $u' = -u + \omega_1$ zutrifft. Hat man also die Abbildung des linken Ufers von S_1 auf die u-Ebene gewonnen, welche eine von $u = 0$ nach $u = \frac{\omega_1}{2}$ verlaufende stetig gekrümmte Curve ist, so wird man vermöge einer Drehung der letzteren um ihren Endpunkt $\frac{\omega_1}{2}$

durch zwei rechte Winkel sofort das Abbild des rechten Ufers von S_1 gewinnen.

Bei dieser Sachlage erscheint es zweckmässig, zuvörderst das Abbild des oberen Blattes unserer Fläche allein zu untersuchen, wobei wir uns also die Ufer von S_1, S_2, S_3 thatsächlich als Schnittränder des abzubildenden Bereiches zu denken haben. Aus der Gleichung:

$$(8) \qquad du = \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)\,(z-e_2)\,(z-e_3)}}$$

geht hervor, dass bei Drehung der z-Ebene um den Nullpunkt durch den Winkel ϑ, d. i. bei Ausübung der Substitution $z' = e^{\vartheta i} z$, die u-Ebene sich gleichfalls um den Nullpunkt durch den Winkel $-\frac{\vartheta}{2}$ drehen wird. Es wird also hierdurch nur eine Veränderung der Lage, aber nicht eine solche der Gestalt der gesuchten Abbildung bewirkt. Wir orientieren die z-Ebene demnach etwa so, dass e_1 reell und positiv ist.

Man verfolge nun die reelle positive z-Axe von ∞ bis 0 und zwar längs S_1 am linken (oberen) Ufer. Dabei überlege man in jedem Augenblick, welches die Orientierung des Bogendifferentials du ist, d. i. welche Amplitude $\operatorname{amp}(du)$ die complexe Zahl du hat. Die Function w soll so gewählt sein, dass sie am linken Ufer für weit entfernte Punkte nahehin gleich dem *positiven* Werte $z\sqrt{z}$ wird. Die Amplitude des Differentials dz ist längs der ganzen positiven reellen Axe $\operatorname{amp}(dz) = \pi$, da wir diese Axe in der Richtung von ∞ auf 0 durchlaufen wollten. Weiter haben wir:

$$\operatorname{amp}\sqrt{z-e_1} = 1 \quad \text{bez.} \quad \operatorname{amp}\sqrt{z-e_1} = +\frac{\pi}{2}$$

je nachdem $z > e_1$ oder $0 < z < e_1$ ist. Setzt man aber unter Benutzung der Relation (3):

$$(z-e_2)\,(z-e_3) = \left(z + \frac{e_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{e_1}{2} + e_2\right)^2,$$

so ist klar, dass bei der gedachten Durchlaufung der positiven reellen Axe von ∞ bis 0 die Amplitude $\operatorname{amp}\sqrt{(z-e_2)\,(z-e_3)}$, sofern $\left(\frac{e_1}{2} + e_2\right)$ einen positiven reellen Betrag hat, stetig und ohne Unterbrechung abnimmt, ohne hierbei die Grenze $-\frac{\pi}{2}$ zu erreichen, dass dagegen $\operatorname{amp}\sqrt{(z-e_2)\,(z-e_3)}$ gleichfalls stetig und ohne Unterbrechung von 0 bis zu einem unterhalb $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Werte zunimmt, falls $\left(\frac{e_1}{2} + e_2\right)$ einen negativen reellen Betrag aufweist (cf. Figur 56). Das

Abbild der positiven reellen Axe ist hiernach aus zwei einander bei $u = \frac{\omega_1}{2}$ unter rechtem Winkel treffenden Bogenstücken zusammengesetzt, die überall nach dem Innern des rechten Winkels convex (concav) sind, falls der reelle Bestandteil von $\left(\frac{e_1}{2} + e_2\right)$ positiv (negativ) ist, und deren Summe der Gesamtkrümmungen den Betrag $\frac{\pi}{2}$ nicht erreicht. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass bei rein imaginärem $\left(\frac{e_1}{2} + e_2\right)$ die beiden Curvenstücke gerade sind. Im Falle der Figur 56 wird hiernach das Abbild der reellen Axe etwa die in Figur 58 angedeutetete Gestalt haben. Wie man sieht, ist es gänzlich ausgeschlossen, dass die beiden abbildenden Curvenstücke jemals sich selbst überkreuzen.

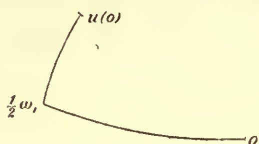


Fig. 58.

Wir beschreiben jetzt von dem eben erreichten Punkte $z = 0$ aus die durch e_2 hindurchlaufende Gerade, indem wir uns längs des Schnittes S_2 auf dessen rechtem Ufer halten (cf. Figur 56). Die für e_1 und S_1 durchgeführten Betrachtungen bleiben uneingeschränkt für die beiden anderen Schnitte S_2, S_3 erhalten. Die fragliche Gerade wird sich somit auf zwei unter rechtem Winkel zusammenhängende Curvenstücke übertragen, über deren Krümmungsverhältnisse die bisherigen Regeln gelten. Am Ende der abzubildenden Geraden gelangen wir nun zum Ausgangspunkte ∞ zurück, der der gemeinsame Endpunkt des linken Ufers von S_1 und des rechten von S_2 ist. Wegen der Eindeutigkeit von u auf dem abgeschnittenen Bereiche werden wir somit auch in der u-Ebene zum Ausgangspunkte $u = 0$ zurückkehren. Dabei wird der bei $z = 0$ gelegene Winkel der Strahlen nach e_1 und e_2 sich auf einen Winkel der gleichen Grösse in der Ebene von u übertragen, während der zwischen S_1 und S_2 bei $z = \infty$ (auf der z-Kugel) gelegene Winkel sich bei der Abbildung auf die Hälfte reduciert. Im Falle der Figur 56 werden die beiden bislang behandelten Geraden, wie aus der Lage der Punkte $\left(\frac{e_1}{2} + e_2\right)$ und $\left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right)$ hervorgeht, sich auf die vier Seiten eines in Figur 59 charakterisierten Vierecks abbilden; die Seiten sind gegen das Vierecksinnere concav, von den Winkeln sind zwei rechte, nämlich die bei $u = \frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega_2}{2}$; die Grösse der beiden übrigen Winkel, von denen der eine doppelt so gross wie der andere ist, wurde bereits festgestellt. Auch wenn zwei

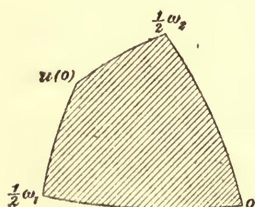


Fig. 59.

oder alle vier Seiten des in der u-Ebene gewonnenen Vierecks gegen das Innere convex sind, zeigen die aufgewiesenen Krümmungsverhältnisse, dass unter keinen Umständen eine Berührung oder ein Schnitt zweier Vierecksseiten zu befürchten ist.

Im Innern des von den beiden beschriebenen Geraden eingegrenzten Dritteiles des z-Ebene ist nun u, wie wir sahen, überall regulär und die Abbildung ohne Ausnahme conform. Dieses Dritteil wird sich demnach in der u-Ebene auf einen Bereich abbilden, der in den Rand des soeben umschriebenen Vierecks eingespannt erscheint, und der in seinem Innern frei von Verzweigungspunkten oder sonstigen Irregularitäten ist. In der einfach bedeckten Fläche unseres Vierecks haben wir somit das conforme Abbild des Dritteiles der z-Ebene vor uns.

Auf Grund dieses Ergebnisses kommen wir leicht zum Ziele. Die beiden anderen Dritteile werden entsprechende Vierecke in der Abbildung liefern, welche mit dem ersten die Umgebung des Punktes $u(0)$ gerade vollständig und einfach bedecken. Nach einem oben bereits aufgewiesenen Satze werden wir die Construction dieser weiteren Vierecke vom ersten aus dadurch einleiten können, dass wir die von 0 nach $\frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega_2}{2}$ ziehenden Seiten des ersten in Figur 59 gezeichneten Vierecks um die Punkte $\frac{\omega_1}{2}$ resp. $\frac{\omega_2}{2}$ durch zwei rechte Winkel herumdrehen. In der That war dies eine Folge des Umstandes, dass unsere die Abbildung leistende Function z. B. in einander gegenüberliegenden Uferpunkten des Schnittes S_1 Werte u und u' annimmt, welche durch die Relation $u' = -u + \omega_1$ verknüpft sind. Als Hauptergebnis aber merken wir an: *Das längs S_1, S_2, S_3 durchschnittene obere Blatt unserer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche bildet sich durch das überall endliche Integral u auf ein Dreieck der u-Ebene ab, dessen Ecken bei $u = 0$, ω_1, ω_2 liegen, dessen Winkelsumme $= 180^0$ ist, und dessen Seiten stetig gekrümmt sind; jede dieser Seiten ist derart aus zwei congruenten Hälften zusammengesetzt, dass sie durch Drehung um ihren Mittelpunkt durch einen Winkel von 180^0 in sich selbst übergeht.* In Figur 60, welche zur Veranschaulichung der Abbildung dienen soll, sind die Krümmungen der Seiten so gewählt, wie es der Figur 56 pg. 211 entsprechen würde.

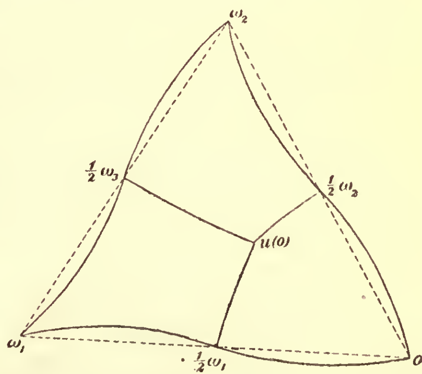


Fig. 60.

Übrigens hindert nichts, an Stelle des eben gewonnenen im allgemeinen krummlinigen Dreiecks das *geradlinige Dreieck* der Ecken 0, ω_1, ω_2 treten zu lassen, welches in Figur 60 punktiert angedeutet ist. Nur müssen wir dann die ursprünglich geradlinigen Schnitte S_1, S_2, S_3 unter Festhaltung ihrer Endpunkte in ihrem Verlauf entsprechend abändern, was ihre Brauchbarkeit nicht beeinträchtigt. Wir denken diese Abänderung fortan thatsächlich vollzogen.

Um nunmehr auch das untere Blatt der Fläche zu erledigen, ziehen wir von $z = \infty$ aus in beiden Blättern zwei genau unter einander liegende Integrationscurven. Führt die eine zum Integralwert u, so liefert offenbar die andere den entgegengesetzten Wert $-u$. Nun aber wollen wir längs der geschlossenen Linien Q_1, Q_2 die Fläche zerschneiden, was nach Fig. 54 pg. 205 dadurch vollzogen werden kann, dass wir längs S_1 und S_2 durch beide Blätter Schnitte führen, während in S_3 der Zusammenhang der Blätter bestehen bleibt. Unter einander liegende Punkte z erhalten dann Integralwerte u und $u' = -u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, wo m_1, m_2 ganze Zahlen sind. Man erkennt leicht, dass $m_1 = m_2 = 1$ gilt; denn für $z = e_3$ wird $u = u' = \frac{\omega_3}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Die Gleichung $u' = -u + \omega_3$ oder $\left(u' - \frac{\omega_3}{2}\right) = -\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)$ werden wir aber dahin interpretieren, dass zwei über einander liegende Punkte z zwei bezüglich der Stelle $\frac{\omega_3}{2}$ genau diametrale Punkte u liefern. *Ergänzen wir demnach unser Dreieck über seine von ω_1 nach ω_2 ziehende Seite hinaus zum Parallelogramm der Ecken 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2, so erkennen wir im letzteren das conforme Abbild der längs Q_1, Q_2 zerschnittenen Riemann'schen Fläche.* Die am Anfang des Paragraphen postulierte Abbildung der Riemann'schen Fläche ist damit wirklich geleistet.

Die Erledigung des Specialfalles, dass e_1, e_2, e_3 alle auf der reellen Axe liegen, macht jetzt keinerlei Schwierigkeiten mehr. Die Lage der Verzweigungsschnitte S_1, S_2 und der Periodenwege Q_1, Q_2 entnehme man aus Figur 61. Die oberhalb der reellen z-Axe gelegene „positive Halbebene" denke man in beiden Blättern schraffiert. Innerhalb des einzelnen Halbblattes ist u eindeutig und die Abbildung conform. Man findet durch eine einfache Discussion der Amplitude amp (du) längs der reellen z-Axe, dass sich das einzelne Halbblatt auf

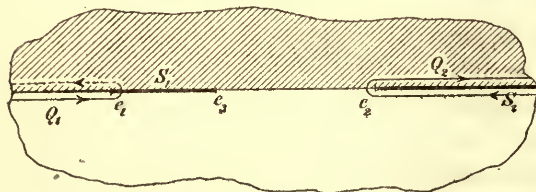


Fig. 61.

ein Rechteck der u-Ebene überträgt. *Insgesamt wird sich die längs S_2 sowie längs des zwischen e_1 und $-\infty$ verlaufenden Teiles der reellen Axe*

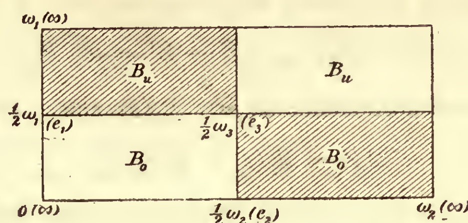


Fig. 62.

gänzlich durchschnittene Fläche vermöge u auf das Rechteck der Figur 62 *abbilden, wo die schraffierten Teile den positiven Halbblättern entsprechen und die Bilder der oberen Halbblätter durch B_o, die der untern durch B_u bezeichnet sind.* Damit ist auch der Specialfall erledigt.

§ 11. Algebraischer Aufbau der Theorie der elliptischen Functionen. Die elliptischen Integrale.

Auf Grund der Ergebnisse der beiden vorigen Paragraphen skizzieren wir noch kurz, welche Gestalt die Theorie der elliptischen Functionen annimmt, falls man die Betrachtung von der algebraischen Seite beginnt, d. h. auf die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten gründet. Zur Vereinfachung denken wir nötigenfalls durch Ausübung einer linearen Substitution gleich wieder anfangs die Verzweigungspunkte an Stellen e_1, e_2, e_3, ∞ gebracht, die der Relation:

(1) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

genügen. Wie bisher setzen wir:

(2) $$w = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)} = \frac{1}{2}\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3};$$

es handelt sich also für uns um die zur algebraischen Function w gehörende Riemann'sche Fläche.

Wir geben nun folgende Definition ab: *Jede zweideutige Function Z von z, welche auf unserer Fläche eindeutig ist, und die demgemäss höchstens bei e_1, e_2, e_3, ∞ aber sonst nirgends verzweigt ist, soll als „eine zur Fläche gehörige algebraische Function“ bezeichnet werden, falls sie auf derselben allenthalben von wesentlich singulären Stellen frei ist.* Werden nun die Werte irgend einer solchen algebraischen Function in je zwei über einander liegenden Punkten der Fläche mit Z und Z' bezeichnet, so ist $(Z + Z')$ in z eindeutig und also nach einem pg. 150 aufgestellten Theoreme rational. Mit Z ist auch $Z \cdot w^{-1}$ eine algebraische

Function der Fläche; die Werte der letzteren Function in über einander liegenden Punkten sind $Z \cdot w^{-1}$ und $-Z'.w^{-1}$. Wir erkennen damit die Gültigkeit der beiden Gleichungen:

$$Z + Z' = R_1(z), \quad Z - Z' = w \cdot R_2(z),$$

wo rechts rationale Functionen $R_1(z)$, $R_2(z)$ von z stehen. Aus

$$2Z = R_1(z) + w R_2(z)$$

entspringt daraufhin das folgende Theorem: *Jede algebraische Function der Fläche lässt sich als rationale Function $R(w, z)$ von w und z darstellen, wie denn auch umgekehrt jede Function $R(w, z)$ als eine zur Riemann'schen Fläche gehörende algebraische Function erkannt wird.*

Auf der Fläche betrachten wir weiter die *Integrale der algebraischen Functionen $R(w, z)$:*

$$\int_{z_0}^{z} R(w, z)\, dz, \tag{3}$$

wobei die untere Grenze z_0 an geeigneter Stelle der Fläche fixiert sein soll, die obere Grenze z aber variabel zu denken ist. Die Betrachtungen über die Vieldeutigkeit und die Perioden, welche wir oben pg. 206 ff. für das überall endliche Integral u im speciellen ausführten, sind typisch für alle Integrale (3). *Die Zusammenhangsverhältnisse der Fläche bringen es mit sich, dass jedes solche Integral zwei den ω_1, ω_2 entsprechende Perioden bekommt, sofern durch die besondere Natur des Integrals nicht noch der Hinzutritt weiterer Perioden bedingt ist.* Als specielle Beispiele ordnen sich dem Ansatze (3) jene pg. 173 erwähnten Integrale unter, welche in den allerersten Anfängen der Theorie der elliptischen Functionen von der Rectification der Ellipse und anderen Aufgaben geliefert wurden. *Die Integrale* (3) *der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit vier Verzweigungspunkten heissen demnach auch schlechthin „elliptische Integrale"*. Sie sind eben diejenigen Grössen, welche Legendre entgegen dem heutigen Brauche als „Fonctions elliptiques" bezeichnete.

Wir verstehen nun auch unmittelbar den mächtigen Fortschritt, welcher gegenüber Legendre's Auffassungen durch Jacobi's und Abel's Entdeckungen gewonnen wurde, und welcher auch bei Gauss implicite vorlag. Der Fortschritt ist bedingt durch die Verhältnisse, welche wir in den beiden voraufgehenden Paragraphen antrafen. Unter allen Integralen (3) giebt es eines und im wesentlichen nur eines (cf. pg. 207 u. f.), welches überall endlich war; bei der von uns bevorzugten Lage der

Verzweigungspunkte hatte dasselbe die fortan als *„Weierstrass'sche Normalform“* zu bezeichnende Gestalt:

$$(4) \qquad u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{2w} = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Die Abbildung der längs Q_1, Q_2 zerschnittenen Fläche auf die u-Ebene lieferte ein Parallelogramm, welches mit seinem Innern auf der u-Ebene einfach auflag; und selbst die unendlichblättrig über der z-Ebene lagernde Riemann'sche Fläche, in welcher u eindeutig ist, gab, auf die u-Ebene übertragen, überall nur eine *einfache* und bis auf die Stelle $u = \infty$ *vollständige* Bedeckung der u-Ebene. Der einzelnen Stelle z der zweiblättrigen Fläche entsprachen jeweils unendlich viele homologe Punkte $(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ im Parallelogrammnetz der u-Ebene.

Die grosse Einfachheit dieses Ergebnisses wird man erst recht schätzen, falls man die Abbildung der Riemann'schen Fläche durch ein anderes Integral (3) prüft. Hier wird sich notwendig schon das einzelne Abbild der zerschnittenen Fläche in's Unendliche ziehen. Bei Überschreiten von Q_1 und Q_2 kommen wir aber zu neuen Abbildern, welche sich jedenfalls bei ∞ über jenes erste hinüberziehen. Schliesslich werden wir eine unendlich vielfache Überlagerung der Ebene des Integrals gewinnen.

Bei dieser Sachlage ist *das überall endliche Integral u* vor allem geeignet, *als unabhängige Variabele* in das System der hier mit einander functionentheoretisch zusammenhängenden Grössen eingeführt zu werden. Indem man bei analytischer Fortsetzung über die Fläche hin den Weg von u und das Verhalten einer algebraischen Function $R(w, z)$ vergleicht, entspringt als Fundamentaltheorem: *Die algebraischen Functionen $R(w, z)$ der Fläche werden in Abhängigkeit von u eindeutige doppeltperiodische Functionen $f(u; \omega_1, \omega_2)$ der Perioden ω_1, ω_2; und es deckt sich nach der pg.* 175 *und* 178 *gegebenen Definition hierbei gerade die Gesamtheit der doppeltperiodischen Functionen $f(u; \omega_1, \omega_2)$ mit der Gesamtheit der algebraischen Functionen $R(w, z)$.* Hiermit haben wir den Standpunkt Abel's und Jacobi's erreicht; und zwar ist derselbe gleich in solcher Allgemeinheit formuliert, wie es der neueren namentlich durch Riemann und Weierstrass ausgebildeten Auffassung der Theorie der algebraischen Functionen entspricht (cf. pg. 170). Bei Jacobi und Abel stehen immer specielle algebraische Functionen im Vordergrunde; wir machen z. B. als ein für gewöhnlich nach Jacobi benanntes *„Umkehrtheorem“* namhaft, *dass die obere Grenze z des überall endlichen Integrals eine eindeutige doppeltperiodische Function des Integralwertes ist.* Auch dienen zum Beweise der Eindeutigkeit nicht, wie

hier, allgemeine functionentheoretisch-geometrische Erwägungen; die Eindeutigkeit wird vielmehr bei Jacobi aus der wirklichen Darstellung der einzelnen Function in u vermöge eindeutiger convergenter Reihen oder Producte bewiesen.

Da übrigens $2w$ als Function von u mit $\wp'(u)$ identisch ist, so ergiebt sich aus der Darstellung aller algebraischen Functionen der Fläche in der Gestalt $R(w, z)$ noch der wichtige Satz: *Jede doppeltperiodische Function $f(u; \omega_1, \omega_2)$ mit den Perioden ω_1, ω_2 kann als eine rationale Function von $\wp(u; \omega_1, \omega_2)$, $\wp'(u; \omega_1, \omega_2)$ dargestellt werden:*

$$(5) \qquad f(u; \omega_1, \omega_2) = R[\wp(u), \wp'(u)].$$

Einige wichtige Ergebnisse über die elliptischen Integrale (3) entspringen aus der in Formel (4) pg. 198 geleisteten Partialbruchzerlegung der doppeltperiodischen Functionen. Ist J irgend eines dieser Integrale, und bezeichnen wir die zur Fläche gehörige algebraische Function $2wR(w, z)$ in Abhängigkeit von u durch $f(u)$, so ist:

$$(6) \qquad J = \int_{z_0}^{z} R(w, z)\, dz = \int_{u_0}^{u} f(u)\, du.$$

Setzen wir nun für $f(u)$ seinen Ausdruck (4) pg. 198 ein, so kann man das erste constante Glied A, sowie alle Glieder, welche $\wp'$ oder eine noch höhere Ableitung der $\wp$-Function enthalten, sofort integrieren. Diese letzteren Glieder mit $\wp'$, $\wp''$, $\cdots$ liefern dabei doppeltperiodische Functionen; man hat also:

$$J = F(u) + Au + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \int_{u_0}^{u} \zeta(u - \alpha_k)\, du + a_k' \int_{u_0}^{u} \wp(u - \alpha_k)\, du \right],$$

wo $F(u)$ eine doppeltperiodische Function ist. Da die Summe der Residuen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ von $f(u)$ verschwindet, so können wir hier noch $a_n = -a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1}$ eintragen und finden damit:

$$(7) \quad J = F(u) + Au + \sum_{k=1}^{n} a_k' \int_{u_0}^{u} \wp(u - \alpha_k)\, du + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \int_{u_0}^{u} \left[\zeta(u - \alpha_k) - \zeta(u - \alpha_n) \right] du.$$

Jedes einzelne rechter Hand vorkommende Integral ist für sich allein genommen ein elliptisches; denn die Ausdrücke:

$$\wp(u - \alpha_k) \frac{du}{dz}, \quad \left[\zeta(u - \alpha_k) - \zeta(u - \alpha_n) \right] \frac{du}{dz}$$

stellen sämtlich doppeltperiodische Functionen, und also auf der Riemann'schen Fläche algebraische Functionen dar. Des näheren treten uns auf der rechten Seite von (7) *drei verschiedene Gattungen elliptischer Integrale* entgegen, welche wir nach einander besprechen.

Zur *ersten Gattung* rechnen wir *das überall endliche Integral* Au, welches im zweiten Gliede der rechten Seite von (7) auftritt.

Ein Integral, welches *an irregulären Punkten nur Pole* aufweist, soll als ein solches *von der zweiten Gattung* bezeichnet werden. Hierher gehören die Integrale der ersten in (7) rechts stehenden Summe. Für das einzelne derselben können wir nach Formel (1) pg. 190 schreiben:

$$(8) \qquad -\int_{u_0}^{u} \wp(u-\alpha)\,du = \zeta(u-\alpha) - \zeta(u_0-\alpha).$$

Dieses Integral ist dadurch ausgezeichnet, *dass es nur einen bei* $u=\alpha$ *gelegenen Pol, und zwar von der ersten Ordnung, besitzt, und dass es sich insbesondere bei* $u=\alpha$ *näherungsweise wie* $(u-\alpha)^{-1}$ *verhält;* dasselbe soll als ein „*Elementarintegral zweiter Gattung*“ bezeichnet werden. Hier reiht sich offenbar die Function $\zeta(u)$ insbesondere ein; wir erkennen zugleich aus Formel (11) pg. 189 in den Grössen η_1, η_2 die *Perioden jedes Elementarintegrals zweiter Gattung.* Als Function auf der Riemann'schen Fläche wollen wir das Integral (8) durch Z_α oder, wenn die Integralgrenzen angedeutet werden sollen, durch Z_α^{z,z_0} bezeichnen:

$$(9) \qquad -\int_{u_0}^{u} \wp(u-\alpha)\,du = Z_\alpha^{z,z_0}.$$

Speciell für $\alpha = 0$ entspringt die Formel:

$$(10) \qquad Z_0^{z,z_0} = -\int_{z_0}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}.$$

Hat ein Integral neben etwaigen Polen noch *logarithmische Unstetigkeitspunkte*, so wird es als ein solches *dritter Gattung* bezeichnet. Hierher gehören die Integrale in der letzten Summe auf der rechten Seite der Formel (7), für deren einzelnes man übrigens zufolge (4) pg. 186 schreiben kann:

$$(11) \qquad \int_{u_0}^{u} [\zeta(u-\alpha) - \zeta(u-\alpha')]\,du = \log\frac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u-\alpha')} - \log\frac{\sigma(u_0-\alpha)}{\sigma(u_0-\alpha')}.$$

Dieses Integral, welches wir als ein „*Elementarintegral dritter Gattung*“ bezeichnen wollen, besitzt überhaupt keine Pole, wird jedoch an zwei

durch $u = \alpha$ und $u = \alpha'$ fixierten Punkten des Parallelogramms bez. der Fläche logarithmisch unendlich. Bei einem Umlauf um die Stelle $u = \alpha$ im positiven Sinne wächst das Integral um $2i\pi$, bei einem ebensolchen Umlauf um die Stelle $u = \alpha'$ nimmt es um den gleichen Betrag ab. Hier haben wir also ein Beispiel dafür, dass ein Integral neben den durch den Zusammenhang der Fläche bedingten Perioden infolge seiner speciellen Natur noch eine *dritte Periode* hat. Als Function auf der Riemann'schen Fläche wollen wir das Integral (11) durch $\Pi_{\alpha,\alpha'}$ oder $\Pi_{\alpha,\alpha'}^{z,z_0}$ bezeichnen:

$$(12) \qquad \int_{u_0}^{u} [\zeta(u-\alpha) - \zeta(u-\alpha')]\, du = \Pi_{\alpha,\alpha'}^{z,z_0}.$$

Die Formel (7) wird hiernach, auf der Riemann'schen Fläche gedacht, folgende Gestalt annehmen:

$$(13) \quad \int_{z_0}^{z} R(w,z)\, dz = R_1(w,z) + Au^{z,z_0} - \sum_{k=1}^{n} a_k' Z_{\alpha_k}^{z,z_0} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Pi_{\alpha_k,\alpha_n}^{z,z_0}.$$

wobei auch am Integral u die Grenzen angedeutet sind. Hiernach gilt das Theorem: *Jedes elliptische Integral lässt sich, abgesehen von einer algebraischen Function der Fläche und einem Integral erster Gattung, als ein Aggregat von Elementarintegralen zweiter und dritter Gattung darstellen.* Es ist hierdurch zugleich bewiesen, *dass ausser den Integralen der drei genannten Gattungen keine weiteren mehr vorkommen.*

Man bemerke noch, dass das in (13) links vorgelegte Integral zur *dritten* Gattung gehört, falls wenigstens einer der Coefficienten a_1, $a_2, \cdot\cdot, a_{n-1}$ von 0 verschieden ist. Verschwinden diese Coefficienten aber alle, so hat man ein Integral *erster* Gattung, falls die Function $R_1(w, z)$ mit einer Constanten identisch ist und zugleich alle a_1', $a_2', \cdot\cdot, a_n'$ verschwinden; anderenfalls liegt ein Integral *zweiter* Gattung vor.

§ 12. Additionstheorem der Function $\wp(u)$.

Als eine interessante Anwendung der Formel (5) pg. 220 soll hier das *Additionstheorem der Function* $\wp(u)$ aufgestellt werden. Man bilde $\wp(u+v)$, wo als Argument die Summe $(u+v)$ zweier complexen Variabelen gesetzt ist. Als Function von u bei stehendem v ist $\wp(u+v)$ doppeltperiodisch und stellt im speciellen eine zweiwertige Function mit den Perioden ω_1, ω_2 dar. Zufolge (5) pg. 220 ist somit $\wp(u+v)$ bei stehendem v als rationale Function von $\wp(u)$, $\wp'(u)$ darstellbar. Da aber aus demselben Grunde $\wp(u+v)$ rational

in $\wp(v)$, $\wp'(v)$ sein muss, so schliessen wir auf die Existenz einer Formel:

$$\wp(u+v) = R\,[\wp(u),\ \wp(v),\ \wp'(u),\ \wp'(v)]. \tag{1}$$

Um zur wirklichen Kenntnis der rechts stehenden rationalen Function zu gelangen, knüpfen wir an die Darstellung (11) pg. 202 für die Differenz $\wp(u) - \wp(v)$ an, welche wir logarithmisch nach u resp. v differenzieren wollen:

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u),$$

$$\frac{-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v).$$

Durch Addition ergiebt sich hieraus:

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}.$$

Vermöge erneuter Differentiation nach u und v und Zeichenwechsel folgt weiter:

$$\wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2}\,\frac{\wp''(u)}{\wp(u)-\wp(v)} + \frac{\wp'(u)\,[\wp'(u)-\wp'(v)]}{2[\wp(u)-\wp(v)]^2},$$

$$\wp(u+v) = \wp(v) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp''(v)}{\wp(u)-\wp(v)} - \frac{\wp'(v)\,[\wp'(u)-\wp'(v)]}{2[\wp(u)-\wp(v)]^2},$$

zwei Formeln, deren Addition auf die Gleichung führt:

$$2\wp(u+v) = \wp(u) + \wp(v) - \frac{1}{2}\,\frac{\wp''(u)-\wp''(v)}{\wp(u)-\wp(v)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2.$$

Hier wolle man jetzt noch die aus (7) pg. 192 entspringenden Relationen:

$$\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \frac{1}{2}g_2, \qquad \wp''(u) - \wp''(v) = 6\,(\wp(u)^2 - \wp(v)^2) \tag{2}$$

benutzen und gewinnt dann unmittelbar das „*Additionstheorem*“ *der $\wp$-Function, dass sich nämlich die $\wp$-Function, gebildet für die Summe $(u+v)$, als folgende rationale Function von $\wp(u)$, $\wp(v)$, $\wp'(u)$, $\wp'(v)$ darstellt:*

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v). \tag{3}$$

Durch Differentiation nach u gewinnt man hieraus leicht das Additionstheorem der $\wp'$-Function.

Aufgabe 1. Man beweise die für die $\wp$-Function gültige Formel:

$$\wp(2u) = \wp(u) - \frac{1}{4}\,\frac{d^2 \log \wp'(u)}{du^2}.$$

Aufgabe 2. Für drei complexe Zahlen u, v, w einer verschwindenden Summe, $u+v+w=0$, zeige man das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}=\frac{\wp'(w)-\wp'(v)}{\wp(w)-\wp(v)},$$

der man auch unter Gebrauch einer Determinante dritter Ordnung die Gestalt verleihen kann:

$$\begin{vmatrix} 1, & \wp(u), & \wp'(u) \\ 1, & \wp(v), & \wp'(v) \\ 1, & \wp(w), & \wp'(w) \end{vmatrix} = 0.$$

§ 13. Die Wurzelfunctionen $\sqrt{\wp(u)-e_k}$ und die Weierstrass'schen Functionen $\sigma_k(u)$.

Der Übergang von den Weierstrass'schen Functionen zu den Jacobischen wird durch die folgende Betrachtung angebahnt.

Die zweiwertige doppeltperiodische Function $(\wp(u)-a)$, unter a eine Constante verstanden, hat im allgemeinen zwei von einander getrennt liegende einfache Nullpunkte im Periodenparallelogramm. Nur falls a mit einer der drei Grössen e_1, e_2, e_3 identisch ist, coincidieren die beiden Nullpunkte (cf. pg. 202) und liefern so einen Nullpunkt zweiter Ordnung. Es wird hiernach jede der drei Grössen:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1},\quad \sqrt{\wp(u)-e_2},\quad \sqrt{\wp(u)-e_3}, \tag{1}$$

welche wir als „*Wurzelfunctionen*" bezeichnen wollen*), im Parallelogramm einen einfachen Pol (bei $u=0$) und einen einfachen Nullpunkt $\left(\text{resp. bei } \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2} \text{ oder } \frac{\omega_3}{2}\right)$ haben. Da es keine einwertige doppeltperiodische Function giebt (cf. pg. 180), so kann $\sqrt{\wp(u)-e_k}$ keine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2 darstellen.

Jedenfalls gilt aber zunächst der Satz, *dass die Wurzelfunctionen $\sqrt{\wp(u)-e_k}$ eindeutige Functionen von u sind.* Zum Beweise dieser Behauptung specialisieren wir die Factorenzerlegung (7) pg. 201 für die Functionen $(\wp(u)-e_k)$. Wir gelangen hierbei zu den drei von Weierstrass eingeführten Functionen:

$$\sigma_k(u;\omega_1,\omega_2) = -\frac{e^{\frac{\eta_k u}{2}}\,\sigma\left(u-\frac{\omega_k}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)}, \qquad [k=1,2,3], \tag{2}$$

wobei wir der Bezeichnung ω_3 entsprechend unter η_3 die Summe $(\eta_1+\eta_2)$ verstehen. Diese drei Functionen sind in u offenbar eindeutig und werden für $u=0$ übereinstimmend gleich 1:

*) Der Name ist daher genommen, dass man auf der Riemann'schen Fläche $\sqrt{z-e_k}$ als eine „Wurzelfunction" bezeichnet; dieselbe ist auf der Fläche zwar unverzweigt, aber nicht eindeutig, was im Texte sogleich hervortreten wird.

$$\sigma_1(0)=1, \quad \sigma_2(0)=1, \quad \sigma_3(0)=1. \tag{3}$$

Daraufhin wird nach der genannten Formel (7) pg. 201 die Function $(\wp(u)-e_k)$ gleich dem Quadrat des Quotienten von $\sigma_k(u)$ und $\sigma(u)$; die drei Wurzelfunctionen selbst aber werden wir durch:

$$\sqrt{\wp(u)-e_k}=\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)} \tag{4}$$

definieren können und erkennen sie damit in der That als eindeutige Functionen von u.

Das Verhalten der $\sigma_k(u)$ bei Vermehrung des Argumentes u um Perioden ω_1, ω_2 ergiebt sich aus den entsprechenden Formeln (12) pg. 189 der σ-Function mit Rücksicht auf die Legendre'sche Relation (1) pg. 199 sehr leicht. Man findet:

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_1(u+\omega_1)&=-e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma_1(u), & \sigma_1(u+\omega_2)&=+e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma_1(u),\\
\sigma_2(u+\omega_1)&=+e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma_2(u), & \sigma_2(u+\omega_2)&=-e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma_2(u),\\
\sigma_3(u+\omega_1)&=+e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma_3(u), & \sigma_3(u+\omega_2)&=+e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma_3(u).
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Setzen wir zur Abkürzung $\sqrt{\wp(u)-e_k}=f_k(u)$, so berechnet man aus (4) und (5) als *Verhalten der drei Functionen $f_k(u)$ bei Vermehrung von u um Perioden:*

$$\begin{aligned}
f_1(u+\omega_1)&=f_1(u), & f_2(u+\omega_1)&=-f_2(u), & f_3(u+\omega_1)&=-f_3(u),\\
f_1(u+\omega_2)&=-f_1(u), & f_2(u+\omega_2)&=f_2(u), & f_3(u+\omega_2)&=-f_3(u).
\end{aligned} \tag{6}$$

Eine Bestätigung dieser Angaben kann man aus der Formel:

$$-\wp'(u)=2f_1(u)\,f_2(u)\,f_3(u) \tag{7}$$

entnehmen, nach welcher das Product der drei Functionen $f_k(u)$ die Perioden ω_1, ω_2 haben muss.

Aus (6) folgt $f_1(u+2\omega_2)=f_1(u)$. Es ist also $f_1(u)$ eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1 und $2\omega_2$; wir schreiben in diesem Sinne $f_1(u;\ \omega_1,\ 2\omega_2)$. Ein Periodenparallelogramm für diese Function setzt sich aus zwei Parallelogrammen der bisherigen Teilung zusammen. In Figur 63 ist ein Parallelogramm von $f_1(u;\omega_1,2\omega_2)$ durch Schraffierung ausgezeichnet; innerhalb dieses Parallelogramms ist $f_1(u)$ offenbar *zweiwertig*. Die Null-

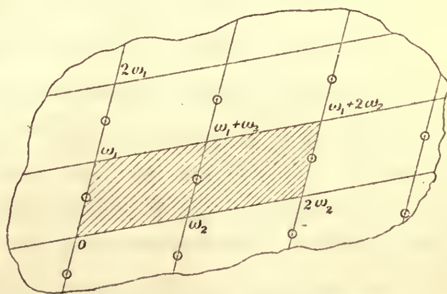


Fig. 63.

punkte und Pole von $f_1(u)$ sind durchgehends von erster Ordnung; jene liegen an den in Figur 63 durch kleine Kreise bezeichneten Stellen, die Pole sind die Gitterpunkte des ursprünglichen Netzes.

Ähnliche Bemerkungen gelten für $f_2(u)$ und $f_3(u)$. Wir begnügen uns mit der Angabe der Perioden, welche aus den ausführlichen Bezeichnungen $f_2(u;\, 2\omega_1, \omega_2)$, $f_3(u;\, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2)$ hervorgehen.

§ 14. Productformeln für die Functionen $\sigma_k(u)$. Discriminante Δ.

Wir haben bei den folgenden Rechnungen mehrfach die Bezeichnung:

$$(1) \qquad e^{\frac{2i\pi u}{\omega_2}} = t$$

zu benutzen. Nach pg. 97 ff. ist hierdurch die u-Ebene 1-∞-deutig auf die Ebene der Variabelen t bezogen. Ein einzelner aus einfach unendlich vielen Parallelogrammen bestehender Streifen der u-Ebene, wie ihn Figur 64 darstellt, liefert bereits ein volles Abbild der t-Ebene; die beiden ins Unendliche ziehenden Zipfel des Streifens ergeben dabei die Punkte $t = 0$ und $t = \infty$. Einem Werte t entsprechen insgesamt die unendlich vielen Werte u, $u \pm \omega_2$, $u \pm 2\omega_2, \cdots$.

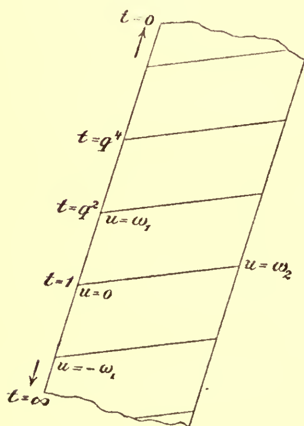


Fig. 64.

Mit Hilfe von t schreibt sich nun die Darstellung (2) pg. 194 der σ-Function:

$$(2) \quad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n}t)(1-q^{2n}t^{-1})}{(1-q^{2n})^2}$$

Das Product ist convergent für alle Werte von t ausser $t = 0$ und $t = \infty$, welche letztere dem wesentlich singulären Punkte von $\sigma(u)$ entsprechen.

Man trage jetzt in (2) nach einander für $2u$ die Werte ω_1, ω_2 und $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ein. Dabei werden sich t und $\sin\frac{\pi u}{\omega_2}$ in jedem Falle leicht durch q ausdrücken. Zur Vereinfachung des Exponenten von e machen wir überdies im ersten und dritten Falle von der Legendreschen Relation (1) pg. 199 Gebrauch. Man gewinnt auf diese Weise nach leichter Zwischenrechnung als *Productdarstellungen für die drei nur noch von ω_1, ω_2 abhängenden Grössen* $\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right)$:

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = i\cdot\frac{\omega_2}{2\pi}\, e^{\frac{\eta_1\omega_1}{8}}\, q^{-\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2, \\ \sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{\omega_2}{\pi}\, e^{\frac{\eta_2\omega_2}{8}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2, \\ \sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\omega_2}{2\pi}\, e^{\frac{\eta_3\omega_3}{8}}\, q^{-\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2. \end{cases}$$

Es ist nun sehr bemerkenswert, dass wir jedes der hier rechts auftretenden Producte in den Quotienten zweier unendlicher Producte spalten können, welche unter der hier beständig gültigen Voraussetzung $|q|<1$ auch für sich genommen noch convergieren. Für diese noch mehrfach zu benutzenden Producte führen wir die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$(4)\quad \begin{cases} P_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}), \quad P_1 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}), \\ P_2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}), \quad P_3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}). \end{cases}$$

Die Convergenz dieser vier unendlichen Producte ergiebt sich in der That äusserst leicht, indem wir zunächst nach pg. 153 vom einzelnen Product zu einer correspondierenden Reihe übergehen, deren Convergenz dann aus den Rechnungen von pg. 184 unmittelbar ersichtlich ist.

Mit Hilfe der in (4) erklärten Abkürzungen schreiben sich die Formeln (3) so:

$$(5)\quad \sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = i\,\frac{\omega_2}{2\pi}\, e^{\frac{\eta_1\omega_1}{8}}\, q^{-\frac{1}{4}}\cdot\frac{P_1^2}{P_0^2}, \quad \sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{\omega_2}{\pi}\, e^{\frac{\eta_2\omega_2}{8}}\cdot\frac{P_2^2}{P_0^2},$$

$$\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\omega_2}{2\pi}\, e^{\frac{\eta_3\omega_3}{8}}\, q^{-\frac{1}{4}}\cdot\frac{P_3^2}{P_0^2}.$$

Zwischen den Producten P_k besteht eine wichtige Relation. Multipliciert man nämlich einmal P_0 mit P_2, sodann P_1 mit P_3, so ergiebt sich:

$$P_0P_2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n}), \quad P_1P_3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2}).$$

Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen folgt weiter:

$$P_0 P_1 P_2 P_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2})(1 - q^{4n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n});$$

und da sich hier rechter Hand wieder P_0 eingefunden hat, so besteht *zwischen den Zahlwerten* P_1, P_2, P_3 *beständig die Relation:*

$$(6) \qquad P_1 P_2 P_3 = 1.$$

Man wolle jetzt auf die Definition der drei Weierstrass'schen Functionen $\sigma_k(u)$ zurückgehen (cf. Formel (2) pg. 224), um aus der Productdarstellung (2) pg. 194 der σ-Function entsprechende Darstellungen für die $\sigma_k(u)$ zu entwickeln. Treten an Stelle von u die Werte $\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)$, $\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)$, $\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)$, so hat man an Stelle von t zu setzen tq^{-1} resp. $-t$, $-tq^{-1}$. Benutzt man die schon berechneten Werte von $\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$, so entspringen nach einfacher Rechnung *die für alle Werte von* t *ausser* $t = 0$ *und* ∞ *convergenten Productentwicklungen der Functionen* $\sigma_k(u)$:

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1 - q^{2n-1}t)(1 - q^{2n-1}t^{-1})}{(1 - q^{2n-1})^2}, \\ \sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cos \dfrac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1 + q^{2n}t)(1 + q^{2n}t^{-1})}{(1 + q^{2n})^2}, \\ \sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1})}{(1 + q^{2n-1})^2}. \end{cases}$$

Aus diesen Productentwicklungen ergiebt sich im speciellen:

$$\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e^{\frac{\eta_2 \omega_2}{8}} \frac{P_3^2}{P_1^2}, \quad \sigma_3\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e^{\frac{\eta_2 \omega_2}{8}} \cdot \frac{P_1^2}{P_3^2},$$

$$\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = 2\, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{\eta_3 \omega_3}{8}}\, q^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{P_2^2}{P_1^2}.$$

Durch Combination dieser Formeln mit den Gleichungen (5) drücke man die rechten Seiten der aus (4) pg. 225 entspringenden Formeln:

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}, \quad \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}$$

durch die Producte P_k aus; es ergiebt sich:

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\pi}{\omega_2}\left(\frac{P_0 P_3}{P_1 P_2}\right)^2, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{\omega_2}\left(\frac{P_0 P_1}{P_2 P_3}\right)^2, \quad \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{4\pi}{\omega_2} q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P_0 P_2}{P_1 P_3}\right)^2.$$

Durch nochmaliges Wurzelziehen folgt unter Benutzung von (6):

$$(8)\qquad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2 - e_1} = P_0 P_3^2, \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3} = P_0 P_1^2,$$
$$\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_3 - e_1} = 2 q^{\frac{1}{4}} P_0 P_2^2.$$

Der Ausdruck:

$$(9)\qquad \Delta = 16\,[(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)]^2,$$

welcher als ganze symmetrische Function der Wurzeln e_1, e_2, e_3 der cubischen Gleichung:

$$(10)\qquad 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

eine rationale ganze Function von g_2, g_3 ist, wird als „*Discriminante*“ dieser Gleichung bezeichnet. Das Verschwinden der Discriminante Δ zeigt zufolge (9) an, dass zwei Wurzeln der Gleichung (10) identisch sind. Bei den für uns in Betracht kommenden g_2, g_3 wird daher beständig $\Delta \neq 0$ sein. Dies geht direct aus der folgenden durch die Gleichungen (8) gelieferten *Productentwicklung der Discriminante:*

$$(11)\qquad \Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24}$$

hervor. Wir finden in dieser Formel Δ als *eindeutige Function von* ω_1, ω_2 dargestellt, die in diesen Grössen *homogen von* $(-12)^{ter}$ *Dimension* ist.

§ 15. Einführung der Thetafunctionen.

Aus dem pg. 225 angegebenen Verhalten von $\sigma_3(u)$ bei Vermehrung von u um ω_2 geht hervor, dass die in u eindeutige Function:

$$(1)\qquad e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \sigma_3(u)$$

die Periode ω_2 besitzt. Teilen wir demnach die u-Ebene in der pg. 226 besprochenen Weise (cf. Fig. 64 a. a. O.) in Parallelstreifen, so wird die in (1) gebildete Function in homologen Punkten u, $u \pm \omega_2$, $u \pm 2\omega_2, \cdots$ gleiche Werte haben. Bei der Abbildung vermöge der in (1) pg. 226 angegebenen Function t correspondieren dem einzelnen Punkte der t-Ebene immer unendlich viele solche homologe Punkte der Streifen und keine weiteren Punkte u. Es folgt, dass die Function (1) *eine eindeutige Function* $f(t)$ *der Variabelen* t wird. Übrigens folgt weiter aus den Eigenschaften der Function (1), *dass* $f(t)$ *für alle Werte* t *regulär ist, abgesehen von* $t = 0$ *und* $t = \infty$, *welche wesentlich singuläre Punkte von* $f(t)$ *liefern.*

Nach den Theoremen von pg. 146 u. f. lässt sich hiernach unsere Function:

(2) $$f(t) = e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sigma_3(u)$$

auf eine und nur eine Weise in eine Laurent'sche Reihe:

(3) $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$$

entwickeln, welche abgesehen von $t = 0$ und $t = \infty$ beständig convergent ist.

Lässt man, zur Bestimmung der Coefficienten a_n, das Argument u um ω_1 wachsen, so wird an Stelle von $t = e^{\frac{2i\pi u}{\omega_2}}$ offenbar $q^2 t$ treten. Die Function (1) aber geht hierbei zufolge (5) pg. 225 in sich selbst multipliciert mit:

$$e^{-\frac{\eta_2}{2\omega_2}(2u\omega_1 + \omega_1^2) + \eta_1\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}$$

über, einem Factor, den man mit Hilfe der Legendre'schen Relation (1) pg. 199 leicht umrechnet in:

$$e^{-\frac{\pi i \omega_1}{\omega_2} - \frac{2i\pi u}{\omega_2}} = q^{-1} t^{-1}.$$

Somit gilt für $f(t)$ die Functionalgleichung:

$$f(q^2 t) = q^{-1} \cdot t^{-1} f(t).$$

Hieraus folgt mit Benutzung des Ansatzes (3):

$$f(t) = qt \cdot f(q^2 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^{2n+1} \cdot t^{n+1},$$

so dass man aus der eindeutigen Bestimmtheit unserer Laurent'schen Reihe für $f(t)$ auf die für alle Indices n gültige Recursionsformel schliesst:

(4) $$a_{n+1} = a_n q^{2n+1}.$$

Man liest hieraus sofort ab:

$$a_1 = a_{-1} = a_0 q, \quad a_2 = a_{-2} = a_0 q^4, \quad a_3 = a_{-3} = a_0 q^9, \cdots$$

und bestätigt leicht durch den Schluss der vollständigen Induction:

(5) $$a_n = a_{-n} = a_0 q^{n^2}.$$

Der noch unbekannte Coefficient a_0 mag gleichfalls noch von q abhängig sein und soll als solcher durch $\varphi(q)$ bezeichnet werden. Wir haben damit folgende Reihenentwicklung:

(6) $$e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\sigma_3(u) = \varphi(q)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i u}{\omega_2}}$$

gewonnen.

Zur Bestimmung von $\varphi(q)$ setzen wir in (6) nach einander $u = 0$ und $u = \frac{\omega_2}{2}$ ein und finden unter Benutzung des bereits pg. 228 berechneten Wertes $\sigma_3\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$:

(7) $$\frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}, \quad \left(\frac{P_1}{P_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{m^2}.$$

Durch Multiplication dieser beiden convergenten Reihen folgt:

(8) $$\left(\frac{P_1}{P_3\,\varphi(q)}\right)^2 = \sum_{m,n} (-1)^m q^{m^2+n^2},$$

wo m, n alle Paare ganzer Zahlen durchlaufen sollen und die entspringende Reihe leicht direct als convergent erkannt wird. Man darf sich auf alle Paare m, n beschränken, bei denen $(m - n)$ eine gerade Zahl darstellt; ist nämlich eine der Zahlen m, n gerade, die andere ungerade, so wird sich das Glied $(-1)^m q^{m^2+n^2}$ gegen das gleichfalls auftretende Glied $(-1)^n q^{m^2+n^2}$ fortheben. Man gewinnt nun gerade alle noch übrig gebliebenen Zahlenpaare m, n, wenn man:

$$m + n = 2k, \quad m - n = 2l; \qquad m = k + l, \quad n = k - l$$

setzt und k, l alle Paare ganzer Zahlen durchlaufen lässt. Formel (8) liefert daraufhin:

$$\left(\frac{P_1}{P_3\,\varphi(q)}\right)^2 = \sum_{k,l} (-1)^{k+l} q^{2k^2+2l^2} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k q^{2k^2}\right) \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l q^{2l^2}\right);$$

indem wir hier rechts und links die Quadratwurzel ausziehen und zur Bestimmung des Vorzeichens $q = 0$ eintragen, wo übereinstimmend $P_1 = P_3 = \varphi = 1$ wird, erhalten wir weiter:

$$\frac{P_1}{P_3\,\varphi(q)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{2m^2}.$$

Die damit gewonnene Reihe geht aus derjenigen in der zweiten Gleichung (7) hervor, wenn wir in letzterer q^2 an Stelle von q treten lassen. Schreiben wir daher die in (4) pg. 227 erklärten Producte ausführlicher $P_k(q)$, so sind wir zur Relation geführt:

$$\frac{P_1(q)}{P_3(q)\,\varphi(q)} = \frac{P_1(q^2)^2}{P_3(q^2)^2\,\varphi(q^2)},$$

(9) $$\varphi(q^2)\,P_3(q^2)^2\,P_1(q) = \varphi(q)\,P_3(q)\,P_1(q^2)^2.$$

Nun hat man offenbar:

$$P_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2\cdot 2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2(2n-1)}),$$

d. h. $P_0(q) = P_0(q^2)P_1(q^2)$; und da man in ähnlicher Weise aus den Formeln (4) pg. 227 die Gleichung $P_1(q^2) = P_1(q)P_3(q)$ gewinnt, so gilt:

$$P_0(q^2)\,P_1(q^2)^2 = P_0(q)\,P_1(q)\,P_3(q).$$

Nach Multiplication dieser Relation mit der Gleichung (9) folgt:

$$\varphi(q^2)\,P_3(q^2)^2\,P_0(q^2) = \varphi(q)\,P_3(q)^2\,P_0(q).$$

Setzt man demgemäss $F(q) = \varphi(q)\,P_3(q)^2\,P_0(q)$, so hat die hierdurch definierte Function $F(q)$ die Eigenschaft, *beim Ersatz von q durch q^2 unverändert zu bleiben.*

Nun gilt die vorstehende Betrachtung für jede Zahl q mit $|q|<1$. Aus $F(q) = F(q^2)$ werden wir demnach sofort folgern:

$$F(q) = F(q^2) = F(q^4) = F(q^8) = \cdots = F(q^{2^n}) = \cdots.$$

Aber es ist $\lim_{n=\infty} q^{2^n} = 0$, und da $F(q)$ für $|q|<1$ eine stetige Function von q ist, so folgt mit Rücksicht auf (8) pg. 229:

$$F(q) = F(0) = 1, \quad \frac{1}{\varphi(q)} = P_0(q)\,P_3(q)^2 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}.$$

Den hiermit bestimmten Wert von $\varphi(q)$ trage man in die Gleichung (6) ein, welche dadurch die Gestalt annimmt:

$$(10)\qquad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}\,\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i u}{\omega_2}}.$$

In der hier rechts stehenden Summe haben wir bereits eine der vier *Thetafunctionen* gewonnen, über deren Auffindung oben (pg. 174) einige historische Angaben gemacht wurden. Wir setzen zur Abkürzung:

$$(11)\qquad \frac{u}{\omega_2} = v$$

und bezeichnen die Summe der fraglichen Reihe als Function von v und q durch $\vartheta_3(v,q)$. Die drei anderen Thetafunctionen, welche den Functionen $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ correspondieren, erklären wir alsdann von $\vartheta_3(v,q)$ aus durch folgende Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(v,q) = \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}, q\right), \\ \vartheta_1(v,q) = -\,i q^{\frac{1}{4}} e^{v i\pi}\,\vartheta_3\left(v+\frac{\omega+1}{2}, q\right), \\ \vartheta_2(v,q) = q^{\frac{1}{4}} e^{v i\pi}\,\vartheta_3\left(v+\frac{\omega}{2}, q\right). \end{cases}$$

Die vier Thetafunctionen sind hiernach durch die für alle endlichen Werte v convergenten Reihen:

$$(13)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v,q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi v i}, \\ \vartheta_1(v,q) = \frac{1}{i}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi v i}, \\ \vartheta_2(v,q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi v i}, \\ \vartheta_3(v,q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi v i} \end{cases}$$

dargestellt, denen man auch die Gestalt verleihen kann:

$$(14)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v,q) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - 2q^9\cos 6\pi v + \cdots, \\ \vartheta_1(v,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v - \cdots, \\ \vartheta_2(v,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v + \cdots, \\ \vartheta_3(v,q) = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + 2q^9\cos 6\pi v + \cdots. \end{cases}$$

Um den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den $\sigma_k(u)$ zu finden, muss man an Formel (10) anknüpfen, welche $\sigma_3(u)$ mit $\vartheta_3(v)$ verbindet und hat in dieser Formel u nach einander um $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ zu vermehren. Die Veränderungen der rechten Seite bestimmen sich aus (12); für die Veränderungen der linken Seite hat man auf die Definition (2) pg. 224 der $\sigma_k(u)$ zurückgehen und muss von den pg. 228 gegebenen Darstellungen der $\sqrt{e_i - e_k}$ sowie von der Legendreschen Relation (1) pg. 199 Gebrauch machen. Man findet folgende *Beziehungen zwischen den $\sigma_k(u)$ und den Thetafunctionen:*

$$(15)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\,\sqrt[8]{\Delta}\,\sigma(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_1(v), \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_0(v), \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_3 - e_1}\,\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_2(v), \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2 - e_1}\,\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_3(v); \end{cases}$$

in der ersten dieser Formeln bedeutet Δ die am Schlusse von § 14 pg. 229 eingeführte Discriminante.

Die Formeln (5) pg. 225 lehren vermöge einer kurzen Zwischenentwicklung, *dass sich die Thetafunctionen bei Vermehrung des Argumentes v um 1 resp. ω folgendermassen verhalten:*

$$(16)\qquad \begin{array}{ll} \vartheta_0(v+1)=\vartheta_0(v), & \vartheta_1(v+1)=-\vartheta_1(v), \\ \vartheta_2(v+1)=-\vartheta_2(v), & \vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v), \end{array}$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \vartheta_0(v+\omega)=-q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_0(v), \\ \vartheta_1(v+\omega)=-q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_1(v), \\ \vartheta_2(v+\omega)=q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+\omega)=q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_3(v). \end{array}\right.$$

Diese Regeln wird man aus den Reihenentwicklungen (13) leicht bestätigen. Durch Combination der Gleichungen (12), (16) und (17) gewinnt man eine Reihe von Formeln, welche das Verhalten der Thetafunctionen bei Vermehrung des Argumentes v um $\frac{1}{2}$ und $\frac{\omega}{2}$ charakterisieren.

Aufgabe 1. Man drücke durch wiederholte Anwendung der Regeln (16) und (17) die Function $\vartheta_k(v+m+n\omega)$ in $\vartheta_k(v)$ aus.

Aufgabe 2. Man stelle auf Grund von (12), (16) und (17):

$$\vartheta_k\left(v+m+\frac{1}{2}+n\omega\right),\quad \vartheta_k\left(v+m+n\omega+\frac{\omega}{2}\right),\quad \vartheta_k\left(v+m+\frac{1}{2}+n\omega+\frac{\omega}{2}\right)$$

in den ursprünglichen Functionen $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ dar.

Aufgabe 3. Durch Ausführung des Integrals $\int d\log\vartheta_3(v)$ über den Rand des Periodenparallelogramms (unter Benutzung der betreffenden Formeln (16), (17)) zu zeigen, dass $\vartheta_3(v)$ im Parallelogramm eine einfache Nullstelle hat.

§ 16. Die Nullwerte der Thetafunctionen.

Unter den vier Thetafunctionen sind die drei $\vartheta_0(v,q)$, $\vartheta_2(v,q)$, $\vartheta_3(v,q)$ gerade Functionen von v, $\vartheta_1(v,q)$ ist dagegen ungerade. Während demnach die letztere Function für $v=0$ verschwindet, sind die anderen *„Nullwerte" der Thetafunctionen,* die wir $\vartheta_k(q)$ oder kurz ϑ_k nennen wollen, von null verschieden und gegeben durch:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \vartheta_0=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+\cdots \\ \vartheta_2=2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+2q^{\frac{49}{4}}+\cdots \\ \vartheta_3=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots. \end{array}\right.$$

Von $\vartheta_1(v,q)$ wollen wir den Nullwert $\vartheta_1'(q)$ oder ϑ_1' der ersten nach v genommenen Ableitung $\vartheta_1'(v,q)$ anreihen:

$$(2)\qquad \vartheta_1'=2\pi\left(q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-7q^{\frac{49}{4}}+\cdots\right).$$

Nehmen wir in den Formeln (15) pg. 233 für u den Wert 0, so zeigt sich, *dass uns die drei Nullwerte* ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 *neue Darstellungen für die Differenzen der* e_k *ergeben:*

$$(3)\quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}=\vartheta_0,\quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_1}=\vartheta_2,\quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}=\vartheta_3.$$

Hieraus geht hervor, *dass zwischen den drei Nullwerten* ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 *die Relation besteht:*

$$(4)\qquad \vartheta_0^4+\vartheta_2^4=\vartheta_3^4.$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (15) nach u ergiebt sich

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\varDelta}\,\frac{d\sigma(u)}{du}=\frac{\eta_2 u}{\omega_2}e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\vartheta_1(v)+e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\cdot\frac{1}{\omega_2}\vartheta_1'(v).$$

Da $\sigma'(0)=1$ ist, so folgt für $u=0$ als *Darstellung der achten Wurzel aus der Discriminante* $\varDelta$ *durch* ϑ_1':

$$(5)\quad \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\varDelta}=\frac{1}{\omega_2}\vartheta_1'=\frac{2\pi}{\omega_2}\left(q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-7q^{\frac{49}{4}}+\cdots\right).$$

Diese Gleichung liefert im Verein mit den Formeln (3) auf Grund der Definition (9) pg. 229 der Discriminante als *weitere Relation zwischen den Nullwerten der Thetafunctionen:*

$$(6)\qquad \vartheta_1'=\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3.$$

Der Quotient von ϑ_2 und ϑ_3 ist identisch mit der vierten Wurzel aus derjenigen Grösse k^2, welche bei Legendre und Jacobi die Rolle des *„Integralmoduls“* spielt (cf. unten § 18), und entsprechend ist der Quotient von ϑ_0 und ϑ_3 gleich der vierten Wurzel aus dem *„complementären Modul“* k'^2:

$$(7)\qquad \sqrt{k}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}=\sqrt[4]{\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}},\quad \sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}=\sqrt[4]{\frac{e_2-e_3}{e_2-e_1}}.$$

Beide Moduln sind verbunden durch die Relation:

$$(8)\qquad k^2+k'^2=1.$$

Bemerkenswert sind die aus (8) pg. 229 hervorgehenden *Productdarstellungen für die achten Wurzeln der Integralmoduln:*

$$(9)\quad \sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right),\quad \sqrt[4]{k'}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right).$$

Aufgabe 1. Man bestätige die drei Formeln:

$$P_0P_1^2=\vartheta_0,\quad 2q^{\frac{1}{4}}P_0P_2^2=\vartheta_2,\quad P_0P_3^2=\vartheta_3,$$

indem man die links stehenden Producte durch Ausmultiplication ihrer Factoren in Reihen entwickelt.

Aufgabe 2. Man verfahre ebenso mit der aus (11) pg. 229 und obiger Formel (5) entspringenden Gleichung:

$$q^{\frac{1}{4}}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\right)^3 = q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - 7q^{\frac{49}{4}} + \cdots.$$

§ 17. Jacobi's elliptische Functionen sn(w), cn(w), dn(w).

Durch Combination der drei Gleichungen (4) pg. 225, welche die Wurzelfunctionen $\sqrt{\wp(u)-e_k}$ in den $\sigma_k(u)$ darstellen, erhält man:

$$(e_2-e_1)\,\sigma(u)^2 = \sigma_1(u)^2 - \sigma_2(u)^2,$$
$$(e_3-e_2)\,\sigma(u)^2 = \sigma_2(u)^2 - \sigma_3(u)^2,$$
$$(e_1-e_3)\,\sigma(u)^2 = \sigma_3(u)^2 - \sigma_1(u)^2.$$

Rechnen wir diese Relationen vermöge (15) pg. 233 und unter Benutzung der soeben eingeführten Grössen k^2, k'^2 auf die Thetafunctionen um, so nehmen sie die Gestalt an:

$$(1)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v)^2 = k\vartheta_0(v)^2 - k'\vartheta_2(v)^2, \\ k'\vartheta_1(v)^2 = k\vartheta_3(v)^2 - \vartheta_2(v)^2, \\ k\vartheta_1(v)^2 = \vartheta_0(v)^2 \quad - k'\vartheta_3(v)^2. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt unter Einführung einer neuen Variabelen φ:

$$(2)\qquad \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \sin\varphi,$$

so können wir zufolge der ersten Gleichung (1) schreiben:

$$(3)\qquad \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = \cos\varphi.$$

Definiert man ferner eine Function $\Delta\varphi$ von φ, welche natürlich nicht mit der Discriminante Δ zu verwechseln ist, durch:

$$(4)\qquad \Delta\varphi = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

so ergiebt die dritte Gleichung (1):

$$(5)\qquad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Die Variabele φ ist übrigens bei gegebenem u bez. v durch (2) und (3) nur erst bis auf Multipla von 2π bestimmt; man könnte φ dadurch eindeutig bestimmen, dass man den reellen Bestandteil $\geqq 0$ und $< 2\pi$ wählt.

Wir definieren ferner an Stelle von u bez. v die Variabele

$$(6)\qquad w = u\sqrt{e_2-e_1} = v\,\omega_2\sqrt{e_2-e_1},$$

die wir unter Benutzung von (8) pg. 229 auch schreiben können:

$$(7) \qquad w = \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 + q^{2n-1})^4.$$

Die Grösse φ wird auf diese Weise eine Function von w, welche den Namen „Amplitude von w“ trägt und durch am w bezeichnet wird. Diese Benennung hat natürlich nichts mit der „Amplitude einer complexen Zahl“ zu thun, sondern rührt von einer gewissen mechanischen Bedeutung des bei reellem w und k^2 eintretenden „Winkels“ φ her.

Tragen wir jetzt für φ den Ausdruck am w in (2), (3) und (4) ein, *so gelangen wir zu den drei Jacobi'schen Functionen:*

$$(8) \quad \sin \operatorname{am} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \ \cos \operatorname{am} w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \ \Delta \operatorname{am} w = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

von denen zufolge (14) *pg.* 233 *die erste eine ungerade Function von w ist, während die zweite und dritte gerade sind.* An Stelle der etwas umständlichen Jacobi'schen Schreibweise ist es neuerdings üblich geworden, die drei Functionszeichen (8) durch sn, cn, dn zu ersetzen:

$$(9) \qquad \operatorname{sn} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{cn} w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{dn} w = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.$$

Die zweite und dritte Function drücken sich durch die erste so aus:

$$(10) \qquad \operatorname{cn} w = \sqrt{1 - \operatorname{sn} w^2}, \quad \operatorname{dn} w = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn} w^2}.$$

Wir merken gleich auch noch die *Beziehung der Jacobi'schen Functionen zu den pg.* 224ff. *betrachteten Wurzelfunctionen* $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ an; die Rechnung ergiebt:

$$(11) \quad \operatorname{sn} w = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}}, \quad \operatorname{cn} w = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_2}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}}, \quad \operatorname{dn} w = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_3}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}}.$$

Nimmt u um ω_1 resp. ω_2 zu, so wächst w um $\omega_1 \sqrt{e_2 - e_1}$ resp. $\omega_2 \sqrt{e_2 - e_1}$. Diese beiden Beträge sind identisch mit denjenigen beiden Grössen, welche Jacobi $2iK'$ und $2K$ nennt:

$$(12) \qquad \omega_1 \sqrt{e_2 - e_1} = 2iK', \quad \omega_2 \sqrt{e_2 - e_1} = 2K.$$

Die Bezeichnung motiviert sich so, dass im Falle reeller e_1, e_2, e_3 die Periode ω_1 rein imaginär, ω_2 aber reell wird; es werden alsdann K und K' reell (cf. Figur 62 pg. 217).

Das *Verhalten der Jacobi'schen Functionen bei Vermehrung von w um $2K$ resp. $2iK'$* bestimmt man aus dem entsprechenden Verhalten der Wurzelfunctionen $f_k(u) = \sqrt{\wp(u) - e_k}$, welches in (6) pg. 225 angegeben ist; man findet:

$$(13)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(w+2K) = -\operatorname{sn} w, & \operatorname{sn}(w+2iK') = +\operatorname{sn} w, \\ \operatorname{cn}(w+2K) = -\operatorname{cn} w, & \operatorname{cn}(w+2iK') = -\operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(w+2K) = +\operatorname{dn} w, & \operatorname{dn}(w+2iK') = -\operatorname{dn} w. \end{cases}$$

Hiernach ist sn w *eine doppeltperiodische Function mit den Perioden* $4K$, $2iK'$, und zwar erweist sie sich als eine *zweiwertige* Function dieser Art. Als zugehöriges Periodenparallelogramm benutzen wir dasjenige der Ecken $0, 4K, 2iK', 4K+2iK'$. Die Werteverteilung von sn w in diesem Parallelogramm ist in Figur 65 angedeutet. Die hier in Klammern gesetzten Werte gehören der Function an; man wird die Angaben der Figur mit Hilfe der entwickelten Darstellungen der Function sn w ohne besondere Mühe bestätigen können.

Fig. 65.

Fig. 66.

Entsprechend ist cn w *eine zweiwertige doppeltperiodische Function mit den Perioden* $4K$, $2K+2iK'$ *und* dn w *eine ebensolche Function mit den Perioden* $2K$, $4iK'$. Das Periodenparallelogramm mit der Werteverteilung von cn w entnehme man aus Figur 66; entsprechend gilt Figur 67 für dn w.

Fig. 67.

Die Differentiation der Gleichung:

$$\operatorname{sn} w^2 (\wp(u) - e_1) + e_1 - e_2 = 0$$

nach u ergiebt:

$$2\sqrt{e_2 - e_1}\,\mathrm{sn}\,w\,\frac{d\,\mathrm{sn}\,w}{dw}\,(\wp(u) - e_1) + \mathrm{sn}\,w^2\,\wp'(u) = 0.$$

Andrerseits folgt durch Multiplication der drei Gleichungen (11) unter Benutzung von (7) pg. 225:

$$\mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w \cdot \mathrm{dn}\,w = -\frac{1}{2}\sqrt{e_2 - e_1} \cdot \frac{\wp'(u)}{(\wp(u) - e_1)^2}.$$

Eliminiert man aus dieser und aus den beiden voraufgehenden Gleichungen $\wp'(u)$ und $(\wp(u) - e_1)$, so folgt:

$$d\,\mathrm{sn}\,w = \mathrm{cn}\,w \cdot \mathrm{dn}\,w \cdot dw.$$

Berücksichtigt man die durch Differentiation von:

$$\mathrm{cn}\,w^2 + \mathrm{sn}\,w^2 = 1, \quad \mathrm{dn}\,w^2 + k^2\,\mathrm{sn}\,w^2 = 1$$

entspringende Relationen:

$$\mathrm{cn}\,w\,d\,\mathrm{cn}\,w + \mathrm{sn}\,w\,d\,\mathrm{sn}\,w = 0, \quad \mathrm{dn}\,w\,d\,\mathrm{dn}\,w + k^2\,\mathrm{sn}\,w\,d\,\mathrm{sn}\,w = 0,$$

so ergeben sich die nachfolgenden *drei Differentialrelationen zwischen den Jacobi'schen Functionen:*

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\,\mathrm{sn}\,w}{dw} &= \mathrm{cn}\,w \cdot \mathrm{dn}\,w, \\ \frac{d\,\mathrm{cn}\,w}{dw} &= -\,\mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{dn}\,w, \\ \frac{d\,\mathrm{dn}\,w}{dw} &= -\,k^2\,\mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w. \end{aligned}\right.$$

Durch wiederholte Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{d^2\,\mathrm{sn}\,w}{dw^2} = -(1 + k^2)\,\mathrm{sn}\,w + 2k^2\,\mathrm{sn}\,w^3,$$

$$\frac{d^3\,\mathrm{sn}\,w}{dw^3} = -(1 + k^2)\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w + 6k^2\,\mathrm{sn}\,w^2\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und entsprechende Formeln wird man leicht für die höheren Ableitungen von $\mathrm{cn}\,w$ und $\mathrm{dn}\,w$ aufstellen. Indem man die Nullwerte dieser Ableitungen bestimmt, ergeben sich folgende *Potenzreihenentwicklungen für die Jacobi'schen Functionen:*

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}\,w &= w - \frac{1+k^2}{3!}\,w^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}\,w^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}\,w^7 + \cdots \\ \mathrm{cn}\,w &= 1 - \frac{1}{2!}\,w^2 + \frac{1+4k^2}{4!}\,w^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}\,w^6 + \cdots \\ \mathrm{dn}\,w &= 1 - \frac{k^2}{2!}\,w^2 + \frac{4k^2+k^4}{4!}\,w^4 - \frac{16k^2+44k^4+k^6}{6!}\,w^6 + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Diese Reihen haben als gemeinsamen Convergenzbezirk einen Kreis um den Nullpunkt $w=0$, welcher bis zu dem am Nullpunkt nächst gelegenen Punkte $2mK+(2m'+1)iK'$ des Parallelogrammnetzes gerade heranreicht.

Aufgabe. Man bestimme das Verhalten der Jacobi'schen Functionen bei Vermehrung von w um K und um iK', indem man auf das Verhalten der Thetafunctionen bei Vermehrung von u um Periodenhälften zurückgeht.

§ 18. Algebraischer Aufbau der Jacobi'schen Theorie.

Die Jacobi'sche Function $\operatorname{sn} w$ hat in je zwei Punkten w und $w'=2K-w$ gleiche Werte. Ordnen wir demnach das Periodenparallelogramm derart an, dass es den Punkt $w=K$ zum Mittelpunkt und demgemäss die vier Eckpunkte $-K\pm iK'$, $3K\pm iK'$ bekommt, so tragen je zwei bezüglich des Mittelpunktes diametrale Punkte w, $w'=2K-w$ (cf. Figur 68) gleiche Werte $\operatorname{sn} w$. *Zerschneiden wir demnach das Parallelogramm etwa durch die von $(K-iK')$ nach $(K+iK')$ ziehende Mittellinie in zwei congruente Parallelogramme, so ist das einzelne derselben, z. B. das in Figur 69 ausgewählte mit dem Mittelpunkte $w=0$, bereits ein einfaches und vollständiges conformes Abbild der Ebene von $z=\operatorname{sn} w$.* Dabei tragen jedoch je zwei Randpunkte dieses letzteren Parallelogramms gleiche Functionswerte z; die dergestalt eintretende Zuordnung der Randpunkte zu Paaren ist in Figur 69 durch die Pfeile angedeutet.

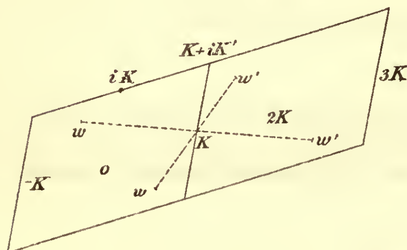


Fig. 68.

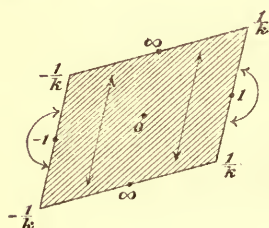


Fig. 69.

Die hier in Rede stehende Beziehung wolle man sich wieder durch mechanische Umgestaltung des Parallelogramms zur Ebene von $z=\operatorname{sn} w$ veranschaulichen, wie dies Figur 70 ausführt. Je zwei zugeordnete Randpunkte des anfänglichen Parallelogramms kommen hierbei schliesslich zur Deckung. Man wolle an der Hand dieser Figur feststellen, *dass allein die vier Stellen $z=\pm 1$, $z=\pm\frac{1}{k}$ irreguläre Punkte der Abbildung sind.* Hier findet beim Fortgang von der w-Ebene zur z-Ebene *Verdoppelung der Winkel* statt.

Man bilde jetzt das ganze Parallelogramm der Figur 68 auf die

Ebene von $z = \operatorname{sn} w$ ab, wobei zwei entsprechende Punkte gegenüberliegender Seiten w und $(w + 4K)$ resp. w und $(w + 2iK')$, weil ihnen gleiche Werte z zukommen, jeweils ein und denselben Punkt der Abbildung liefern sollen. Da die rechte Hälfte des Parallelogramms, für sich genommen, gleichfalls ein vollständiges Exemplar der z-Ebene liefert, welches wir etwa *unter* das eben schon gewonnene lagern, *so stellt die gesuchte Abbildung eine zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten* $z = \pm 1$, $z = \pm \frac{1}{k}$ *dar.* Zugleich zeigt der Zusammenhang der beiden Hälften des Parallelogramms in Figur 68, *dass die Verzweigungsschnitte unserer Fläche zwei von* 1 *nach* $\frac{1}{k}$ *bez. von* -1 *nach* $-\frac{1}{k}$ *laufende Curven sind* (cf. Figur 71).

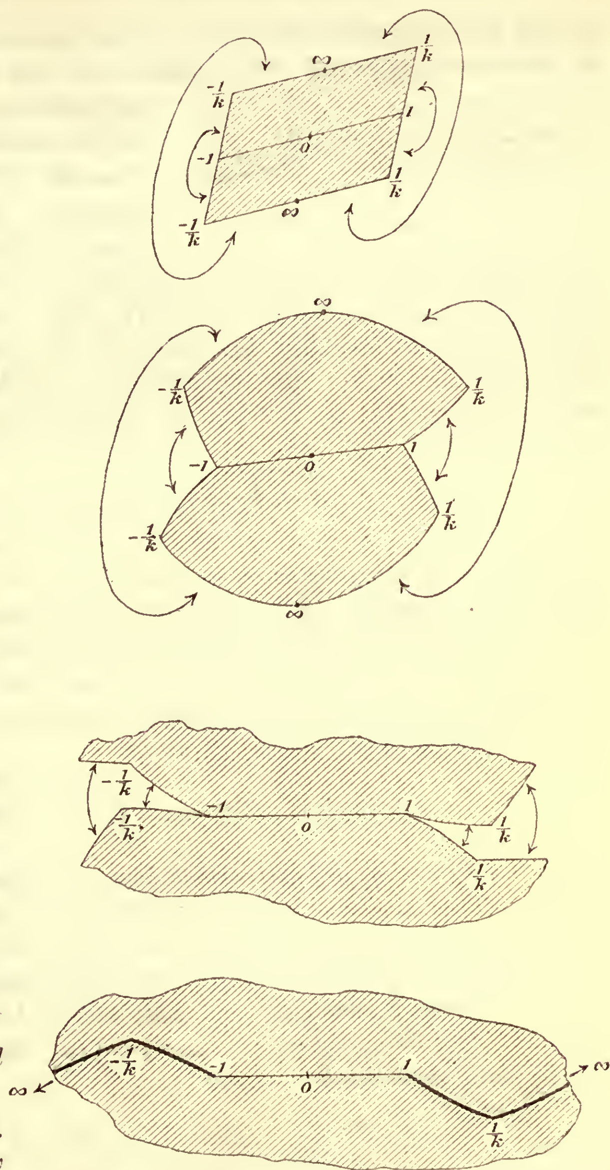


Fig. 70.

Nach (13) pg. 238 ist $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$ auch eine eindeutige doppeltperiodische Function mit den Perioden $4K$, $2iK'$. Demnach wird diese Function auf der eben gewonnenen Riemann'schen Fläche eindeutig

sein. Sie nimmt daselbst die Gestalt:

(1) $$\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

an, mit der Vorschrift, *dass für $z=0$ im oberen Blatte der Wert $+1$ der Wurzel zutreffen soll.* Wir können daher das Ergebnis algebraisch so formulieren, *dass es sich hier um die zur zweideutigen algebraischen Function $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ gehörende Riemann'sche Fläche handelt.* Man wird die Analogie dieser Entwicklungen zu denen von pg. 218 ff. erkennen. Entsprechend wie damals gewinnen wir z. B. das Theorem: *Jede doppeltperiodische Function mit den Perioden $4K$, $2iK'$ ist eine rationale Function von* $\operatorname{sn} w$ *und* $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$. Die ursprüngliche unabhängige Variabele w stellt sich nach (14) pg. 239 auf der Riemann'schen Fläche so dar:



Fig. 71.

(2) $$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo die untere Integralgrenze im Nullpunkt des oberen Blattes der Fläche zu fixieren ist. Wir sind hiermit zur *„Legendre'schen Normalform" des elliptischen Integrals erster Gattung* geführt.

Lassen wir an Stelle der Function $\operatorname{sn} w$ in der voraufgehenden Entwicklung $\operatorname{cn} w$ oder $\operatorname{dn} w$ treten, so gelangen wir zu *zwei weiteren Riemann'schen Flächen, welche als die zu:*

(3) $$\sqrt{(1-z^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}z^2\right)} \quad \textit{bez.} \quad \sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{k'^2}z^2\right)}$$

gehörenden algebraisch definiert werden können. Diese drei Riemann'schen Flächen ordnen sich coordiniert der einen in § 9 pg. 202 gewonnenen Riemann'schen Fläche der Verzweigungspunkte e_1, e_2, e_3, ∞ unter, wobei jede einzelne der ersteren Flächen auf diese letztere 1-2-deutig bezogen ist. Diese Beziehungen sind, falls wir der Unterscheidung halber $\operatorname{sn} w = z_1$, $\operatorname{cn} w = z_2$, $\operatorname{dn} w = z_3$ und $\wp(u) = z$ schreiben, zufolge (11) pg. 237 dargestellt durch:

(4) $$z_1^2 = \frac{e_2-e_1}{z-e_1} \quad z_2^2 = \frac{z-e_2}{z-e_1} \quad z_3^2 = \frac{z-e_3}{z-e_1}.$$

Es ist eine nützliche Übung, die hierdurch festgelegten Abbildungen je zweier zweiblättrigen Riemann'schen Flächen auf einander im einzelnen zu verfolgen. —

Ist eine beliebige Riemann'sche zweiblättrige Fläche mit vier ge-

trennt liegenden Verzweigungspunkten z_1, z_2, z_3, z_4 gegeben, so würde der Übergang zu einer Fläche mit den Verzweigungspunkten ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ nach dem Bisherigen durch die pg. 209 besprochene lineare Transformation im Verein mit der ersten der drei in (4) gegebenen quadratischen Transformationen vollzogen werden. Es ist aber bemerkenswert, *dass man der vorgelegten beliebigen Fläche auch durch „lineare" Transformation allein eine Gestalt geben kann, bei welcher ihre Verzweigungspunkte bei* ± 1 *und* $\pm \frac{1}{k}$ *liegen.* Jedoch wird hierbei im allgemeinen ein anderer Wert k herauskommen, als bei der zuerst genannten Methode.

Wir wollen diese lineare Transformation der Fläche auf die in Rede stehende „Normalform" auch hier nicht rechnerisch durchführen, sondern auf Grund der Sätze über „Kreisverwandtschaft" (cf. pg. 78 ff.) die fragliche Transformation nur geometrisch fixieren.

Haben wir zuerst den allgemeinen Fall, dass die Verzweigungsstellen z_1, z_2, z_3, z_4 *nicht auf einem Kreise* liegen, so nehme man zur Erleichterung der Ausdrucksweise z_4 als mit ∞ identisch an, was nötigenfalls durch eine erste lineare Transformation erreichbar ist. Man ziehe nun von z_3 die beiden geradlinigen Strahlen S_1, S_2 durch z_1 und z_2 nach ∞. Beide Strahlen werden, da z_1, z_2, z_3, z_4 nicht auf einem Kreise liegen sollten, weder zusammenfallen, noch der eine die Verlängerung des anderen sein; vielmehr werden sie einen concaven und einen convexen Winkel mit einander bilden (cf. Figur 72). Man

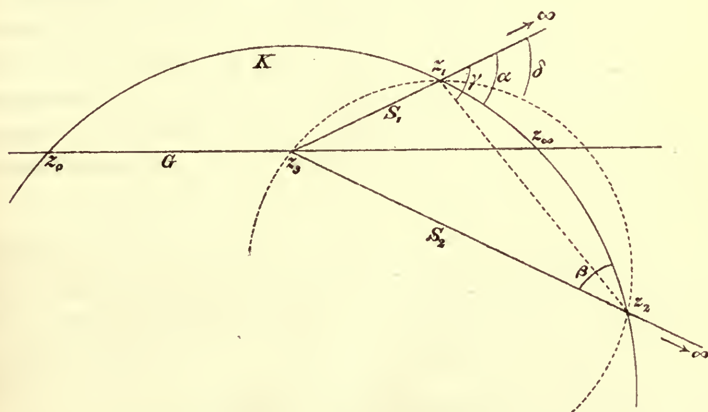


Fig. 72.

ziehe die diese Winkel halbierende Gerade G. Man ziehe ferner denjenigen durch z_1 und z_2 laufenden Kreis K, für welchen die in der Figur mit α und β bezeichneten Winkel gleich sind. Zufolge einer

elementaren Betrachtung ist der Winkel α durch die in Figur 72 mit γ und δ bezeichneten Winkel eingeschlossen; K wird hiernach ein endlicher, den Punkt z_3 umschliessender Kreis sein. Die Schnittpunkte von K mit G mögen bei z_0 und z_∞ liegen, wobei z_∞ im concaven Winkel der Strahlen S_1, S_2 gelegen sein soll.

Man gehe nun vermöge der linearen Substitution:

$$z' = \frac{z_3 - z_\infty}{z_3 - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{z - z_\infty}$$

zu der kreisverwandten z'-Ebene über, in welcher die bisherigen Punkte z_0, z_3, z_∞ nach 0, 1, ∞ rücken. In dieser Ebene, die wir gleich wieder als z-Ebene bezeichnen, hat Figur 72 die hierneben in Figur 73 skizzierte Gestalt angenommen. G ist die reelle z-Axe geworden; S_1, S_2 sind, da sie G unter gleichem Winkel schneiden, zwei bezüglich der reellen Axe symmetrische Kreisbogen geworden; K ist eine durch den Nullpunkt ziehende Gerade. Aus der Gleichheit der Winkel α und β folgt durch elementare Betrachtung, dass der Nullpunkt Mittelpunkt der Figur sein muss. Der bisher bei $z = \infty$ gelegene Verzweigungspunkt z_4 ist somit nach -1 gerückt, die bisherigen Punkte z_1, z_2 haben bezüglich des Nullpunktes diametrale Lage angenommen. Merken wir somit an: *Liegen die vier Verzweigungspunkte nicht auf einem Kreise, so kann man durch lineare Transformation von z dieselben an die Stellen ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ bringen, wo k eine von 0 verschiedene complexe Zahl mit einem Betrage $|k| < 1$ ist.* Der Ungleichung $|k| < 1$, die nicht wesentlich ist, wurde mit Rücksicht auf bald folgende Rechnungen entsprochen. Wäre $|k| > 1$, so würde die Transformation $z' = \frac{-1}{z}$ zu der von uns bevorzugten Lage der Verzweigungspunkte führen.

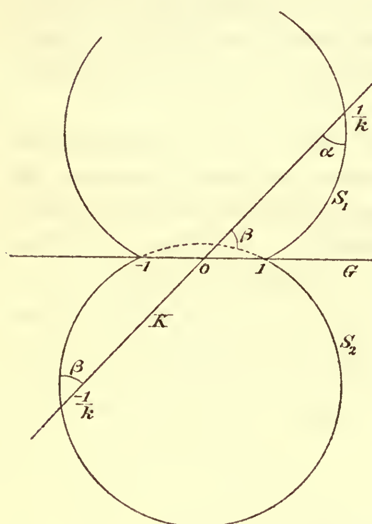


Fig. 73.

Liegt der Specialfall vor, dass die *Verzweigungspunkte auf einem Kreise* liegen, so mache man diesen zur reellen z-Axe und bezeichne die Verzweigungspunkte in solcher Anordnung durch $z_1, \cdot\cdot, z_4$, dass $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ ist. Man zeichne alsdann durch z_1 und z_3 einen Kreis,

dessen Centrum auf der reellen Axe liegt, und lege einen ebensolchen Kreis durch z_2 und z_4. Es giebt einen bestimmten Kreis K, welcher in der durch Figur 74 angedeuteten Art die Winkel der beiden eben gezogenen Kreise halbiert. K schneidet die reelle Axe senkrecht in zwei Punkten z_0, z_∞, von denen ersterer zwischen z_2 und z_3 liegt.

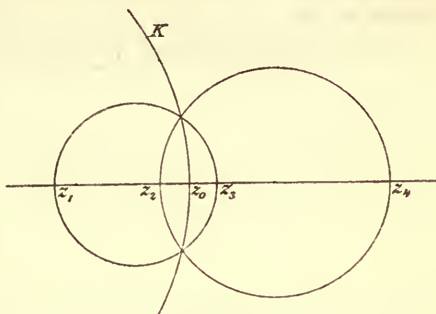


Fig. 74.

Gehen wir nun wieder durch die vorhin bereits zur Anwendung gebrachte lineare Substitution zu einer kreisverwandten Ebene über, in welcher z_0, z_3, z_∞ nach $0, 1, \infty$ rücken, so geht die reelle Axe in sich selbst über, während K zur imaginären Axe wird. Die beiden Kreise durch z_1, z_3 bez. z_2, z_4 werden jetzt bezüglich der imaginären Axe einander symmetrisch sein. *Liegen die vier Verzweigungspunkte auf einem Kreise, so kann man sie durch lineare Transformation an die Stellen* ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ *bringen, wobei* k *eine reelle, dem Intervalle* $0 < k < 1$ *angehörende Zahl ist.*

Haben wir nun auf eine beliebige Riemann'sche Fläche unserer Art die erste oder zweite der besprochenen Transformationen ausgeübt, so würde jetzt ganz analog, wie pg. 208, die Frage auftreten, ob diese Fläche *in jedem Falle* durch das zugehörige überall endliche Integral (2) eine Abbildung auf ein Parallelogrammnetz der w-Ebene liefert, welches die letztere (bis auf $w = \infty$) überall einfach und vollständig bedeckt. Man könnte dies nach den pg. 209 ff. entwickelten Methoden bejahend entscheiden; doch ist unsere Frage bereits durch die damaligen Überlegungen mitentschieden. Bestimmt man nämlich drei der Proportion:

$$e_1 : e_2 : e_3 = (k^2 + 1) : (k^2 - 2) : (1 - 2k^2)$$

genügende Grössen e_k, so ist $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, und keine zwei dieser Zahlen können gleich sein, da offenbar k^2 keinem der drei Werte $0, 1, \infty$ (wegen der Verschiedenheit der Verzweigungsstellen) gleich ist. Das zu diesen e_k gehörende Integral u leistet alsdann nach pg. 215 u. f. eine Abbildung, welche vermöge der Transformation $w = u\sqrt{e_2 - e_1}$ eben die hier postulierte Abbildung unserer Riemann'schen Fläche ergiebt.

Unter diesen Umständen liefert nun:

$$(5) \qquad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

direct diejenige Gleichung, auf welche sich das schon pg. 219 besprochene Jacobi'sche Umkehrtheorem bezieht, *dass nämlich die obere Integralgrenze z eine eindeutige doppeltperiodische Function des Integralwertes w ist.*

Die Perioden selbst würden wir nach Riemann als Werte des

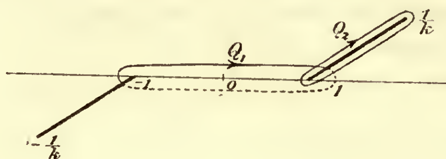


Fig. 75.

Integrals $\int dw$ definieren können, ausgeführt über die beiden in Figur 75 gezeichneten geschlossenen Curven Q_1, Q_2:

$$(6) \quad 4K = \int_{(Q_1)} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad 2iK' = \int_{(Q_2)} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Ziehen wir Q_1 dicht an die reelle Axe heran, so folgt bei der Bauart unseres Integrales aus Überlegungen, wie wir sie pg. 212 im Anschluss an Figur 57 ausführten, dass $4K$ das Vierfache des im oberen Blatte längs der reellen Axe von 0 bis 1 ausgedehnten Integrales ist. So entspringt die von Jacobi gegebene Definition von K:

$$(7) \qquad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Für iK' würde sich entsprechend zunächst einstellen:

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

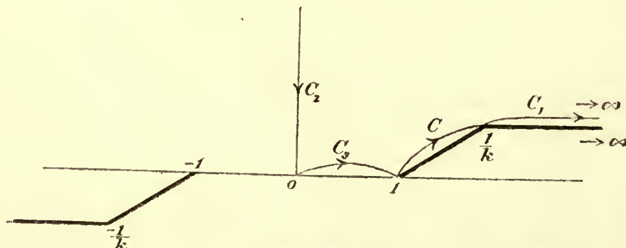


Fig. 76.

Das Integral ist im oberen Blatte längs der in Figur 76 mit C bezeichneten Curve zu erstrecken. Da sich jedoch die dementsprechende

Fixierung der Wurzel $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ nur etwas umständlich aussprechen lässt, so soll das für iK' angegebene Integral erst noch eine Umformung erfahren. In Figur 76 sind drei Curven C_1, C_2, C_3 hinzugesetzt, welche mit C im oberen Blatte einen geschlossenen Zug bilden. Das längs dieses Zuges erstreckte Integral $\int dw$ verschwindet. Bildet man nämlich das längs der in Figur 76 scharf markierten Linien zerschnittene Blatt auf die w-Ebene ab, so kommen wir zum Viereck der Figur 77, in welchem die correspondierenden Curven C_k einen gleich-

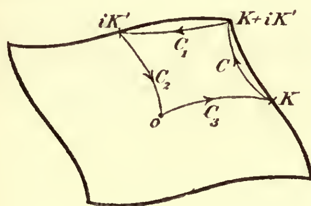


Fig. 77.

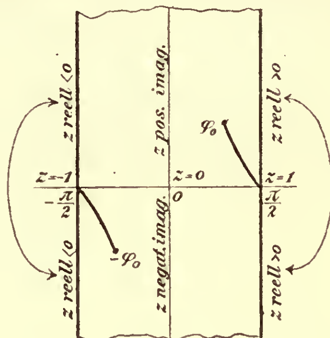


Fig. 78.

falls geschlossenen Zug liefern. Zugleich ist aus Figur 77 im einzelnen ersichtlich, dass:

$$\int_{(C_1)} dw = -\int_{(C_3)} dw = -K, \quad \int_{(C)} dw = -\int_{(C_2)} dw = iK'$$

zutrifft. Wir können somit zur Definition von iK' an Stelle der Curve C auch C_2 benutzen und finden auf diese Weise:

(8) $$iK' = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

auszudehnen längs der positiven imaginären Axe, wobei die im Nenner stehende Wurzel so zu fixieren ist, dass sie für $z=0$ gleich $+1$ wird.

Wir setzen jetzt wieder wie pg. 236 u. f. im Anschluss an Jacobi:

(9) $$z = \sin\varphi, \qquad \varphi = \arcsin z.$$

Ein einzelnes Bild der z-Ebene in der φ-Ebene ist in Figur 78 dargestellt; dasselbe besteht aus einem nach oben und unten unendlich ausgedehnten Parallelstreifen der Breite π und entspricht einer Zerschneidung der z-Ebene längs der reellen Axe von 1 bis ∞ und von -1 bis $-\infty$. Die Randpunkte des Bildes tragen zu Paaren gleiche, und zwar reelle Werte z, wie dies die Pfeile andeuten. Die eigent-

liche Bedeutung dieser Abbildung besteht darin, dass an den von $z = \pm 1$ herrührenden Stellen $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \cdots$ die Ebene von $\varphi = \operatorname{am} w$ auf die w-Ebene *conform* bezogen ist. Dagegen haben wir unendlich viele je zweiblättrige Verzweigungspunkte an den Stellen:

$$\pm \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{\pm 1}{k}\right), \quad \arcsin\left(\frac{\pm 1}{k}\right) \pm \pi, \cdots,$$

deren beide erste in Figur 78 markiert sind.

Trägt man $z = \sin \varphi$ in (5) ein, so hat man zu setzen:

$$dz = \cos \varphi \, d\varphi, \quad \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)} = \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

wo an der unteren Grenze $\varphi = 0$ die Wurzel $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ gleich 1 zu nehmen ist, da die untere Grenze $z = 0$ in (5) dem oberen Blatte angehören sollte. Wir gewinnen so die Jacobi'sche Formel:

$$(10) \qquad w = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

deren Inversion die Function $\varphi = \operatorname{am} w$ liefert. Wir gewinnen zugleich aus (7) und (8):

$$(11) \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad iK' = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

wobei das erste Integral längs der reellen φ-Axe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auszuführen ist, das zweite längs der positiven imaginären φ-Axe von 0 bis ∞.

Im letzteren Integral setzen wir endlich noch mit Jacobi:

$$\sin \varphi = i \operatorname{tg} \psi, \quad \cos \varphi \, d\varphi = \frac{i \, d\psi}{\cos^2 \psi}.$$

Bilden wir hierbei die positive imaginäre φ-Axe auf die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene reelle ψ-Axe ab, so müssen wir setzen:

$$\cos \varphi = + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \cos \psi^{-1},$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}}{\cos \psi},$$

wo k'^2 den *„complementären Integralmodul"* bedeutet (cf. pg. 235) und $\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}$ für $\psi = 0$ mit 1 identisch zu nehmen ist. Die zweite Formel (11) liefert daraufhin Jacobi's Definition von K':

(12) $$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\psi}},$$

wobei die Integration längs der reellen ψ-Axe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auszudehnen ist.

§ 19. Additionstheoreme der Jacobi'schen Functionen.

Die Function $\operatorname{sn}(w + w_1)$, bei stehendem w_1 als Function von w interpretiert, hat die Perioden $4K$, $2iK'$ und ist somit nach einem pg. 242 ausgesprochenen Satze eine rationale Function von $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$. Analog wie pg. 223 schliessen wir auf die Existenz einer Gleichung:

(1) $$\operatorname{sn}(w + w_1) = R[\operatorname{sn} w, \operatorname{sn} w_1, \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w, \operatorname{cn} w_1 \cdot \operatorname{dn} w_1],$$

welche das *„Additionstheorem" der Function* $\operatorname{sn} w$ ausspricht.

Um die explicite Gestalt der Formel (1) zu bestimmen, bemerken wir, dass das Product $\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w + w_1)$ in w eine zweiwertige doppeltperiodische Function mit den Perioden $2K$, $2iK'$ darstellt. Im zugehörigen Parallelogrammnetz liegen die Nullstellen an den mit 0 und mit $w = -w_1$ homologen Stellen; die Pole sind die mit iK' und $(-w_1 + iK')$ homologen Punkte. Eben dieselben Nullpunkte und Pole hat die gleichfalls zweiwertige Function $[\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{cn}(w + w_1) - \operatorname{cn} w_1]$ von den Perioden $2K$, $2iK'$. Da eine doppeltperiodische Function durch ihre Nullpunkte und Pole bis auf einen constanten Factor bestimmt ist (cf. pg. 201), so ergiebt sich:

$$\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{cn}(w + w_1) - \operatorname{cn} w_1 = C \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w + w_1).$$

Zur Bestimmung des von w unabhängigen Factors C entwickeln wir rechts und links nach Potenzen von w. Links lautet das Anfangsglied $\frac{d \operatorname{cn} w_1}{d w_1} \cdot w = - \operatorname{sn} w_1 \operatorname{dn} w_1 \cdot w$, rechts aber $C \operatorname{sn} w_1 \cdot w$, so dass der Vergleich beider Anfangsglieder auf $C = - \operatorname{dn} w_1$ führt:

(2) $$\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{cn}(w + w_1) = \operatorname{cn} w_1 - \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w + w_1) \cdot \operatorname{dn} w_1.$$

Setzt man hier $\operatorname{cn}(w + w_1) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}(w + w_1)^2}$, so liegt eine quadratische Gleichung für $\operatorname{sn}(w + w_1)$ vor, deren Auflösung:

$$\operatorname{sn}(w + w_1) = \frac{\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w_1 \cdot \operatorname{dn} w_1 \pm \operatorname{sn} w_1 \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn} w^2 \cdot \operatorname{sn} w_1{}^2}$$

ergiebt. Hier kann rechter Hand nur das obere Zeichen gelten, da die

Gleichung in w und w_1 symmetrisch sein muss. *Das Additionstheorem der Function* sn *ist hiernach gegeben durch:*

(3) $$\operatorname{sn}(w + w_1) = \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1 + \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn} w^2 \operatorname{sn} w_1{}^2}.$$

Setzt man diesen Wert $\operatorname{sn}(w + w_1)$ auf der rechten Seite von (2) ein, so gewinnt man nach kurzer Zwischenrechnung als *Additionstheorem der Function* cn:

(4) $$\operatorname{cn}(w + w_1) = \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{cn} w_1 - \operatorname{sn} w \operatorname{dn} w \operatorname{sn} w_1 \operatorname{dn} w_1}{1 - k^2 \operatorname{sn} w^2 \operatorname{sn} w_1{}^2}.$$

Auf ähnlichem Wege gewinnt man endlich als *Additionstheorem von* dn:

(5) $$\operatorname{dn}(w + w_1) = \frac{\operatorname{dn} w \operatorname{dn} w_1 - k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1}{1 - k^2 \operatorname{sn} w^2 \operatorname{sn} w_1{}^2}.$$

Aufgabe 1. Man bestimme aus den Additionstheoremen die Werte der Functionen sn, cn, dn für $w + K, w + iK', w + K + iK'$ unter Benutzung der in den Figuren 65 ff. pg. 238 angegebenen Werte $\operatorname{sn} K = 1, \cdots$, sowie der Relationen $\operatorname{cn}^2 = 1 - \operatorname{sn}^2$, $\operatorname{dn}^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2$.

Aufgabe 2. Es sollen $\operatorname{sn} 2w$, $\operatorname{cn} 2w$, $\operatorname{dn} 2w$ in $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ ausgedrückt werden.

Aufgabe 3. Man entwickele aus den Additionstheoremen Ausdrücke für $\operatorname{sn}(w + w_1) + \operatorname{sn}(w - w_1)$, $\operatorname{cn}(w + w_1) + \operatorname{cn}(w - w_1)$, $\operatorname{dn}(w + w_1) + \operatorname{dn}(w - w_1)$; desgl. für $\operatorname{sn}(w + w_1) \cdot \operatorname{sn}(w - w_1)$, $\operatorname{cn}(w + w_1) \cdot \operatorname{cn}(w - w_1)$, $\operatorname{dn}(w + w_1) \cdot \operatorname{dn}(w - w_1)$.

§ 20. Integral zweiter Gattung und Legendre'sche Relation.

Die Theorie der Integrale der drei Gattungen kann man auf der zu $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ gehörenden Riemann'schen Fläche gerade so gut durchführen, wie auf der oben (pg. 220) zu Grunde gelegten Fläche von $\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$. Wir betrachten hier indessen mit Rücksicht auf spätere Anwendungen nur ein einzelnes *Integral zweiter Gattung,* welches durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, *an den beiden bei $z = \infty$ über einander liegenden Punkten je einfache Pole zu besitzen.* Ein solches Integral wird uns nach den Ansätzen von pg. 221 durch

(1) $$\zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) = -\int \wp\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) du$$

geliefert.

Um dieses Integral durch die Jacobi'schen Functionen auszudrücken, leiten wir aus dem Additionstheorem der $\wp$-Function (cf. pg. 223) ab:

$$\wp\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{\wp'(u)^2}{4(\wp(u) - e_1)^2} - \wp(u) - e_1,$$

eine Gleichung, die mit Rücksicht auf (2) pg. 206 liefert:

$$\wp\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=\frac{(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3)}{\wp(u)-e_1}-\wp(u)-e_1,$$

$$\wp\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=\frac{e_1\wp(u)+e_1^{\,2}+e_2e_3}{\wp(u)-e_1},$$

$$\wp\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(u)-e_1}.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit $-\sqrt{e_2-e_1}\,du$ und integriert, so folgt mit Benutzung von (6) pg. 236 und (11) pg. 237:

$$(2)\qquad \sqrt{e_2-e_1}\,\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=-e_1w+(e_1-e_3)\int \mathrm{sn}\,w^2dw.$$

Als algebraische Gestalt des rechts im zweiten Gliede auftretenden Integrals zweiter Gattung merken wir an:

$$(3)\qquad \int \mathrm{sn}\,w^2dw=\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Man wolle jetzt mit Benutzung der aus (7) pg. 235 für k^2 entspringenden Formel die Gleichung (2) noch in die beiden Gestalten umrechnen:

$$(4)\qquad \sqrt{e_2-e_1}\,\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=-e_1w-(e_2-e_1)\int(1-\mathrm{dn}\,w^2)\,dw,$$

$$(5)\qquad \sqrt{e_2-e_1}\,\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=-e_2w+(e_2-e_1)\int(1-k^2\mathrm{sn}\,w^2)\,dw.$$

Zur entsprechenden Umrechnung der Perioden η_1, η_2 führe man die erste dieser beiden Integralformeln zwischen den beiden Grenzen $w=K+iK'$ und $w=K$ aus, wobei $\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)$ um $\frac{1}{2}\eta_1$, w um iK' abnimmt:

$$-\frac{1}{2}\eta_1\sqrt{e_2-e_1}=e_1iK'-(e_2-e_1)\int\limits_{w=K+iK'}^{w=K}(1-\mathrm{dn}\,w^2)\,dw.$$

Um das rechts stehende Integral in algebraische Gestalt umzusetzen, schreiben wir vorübergehend:

$$\mathrm{dn}\,w=k'z,\qquad k'dz=-k^2\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,dw.$$

Nach den zwischen sn, cn, dn bestehenden Relationen gilt aber:

$$k\,\mathrm{sn}\,w=\sqrt{1-k'^2z^2}\qquad k\,\mathrm{cn}\,w=-ik'\sqrt{1-z^2},$$

wo zufolge der Werteverteilung unserer Functionen (cf. Figur 65 ff. pg. 238) an der unteren Grenze $w=K+iK'$ die Wurzeln $\sqrt{1-k'^2z^2}$, $\sqrt{1-z^2}$ übereinstimmend gleich $+1$ und $z=0$ werden, während für

$w = K$ der Wert $z = 1$ zutrifft. Man findet auf diese Weise:

$$(6) \qquad -\frac{1}{2}\eta_1\sqrt{e_2 - e_1} = e_1 iK' + i(e_2 - e_1)\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2z^2}{1 - z^2}}\,dz.$$

Beziehen wir andererseits die Integralformel (5) auf die Grenzen $w = 0$ und $w = K$, so folgt:

$$\frac{1}{2}\eta_2\sqrt{e_2 - e_1} = -e_2 K + (e_2 - e_1)\int_{w=0}^{w=K}(1 - k^2 \operatorname{sn} w^2)\,dw.$$

Für dieses Integral kehren wir zur Schreibweise $\operatorname{cn} w = z$ zurück, welche liefert:

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\eta_2\sqrt{e_2 - e_1} = -e_2 K + (e_2 - e_1)\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\,dz,$$

wo hier wie in (6) an der unteren Integralgrenze die Wurzel $= +1$ genommen werden muss.

Benutzen wir für die in (6) und (7) vorkommenden Integrale die Abkürzungen:

$$(8) \qquad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\,dz, \quad E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2z^2}{1 - z^2}}\,dz,$$

so entspringen folgende Darstellungen für die Perioden η_1, η_2:

$$(9) \qquad \begin{cases} \eta_1\sqrt{e_2 - e_1} = -2e_1 iK' - 2(e_2 - e_1)iE', \\ \eta_2\sqrt{e_2 - e_1} = -2e_2 K \quad + 2(e_2 - e_1)E. \end{cases}$$

Nun hat man $\omega_1\sqrt{e_2 - e_1} = 2iK'$, $\omega_2\sqrt{e_2 - e_1} = 2K$. Die pg. 199 bewiesene Relation $\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2i\pi$ gewinnt jetzt die Gestalt:

$$(10) \qquad KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Dies ist die ursprüngliche von Legendre angegebene Relation zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung.

§ 21. Specialfälle und Ausartungen.

Für die Anwendungen ist der schon öfter betrachtete Specialfall, dass *die vier Verzweigungspunkte auf einem Kreise* liegen, besonders wichtig. Die voraufgehenden Entwicklungen bieten uns in diesem Falle zwei verschiedene Ansätze, je nachdem wir die „lineare“ Trans-

formation auf die Weierstrass'sche Normalform oder diejenige auf die Legendre-Jacobi'sche bevorzugen. Wir behandeln diese beiden Möglichkeiten nach einander.

I. Bei *Benutzung der Weierstrass'schen Theorie* hatten wir den Verzweigungspunkten e_k die in Figur 61 pg. 216 charakterisierte Lage auf der reellen Axe gegeben, so dass die cubische Gleichung:

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0 \tag{1}$$

reelle Coefficienten und *drei reelle Wurzeln* hat, die wir in der Anordnung $e_1 < e_3 < e_2$ durch e_k bezeichnen. Das Periodenverhältnis ω wird zufolge Figur 62 pg. 217 *rein imaginär*, so dass q mit einem *reellen positiven* echten Bruche gleich ausfällt. Da ω_2 für sich genommen reell, ω_1 aber rein imaginär ist, so liefert (16) pg. 185 für η_2 einen reellen Wert, während η_1 zufolge:

$$\eta_1 = \frac{\omega_1 \eta_2 - 2i\pi}{\omega_2} \tag{2}$$

rein imaginär wird.

Es gehen hieraus mit Rücksicht auf die Darstellungen von $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ einige *Realitätssätze* hervor. Für $\wp(u)$, und damit auch für $\wp'(u)$, haben wir diese Sätze bereits bei Ableitung der Figur 62 pg. 217 ausführlich studiert: *Die Seiten der Rechteckteilung der u-Ebene und die Mittellinien dieser Rechtecke sind die Abbilder der reellen $\wp$-Axe, wobei die in den Ecken stattfindenden Werte ∞, e_1, e_2, e_3 in Figur 62 aufgetragen sind.*

Die Wurzel $\sqrt{e_2 - e_1}$ ist im vorliegenden Falle *reell* und zufolge (3) pg. 235 mit *positivem* Zeichen zu versehen. Die Rechteckteilung der w-Ebene entsteht somit durch die „Ähnlichkeitstransformation" $w = u\sqrt{e_2 - e_1}$ aus derjenigen der u-Ebene. Dies stimmt damit überein, *dass k^2 zufolge* (7) *pg.* 235 *gleich einem positiven echten Bruche wird, was demnach auch von $k'^2 = 1 - k^2$ gilt.* In der That liefern demgemäss die Jacobi'schen Formeln (11) und (12) pg. 248 u. f. reelle positive Werte K, K'. *Übrigens zeigen diese Formeln, dass $K < K'$, $K = K'$, $K > K'$ ist, je nachdem $k^2 < \frac{1}{2}$, $k^2 = \frac{1}{2}$, $k^2 > \frac{1}{2}$ ist.* Im Übergangsfall $k^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$ haben wir $e_3 = 0$ und demnach $g_3 = 0$; die Parallelogramme sind alsdann *Quadrate.*

Die Figuren 65 ff. pg. 238 liefern uns weiter eine Reihe von Realitätstheoremen für die Functionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$. Beispielsweise finden wir, *dass* $\operatorname{sn} w$ *auf der reellen Axe (und den mit ihr homologen Linien der Rechteckteilung) zwischen* -1 *und* $+1$ *hin und her schwankt,*

während die imaginäre w-Axe bereits zwischen $-iK'$ und $+iK'$ ein vollständiges Bild der imaginären sn-*Axe liefert.* Der Rand des der Fig. 69 correspondierenden Rechtecks liefert im Verein mit der von $-K$ nach $+K$ ziehenden Mittellinie alle reellen sn, wobei die reellen Werte mit $|\text{sn}| > 1$ jeweils in zwei correspondierenden Randpunkten auftreten.

Sehr bemerkenswert ist die hier gleich zu besprechende *Ausartung,* welche durch *Zusammenfall der beiden Verzweigungspunkte* e_1, e_3 entsteht. Hierbei verlieren die beiden Stellen e_1, e_3 ihren Charakter als Verzweigungspunkte, und es restiert eine zweiblättrige Fläche mit nur zwei Verzweigungspunkten, deren Functionen einen weit elementareren Charakter haben. *In der That arten die doppeltperiodischen Functionen jetzt in trigonometrische aus.*

Es gilt nämlich jetzt zufolge (7) pg. 235 speciell $k^2 = 0$, so dass nach den Formeln (11) pg. 248 die Werte $K = \frac{\pi}{2}$, $K' = \infty$ zutreffen. Der Quotient ω der Perioden ist als positiv imaginäre Grösse über alle Grenzen gewachsen, und man hat $q = 0$. Dies Wachstum hat sich in der Weise vollzogen, dass ω_2 endlich geblieben ist und ω_1 unendlich gross geworden ist. Nach (16) pg. 185 und der Legendre'schen Relation hat man:

$$\eta_2 = \frac{\pi^2}{3\,\omega_2}, \quad \eta_1 = \infty. \tag{3}$$

Die Formeln (2) pg. 194 und (3) ff. pg. 196 liefern wegen $q = 0$:

$$\begin{gathered} \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\,\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2}, \quad \zeta(u) = \frac{\eta_2 u}{\omega_2} + \frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2}, \\ \wp(u) = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot \left(\sin\frac{\pi u}{\omega_2}\right)^{-2}, \end{gathered} \tag{4}$$

so dass in diesem Falle aus den doppeltperiodischen Functionen in der That trigonometrische werden.

Einen noch unmittelbareren Anschluss gewähren die Jacobi'schen Functionen. Die Formel (10) pg. 248 liefert nämlich für $k^2 = 0$ offenbar $w = \varphi = \text{am}\, w$, so dass die Functionen $\text{sn}\, w$, $\text{cn}\, w$ die trigonometrischen Functionen $\sin w$, $\cos w$ liefern (cf. pg. 237), während $\text{dn}\, w$ constant gleich 1 wird. Das der Figur 69 pg. 240 entsprechend gebildete Rechteck der Ecken $\pm K \pm iK'$, welches ein Abbild der Ebene von $z = \text{sn}\, w$ liefert, artet für $K = \frac{\pi}{2}$, $\lim. K' = \infty$ in der That in den durch Figur 78 pg. 247 gegebenen Streifen aus, welcher ein Abbild der Ebene $z = \sin w$ ist. Die Additionsformeln der Jacobi'schen Functionen (pg. 250) und die Formeln über Verhalten von sn, cn bei Ver-

mehrung von w um $2K$ bez. um K gehen im gedachten Specialfall in lauter wohlbekannte Elementarformeln der Trigonometrie über.

II. Bei *Voranstellung der Jacobi'schen Functionen* wollen wir die vier auf einem Kreise gelegenen Verzweigungspunkte durch lineare Transformation von z jetzt so verschieben, dass sie auf dem Kreise mit dem Radius 1 um $z = 0$ die Stellen ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ gewinnen. Es soll sich also um *einen durch* $|k| = 1$ *anzudeutenden Grenzfall der allgemeinen pg.* 243 u. f. *besprochenen Transformation* handeln, während die ebenda pg. 245 eingeführte specielle Transformation mit einem reellen zwischen 0 und 1 gelegenen k auf die soeben unter I gewonnenen Ergebnisse zurückführen würde.

Wegen $|k| = 1$ sind jetzt $(e_3 - e_1)$ und $(e_2 - e_1)$ complexe Zahlen gleicher absoluter Beträge (cf. (7) pg. 235). Drehen wir also die u-Ebene um ihren Nullpunkt derart (cf. pg. 209), dass e_1 reell und > 0 wird, so werden e_2 und e_3 wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ conjugiert complex. Die Gleichung (1) hat demnach auch jetzt *reelle Coefficienten, aber nur eine reelle Wurzel.* Untersucht man in diesem Falle die pg. 211 ff. betrachtete Abbildung der in Figur 56 daselbst längs S_1, S_2, S_3 zerschnittenen z-Ebene auf das Dreieck der Figur 60, so wird sich die reelle z-Axe, und zwar sowohl rechts, wie links vom Nullpunkte *geradlinig* auf die u-Ebene abbilden. Dabei liefert der zwischen e_1 und $-\infty$ verlaufende Teil die von $\frac{1}{2}\omega_1$ bis ω_2 verlaufende Höhe des Dreiecks, die zur imaginären u-Axe parallel geht; die beiden Ufer von S_1 aber bilden sich auf die beiden Hälften der Basis des Dreiecks ab. Wir entschliessen uns hier, das Dreieck längs der von 0 nach ω_1 ziehenden Seite zum Parallelogramm zu ergänzen, was darauf hinauskommt, dass wir $\omega_1 - \omega_2$ und ω_2 als Perioden brauchen wollen (vergl. hierzu § 22). Dann gilt nämlich der einfache Satz: *Das Periodenparallelogramm ist ein Rhombus, dessen Diagonalen der reellen bez. der imaginären u-Axe parallel laufen.*

Unter den rhombischen Periodenparallelogrammen sind nun zwei besonders ausgezeichnete Specialfälle enthalten. Man nehme erstlich $k^2 = -1$, so dass die Verzweigungspunkte bei ± 1, $\pm i$ gelegen sind. Aus (7) pg. 235 folgt dann $e_3 - e_1 = e_1 - e_2$, so dass $e_1 = 0$ wird und e_2, e_3 conjugiert und rein imaginär ausfallen. *Das Periodenparallelogramm der u-Ebene ist ein Quadrat, dessen Diagonalen den Axen parallel sind; in der w-Ebene gewinnen wir ein quadratisches Netz, dessen Seiten den Axen parallel laufen.* Das Integral erster Gattung nimmt die Gestalt:

(5) $$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

an, welche mit der Lemniscate in einem nahen Zusammenhange steht. Die elliptischen Functionen liefern hier die sogen. „*Lemniscatenfunctionen*“, welche Gauss zum Ausgangspunkte eines Teiles seiner Untersuchungen zur Theorie der elliptischen Functionen machte (cf. pg. 173).

Der zweite Specialfall tritt für $e_2 = e_1\varrho$, $e_3 = e_1\varrho^2$ ein, unter ϱ die complexe dritte Einheitswurzel $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ verstanden. Die Punkte e_k liefern in der z-Ebene die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, so dass die in Figur 56 gezeichnete z-Ebene bei Drehung um $z = 0$ durch den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ in sich selbst übergeht. Dieser Drehung entspricht nach pg. 209 eine Drehung der u-Ebene um $z = 0$ durch den Winkel $-\frac{\pi}{3}$. Da somit bei dieser Drehung das rhombische Netz in sich übergehen muss, so ist (cf. Figur 60 pg. 215) $|\omega_1| = |\omega_2|$. *Im vorliegenden Falle setzt sich das rhombische Periodenparallelogramm aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammen.* Das Integral erster Gattung nimmt in Weierstrass' Normalform die Gestalt an:

(6) $$u = \int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}}.$$

Auch über diesen Fall hat Gauss eine freilich nur ganz kurze Untersuchung angestellt.

§ 22. Lineare Transformation der Perioden.

Indem wir unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *vier ganze Zahlen* verstehen, bilden wir aus den bisherigen Perioden ω_1, ω_2 die beiden Grössen:

(1) $$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

welche wir als die *transformierten Perioden* bezeichnen wollen. Es ist zwar nicht notwendig, aber zweckmässig, die Auswahl der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ derart zu beschränken, dass der Quotient $\omega' = \omega_1' : \omega_2'$, wie wir dies ja auch von ω stets voraussetzten, einen *positiven* imaginären Bestandteil aufweist. Schreiben wir die complexe Grösse $\omega = \xi + i\eta$, so ist:

$$\omega' = \frac{[\alpha\gamma(\xi^2+\eta^2) + (\alpha\delta+\beta\gamma)\xi + \beta\delta] + i(\alpha\delta-\beta\gamma)\eta}{(\gamma\xi+\delta)^2+\gamma^2\eta^2}.$$

Unsere Forderung wird erfüllt sein, *wenn die ganze Zahl $n = \alpha\delta - \beta\gamma > 0$ ist,* was hinfort gelten soll. Nach der so definierten Zahl n sagt man,

dass die Grössen ω_1', ω_2' *durch „Transformation* n^{ten} *Grades" der Perioden* ω_1, ω_2 *entstehen*, obschon die ω_1', ω_2' Functionen ersten Grades von ω_1, ω_2 sind. Die Bezeichnung *„lineare Transformation der Perioden"* bezieht sich hiernach allein auf den Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Da α, β, γ, δ *ganze* Zahlen sind, so wird eine beliebige doppeltperiodische Function $f(u; \omega_1, \omega_2)$ bei Vermehrung von u um ω_1' oder ω_2' unverändert bleiben; $f(u; \omega_1, \omega_2)$ erweist sich als eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1', ω_2'. *Nach einem pg.* 220 *aufgestellten Theoreme ist demnach* $f(u; \omega_1, \omega_2)$ *rational darstellbar in den beiden Functionen* $\wp(u; \omega_1', \omega_2')$, $\wp'(u; \omega_1', \omega_2')$:

$$(2) \qquad f(u; \omega_2, \omega_2) = R[\wp(u; \omega_1', \omega_2'), \wp'(u; \omega_1', \omega_2')].$$

Diese Formel drückt eine der wichtigsten Grundthatsachen der *„Transformationstheorie der elliptischen Functionen"* aus, welche letztere das Studium von algebraischen Relationen der Art (2) zu ihrem Hauptgegenstande hat.

Zeichnet man das zu den transformierten Perioden ω_1', ω_2' gehörende Parallelogrammnetz der u-Ebene, indem man den Nullpunkt als ersten Gitterpunkt benutzt, so sind die Gitterpunkte allgemein gegeben durch:

$$m_1\omega_1' + m_2\omega_2' = (m_1\alpha + m_2\gamma)\omega_1 + (m_1\beta + m_2\delta)\omega_2.$$

Aus der Ganzzahligkeit der α, β, γ, δ ergiebt sich: *Die Gitterpunkte des zu den transformierten Perioden* ω_1', ω_2' *gehörenden Netzes sind sämtlich unter den Gitterpunkten des ursprünglichen Netzes enthalten.*

Besonders interessant gestalten sich diese Verhältnisse für die *lineare* Transformation. Aus (1) folgt zunächst allgemein:

$$(3) \qquad \omega_1 = \frac{\delta\omega_1' - \beta\omega_2'}{n}, \qquad \omega_2 = \frac{-\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'}{n}.$$

Wir erkennen: *Ist* $n = 1$, *so entstehen die ursprünglichen Perioden* ω_1, ω_2 *aus* ω_1', ω_2' *wiederum durch lineare Transformation; beide Paare* ω_1, ω_2 *und* ω_1', ω_2' *heissen in diesem Falle „aequivalent".* Der vorhin ausgesprochene Satz über die Gitterpunkte aber ergiebt: *Zu aequivalenten Periodenpaaren gehören Parallelogrammnetze, welche die Gitterpunkte gemeinschaftlich haben.* Figur 79 pg. 258 erläutert dies Theorem für den Fall:

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \qquad \omega_2' = \omega_1 + 2\omega_2.$$

Der Deutlichkeit halber sind hier die Parallelogramme des ursprünglichen Netzes alternierend schraffiert, während die Seiten des neuen Parallelogrammnetzes stärker markiert sind. Es ist eine interessante, aber hier nicht weiter in Betracht kommende Entwicklung aus der Trans-

formationstheorie, die Gesamtheit aller linearen Transformationen, d. i. die Gesamtheit aller zum gleichen System der Gitterpunkte gehörenden Parallelogrammnetze näher zu erforschen.

Man kann das gewonnene Resultat auch dahin aussprechen, dass für zwei äquivalente Paare ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' die vermittelst aller

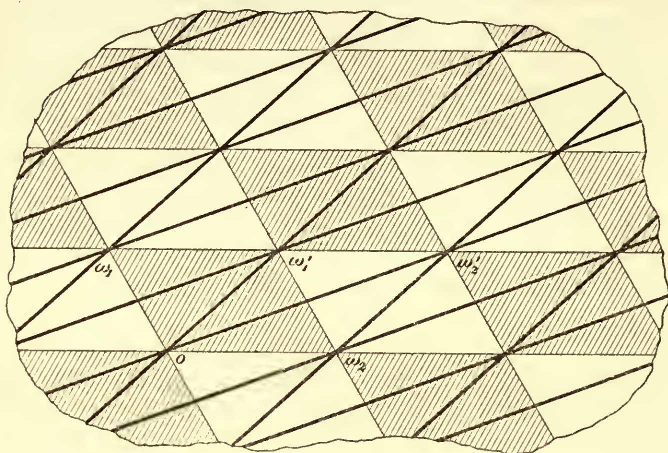


Fig. 79.

Paare ganzer Zahlen m_1, m_2 zu bildenden ∞^2 Grössen $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ von der Reihenfolge abgesehen mit den Grössen $(m_1\omega_1' + m_2\omega_2')$ übereinstimmen. Aus diesem Umstande entspringt eine höchst wertvolle Folgerung für die Wirkung der linearen Transformation auf die Functionen $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$. So finden wir z. B., dass die Glieder der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (cf. pg. 190):

$$\wp'(u;\,\omega_1',\,\omega_2') = -2\sum_{m_1,\,m_2}(u - m_1\omega_1' - m_2\omega_2')^{-3}$$

mit denjenigen von:

$$\wp'(u;\,\omega_1,\,\omega_2) = -2\sum_{m_1,\,m_2}(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^{-3}$$

abgesehen von der Anordnung übereinstimmen. Aber diese Reihe ist unbedingt convergent, und also ist $\wp'(u;\,\omega_1',\,\omega_2') = \wp'(u;\,\omega_1,\,\omega_2)$. Auch die entsprechend gebildeten Partialbruchreihen für $\wp(u)$ und $\zeta(u)$, sowie das Product (1) pg. 186 der σ-Function sind unbedingt convergent. Auch die Doppelreihen:

$$g_2 = 60\sum_{m_1,\,m_2}{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-4}, \quad g_3 = 140\sum_{m_1,\,m_2}{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-6}$$

besitzen die gleiche Eigenschaft der unbedingten Convergenz. So gewinnt man das Fundamentaltheorem: *Die Grössen der Weierstrass'schen Theorie g_2, g_3, σ, ζ, $\wp$, $\wp'$ besitzen die Eigenschaft, unverändert ihre Werte zu bewahren, falls man das Periodenpaar ω_1, ω_2 durch irgend ein äquivalentes Paar ω_1', ω_2' ersetzt:*

$$(4)\qquad \begin{aligned} g_2(\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) &= g_2(\omega_1,\ \omega_2),\\ g_3(\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) &= g_3(\omega_1,\ \omega_2),\end{aligned}$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma(u;\ \alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) &= \sigma(u;\ \omega_1,\ \omega_2),\\ \zeta(u;\ \alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) &= \zeta(u;\ \omega_1,\ \omega_2),\\ \wp(u;\ \alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) &= \wp(u;\ \omega_1,\ \omega_2),\\ \wp'(u;\ \alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2) &= \wp'(u;\ \omega_1,\ \omega_2),\end{aligned}\right.$$

wobei α, β, γ, δ irgend vier der Bedingung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ genügende ganze Zahlen sind. Hierin besteht der auszeichnende Charakter der Weierstrass'schen Functionen im Gegensatz zu denjenigen der Jacobi'schen Theorie, welche gegenüber der linearen Transformation ein complicierteres Verhalten darbieten werden. Übrigens ist es allgemein der Gegenstand der Theorie der elliptischen Modulfunctionen (cf. pg. 175), das Verhalten unserer Functionen bei linearer Transformation, sowie überhaupt deren Abhängigkeit von ω_1, ω_2 näher zu erforschen.

Die Reihen (17) und (15) pg. 185 für η_1 und η_2 waren nur bedingt convergent. Fassen wir auf Grund dieser Reihen η_1 und η_2 als Functionen von ω_1, ω_2 auf, so werden wir zu erwarten haben, dass sich η_1, η_2 bei linearer Transformation von ω_1, ω_2 ändern. Welcher Art diese Veränderung ist, bestimmen wir aus den Gleichungen (11) pg. 189. Entsprechen dem äquivalenten Paare ω_1', ω_2' die Grössen η_1', η_2', so gilt:

$$\eta_1' = \zeta(u+\omega_1';\ \omega_1',\ \omega_2') - \zeta(u;\ \omega_1',\ \omega_2').$$

Die zweite der eben aufgestellten Gleichungen (5) liefert somit:

$$\eta_1' = \zeta(u+\alpha\omega_1+\beta\omega_2;\ \omega_1,\ \omega_2) - \zeta(u;\ \omega_1,\ \omega_2).$$

Für die rechte Seite dieser Gleichung findet man aber durch Wiederholung und Combination der genannten Gleichungen (11) pg. 189 den Wert $(\alpha\eta_1+\beta\eta_2)$. Auf demselben Wege findet man η_2' mit $\gamma\eta_1+\delta\eta_2$ identisch. *Die Grössen η_1, η_2, aufgefasst als Functionen von ω_1, ω_2, erfahren bei Ersatz von ω_1, ω_2 durch $\omega_1'=\alpha\omega_1+\beta\omega_2$, $\omega_2'=\gamma\omega_1+\delta\omega_2$ die gleiche Transformation:*

$$(6)\qquad \eta_1'=\alpha\eta_1+\beta\eta_2,\qquad \eta_2'=\gamma\eta_1+\delta\eta_2.$$

Mit Rücksicht auf $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ folgert man $\omega_1'\eta_2'-\omega_2'\eta_1'=\omega_1\eta_2-\omega_2\eta_1$;

der gemeinsame Wert beider Seiten dieser Gleichung ist nach (1) pg. 199 gleich $2i\pi$. —

Um jetzt das Verhalten der Jacobi'schen Functionen bei linearer Transformation nur noch kurz zu berühren, knüpfen wir an die Formeln an:

$$(7) \qquad e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right),$$

welche uns die Grössen e_k als Functionen von ω_1, ω_2 definieren. Gehören zu ω_1', ω_2' die Grössen e_k', so ist:

$$(8) \qquad \begin{gathered} e_1' = \wp\left(\frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{2}\right), \quad e_2' = \wp\left(\frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{2}\right), \\ e_3' = \wp\left(\frac{(\alpha+\gamma)\omega_1 + (\beta+\delta)\omega_2}{2}\right). \end{gathered}$$

Die Discussion dieser Gleichungen nötigt uns, Fallunterscheidungen eintreten zu lassen, je nachdem die Zahlen α, β, γ, δ gerade oder ungerade sind. Wir entlehnen hierbei der Zahlentheorie folgende Terminologie: Ist m eine festgewählte ganze positive Zahl und a eine beliebige ganze Zahl, so giebt es in der Reihe der ganzen Zahlen $0, 1, 2, \cdots, m-1$ eine und nur eine Zahl r, für welche $(a - r)$ durch m teilbar ausfällt. Man sagt alsdann, es sei *a nach dem „Modulus" m mit r „congruent"* und bezeichnet dies symbolisch durch die *„Congruenz"* $a \equiv r$ (modulo m) oder kurz $a \equiv r$ (mod. m). Wegen der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ können nun die vier Zahlen α, β, γ, δ modulo 2 nicht zugleich mit 0, sowie auch nicht zugleich mit 1 congruent sein. Man findet vielmehr, dass bezüglich des Modulus 2 im ganzen nur folgende sechs Fälle eintreten können:

$$\begin{array}{rllll} \text{I.} & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 0, & \gamma \equiv 0, & \delta \equiv 1, \\ \text{II.} & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 0, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 1, \\ \text{III.} & \alpha \equiv 0, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 0, \\ \text{IV.} & \alpha \equiv 0, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 1, \\ \text{V.} & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 0, \\ \text{VI.} & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 0, & \delta \equiv 1. \end{array}$$

In jedem Falle ist nun das Verhalten der e_k leicht zu bestimmen. Haben wir z. B. den dritten Fall, so können wir schreiben $\alpha = 2\mu$, $\beta = 2\nu + 1$; die erste Formel (8) liefert also:

$$e_1' = \wp\left(\frac{2\mu\omega_1 + (2\nu+1)\omega_2}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_2}{2} + \mu\omega_1 + \nu\omega_2\right) = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

so dass wir $e_1' = e_2$ finden. Überhaupt aber gewinnen wir den Satz:

Die durch (7) *als eindeutige Functionen von* ω_1, ω_2 *dargestellten Grössen* e_k *gehen bei linearer Transformation der Perioden* ω_1, ω_2, *je nach dem vorliegenden Falle* I, II, $\cdots$, *in folgende* e_k' *über:*

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & e_1' = e_1, & e_2' = e_2, & e_3' = e_3, \\ \text{II.} & e_1' = e_1, & e_2' = e_3, & e_3' = e_2, \\ \text{III.} & e_1' = e_2, & e_2' = e_1, & e_3' = e_3, \\ \text{IV.} & e_1' = e_2, & e_2' = e_3, & e_3' = e_1, \\ \text{V.} & e_1' = e_3, & e_2' = e_1, & e_3' = e_2, \\ \text{VI.} & e_1' = e_3, & e_2' = e_2, & e_3' = e_1. \end{array}$$

Es finden somit den sechs Fällen I, II, $\cdots$ entsprechend *die sechs möglichen Permutationen der drei Grössen* e_1, e_2, e_3 statt.

Der Quotient k^2 von $(e_3 - e_1)$ und $(e_2 - e_1)$ wird bereits aus Formel (9) pg. 235 als *eindeutige Function des Periodenquotienten* ω erkannt. Gegenwärtig finden wir, *dass* k^2 *bei allen linearen Transformationen des Falles* I *unverändert bleibt, sowie dass überhaupt* k^2 *entsprechend den sechs modulo* 2 *incongruenten Fällen* I, II, $\cdots$ *der linearen Transformation übergeht in:*

$$(9) \qquad k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad 1 - k^2, \quad \frac{1}{1 - k^2}, \quad 1 - \frac{1}{k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

Auch die Untersuchung des Verhaltens der Jacobi'schen Functionen gegenüber linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2 bez. K, iK' wird die Unterscheidung der sechs Fälle nötig machen. Wir behandeln als Beispiel etwa den Fall IV und schreiben, um die Abhängigkeit unserer Functionen von den Perioden hervorzuheben, im Anschluss an die Darstellungen (15) pg. 239 ausführlicher $\operatorname{sn}(w, k)$, $\operatorname{cn}(w, k)$, $\operatorname{dn}(w, k)$. Üben wir nun eine Transformation des Falles IV aus, so geht $\operatorname{sn}(w, k)$ über in:

$$\operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_2' - e_1'}, \quad \sqrt{\frac{e_3' - e_1'}{e_2' - e_1'}}\right) = \frac{\sqrt{e_2' - e_1'}}{\sqrt{\wp(u) - e_1'}}.$$

Tragen wir hier die vorhin angegebene Bedeutung der e_k' ein, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$(10) \quad \operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_3 - e_2}, \quad \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_3 - e_2}}\right) = \operatorname{sn}\left(\pm\, ik'w, \ \frac{1}{k'}\right) = \pm \frac{\sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{\wp(u) - e_2}}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass zufolge (9) der transformierte Wert von k zunächst gleich $\pm \frac{1}{k'}$ zu setzen ist. Wenn wir in (10) das obere Zeichen benutzten, so ist dies deshalb erlaubt, weil ein Vorzeichenwechsel

des zweiten Argumentes in $\operatorname{sn}(w, k)$ nach (15) pg. 239 ohne Folge für den Wert dieser Function ist. Da weiter ein Zeichenwechsel des ersten Argumentes einen Zeichenwechsel der Function nach sich zieht, so liefert (10):

$$\operatorname{sn}\left(ik'w, \frac{1}{k'}\right) = \pm \frac{\sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{\wp(u) - e_2}} \tag{11}$$

als eine für das eine der beiden Zeichen richtige Formel. Man kann der letzteren sofort auch die Gestalt verleihen:

$$\operatorname{sn}\left(ik'w, \frac{1}{k'}\right) = \pm \sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_2 - e_1}} \cdot \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}} \cdot \sqrt{\frac{\wp(u) - e_1}{\wp(u) - e_2}},$$

welche mit Rücksicht auf (11) pg. 237 übergeht in:

$$\operatorname{sn}\left(ik'w, \frac{1}{k'}\right) = \pm ik' \frac{\operatorname{sn}(w, k)}{\operatorname{cn}(w, k)}.$$

Nehmen wir hier w unendlich klein, so erweist sich das obere Zeichen als das allein gültige. Weit schneller bestimmt man die entsprechenden Formeln für cn und dn; insgesamt findet sich:

$$\begin{gathered}\operatorname{sn}\left(ik'w, \frac{1}{k'}\right) = ik' \frac{\operatorname{sn}(w, k)}{\operatorname{cn}(w, k)}, \\ \operatorname{cn}\left(ik'w, \frac{1}{k'}\right) = \frac{\operatorname{dn}(w, k)}{\operatorname{cn}(w, k)}, \quad \operatorname{dn}\left(ik'w, \frac{1}{k'}\right) = \frac{1}{\operatorname{cn}(w, k)}.\end{gathered} \tag{12}$$

Aufgabe 1. Man leite aus der Formel (11) pg. 229 für Δ, der Formel (16) pg. 185 für η_2 mit Benutzung der Legendre'schen Relation und auf Grund der Convergenzbetrachtungen von pg. 124 und 184 die nachfolgenden Gleichungen für η_1, η_2 ab:

$$\eta_1 = \frac{\pi i}{6} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}, \quad \eta_2 = -\frac{\pi i}{6} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}$$

und bestätige von hieraus die Formeln (6) über das Verhalten von η_1, η_2 bei linearer Transformation von ω_1, ω_2.

Aufgabe 2. Man stelle die den Gleichungen (12) entsprechenden weiteren fünf Gleichungssysteme über das Verhalten der Jacobi'schen Functionen bei linearer Transformation der Perioden auf.

§ 23. Landen'sche Transformation.

Unter den nicht-linearen Transformationen behandeln wir mit Rücksicht auf die vorliegenden Zwecke nur einen zum zweiten Grade gehörenden Specialfall; wir wollen nämlich unter geringfügiger Abweichung vom pg. 256 u. f. entwickelten Ansatze den Übergang zu den neuen Perioden $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_2' = \frac{\omega_2}{2}$ untersuchen. Man bezeichnet diesen Übergang als die *Landen'sche Transformation*, weil sich deren Hauptformeln in der That bereits bei *Landen* entwickelt finden*).

*) In den Philosoph. Transactions, Bd. 65 (1775).

Die zu den transformierten Perioden gehörende σ-Function $\sigma\left(u;\, \omega_1,\, \frac{\omega_2}{2}\right)$ ist eine ganze transcendente Function mit den Nullpunkten $\left(m_1\omega_1 + \frac{m_2}{2}\omega_2\right)$. Eben dieselben Nullpunkte hat die ganze Function $\sigma(u;\, \omega_1,\, \omega_2)\cdot\sigma_2(u;\, \omega_1,\, \omega_2)$. Gehen wir vermöge (11) und (15) pg. 233 zu den Thetafunctionen über, so erweisen sich $\vartheta_1(2v,\, q^2)$ und $\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)$ als ganze Functionen gleicher Nullpunkte. Unter $\vartheta_k(v)$ ist hier stets $\vartheta_k(v,\, q)$ verstanden, d. h. wir geben ein zweites Argument der Thetafunction nur dann an, wenn dasselbe von q verschieden ist; für die Bezeichnung der Theta-Nullwerte (cf. pg. 234) behalten wir dieselbe Regel bei, so dass $\vartheta_k(0,\, q)$ kurz durch ϑ_k, $\vartheta_k(0,\, q^2)$ aber durch $\vartheta_k(q^2)$ bezeichnet wird.

Zufolge (16) und (17) pg. 234 haben nun beide Functionen $\vartheta_1(2v,\, q^2)$ und $\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)$ die Periode 1 und nehmen bei Vermehrung von v um ω übereinstimmend den Factor $-q^{-2}e^{-4\pi vi}$ an. Der Quotient dieser beiden Functionen hat demnach die Perioden 1 und ω, und da er im zugehörigen Parallelogramm überall endlich ist, so ist er mit einer Constanten identisch:

$$\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v) = C\vartheta_1(2v,\, q^2);$$

doch ist C nur von v unabhängig, kann aber q noch enthalten. Man hat sich bei den hier anzustellenden Rechnungen nur immer zu vergegenwärtigen, dass für die transformierte Thetafunction $v' = 2v$, $\omega' = 2\omega$ und also $q' = q^2$ ist, wobei die pg. 234 aufgestellten Regeln (17) für die Functionen der Argumente v', q' und den Zuwachs ω' natürlich erhalten bleiben.

In der letzten Gleichung wolle man v um $\frac{\omega}{2}$ wachsen lassen und beachte das nach (12) pg. 232 und (17) pg. 234 zu bestimmende Verhalten der ϑ-Functionen. Es folgt:

$$\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v) = C\vartheta_0(2v,\, q^2),$$

wo C dieselbe Bedeutung hat, wie in der voraufgehenden Gleichung. Setzt man speciell $v = 0$, so folgt unter Benutzung der pg. 235 angegebenen Ausdrücke der ϑ-Nullwerte in den Producten P_k (cf. pg. 227), sowie mit Rücksicht auf die pg. 232 bewiesene Relation:

$$P_0(q^2)\,P_1(q^2)^2 = P_0(q)\,P_1(q)\,P_3(q),$$

dass für den von v unabhängigen Wert C die Darstellung gilt:

$$C = \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_0(q^2)} = \frac{[P_0(q)\,P_1(q)\,P_3(q)]^2}{P_0(q^2)\,P_1(q^2)^2} = P_0(q^2)\,P_1(q^2)^2 = \vartheta_0(q^2).$$

Merken wir demnach an:

(1) $$\vartheta_0(q^2)\,\vartheta_0(2v, q^2) = \vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v),$$

(2) $$\vartheta_0(q^2)\,\vartheta_1(2v, q^2) = \vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v).$$

In die erste dieser Gleichungen trage man iq an Stelle von q und also $-q^2$ an Stelle von q^2 ein. Nach (14) pg. 233 und (1) pg. 234 folgt:

$$\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_3(2v, q^2) = \vartheta_0(v, iq)\,\vartheta_3(v, iq).$$

Aber nach eben denselben Gleichungen gilt:

$$\vartheta_3(v, iq) + \vartheta_0(v, iq) = \vartheta_3(v) + \vartheta_0(v),$$
$$\vartheta_3(v, iq) - \vartheta_0(v, iq) = i\vartheta_3(v) - i\vartheta_0(v),$$

woraus man berechnet:

$$2\vartheta_0(v, iq)\,\vartheta_3(v, iq) = \vartheta_3(v)^2 + \vartheta_0(v)^2.$$

Man hat also:

(3) $$2\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_3(2v, q^2) = \vartheta_3(v)^2 + \vartheta_0(v)^2.$$

Vermehrt man hier v um $\frac{\omega}{2}$, so gelangt man zu einer analogen Formel für $\vartheta_2(2v, q^2)$. Zusammenfassend haben wir das Ergebnis: *Die Wirkung der Landen'schen Transformation auf die Functionen $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$ ist in (1) und (2) angegeben; für $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ reihen sich die Gleichungen an:*

(4) $$2\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_2(2v, q^2) = \vartheta_2(v)^2 - \vartheta_1(v)^2,$$

(5) $$2\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_3(2v, q^2) = \vartheta_3(v)^2 + \vartheta_0(v)^2.$$

An Stelle der Grössen w, φ, k, k', K, K' mögen bei den transformierten Perioden $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_2' = \frac{\omega_2}{2}$ treten $w_1, \varphi_1, k_1, k_1', K_1, K_1'$. Es sollen alsdann die Relationen zwischen diesen transformierten Grössen und den ursprünglichen aufgestellt werden.

Indem wir mit dem Modul k beginnen, folgern wir aus (7) pg. 235:

$$\sqrt{k_1} = \frac{\vartheta_2(q^2)}{\vartheta_3(q^2)} = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2} = \frac{k}{1+k'},$$

$$k_1 = \frac{k^2}{(1+k')^2} = \frac{1-k'^2}{(1+k')^2} = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Andererseits folgt für den complementären Modul:

$$k_1' = \left(\frac{\vartheta_0(q^2)}{\vartheta_3(q^2)}\right)^2 = \frac{2\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_0^2 + \vartheta_3^2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Wir merken an: *Definiert man die Wurzeln $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ aus den Integral-*

moduln durch die Gleichungen (7) *pg.* 235 *als eindeutige Functionen von* q, *resp.* ω, *so ist die Wirkung der Landen'schen Transformation auf dieselben ausgedrückt durch:*

$$(6) \qquad k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \qquad k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

Für w gilt nach (7) pg. 237 die Darstellung:

$$w = \frac{u}{\omega_2} \cdot \pi \vartheta_3^2 \quad \text{und also ist} \quad w_1 = \frac{2u}{\omega_2} \cdot \pi \vartheta_3(q^2)^2.$$

Die Benutzung der Formel (5) liefert:

$$w_1 = \frac{\pi u}{\omega_2}\left(\vartheta_0^2 + \vartheta_3^2\right) = w(1+k').$$

Da ω_2 gleich der doppelten transformierten Periode $2\omega_2'$ ist, so entspricht dem Wachstum von w um $2K$ ein solches von w_1 um $4K_1$; man hat somit $2K_1 = K(1+k')$. Hingegen ist $\omega_1 = \omega_1'$, so dass w und w_1 gleichzeitig um $2iK'$ resp. $2iK_1'$ zunehmen. Also folgt der Satz: *Die Landen'sche Transformation bewirkt den Übergang von* w, K, K' *zu* w_1, K_1, K_1', *welche mit jenen drei Grössen vermöge der Relationen zusammenhängen:*

$$(7) \qquad w_1 = w(1+k'), \quad K_1 = K \cdot \frac{1+k'}{2}, \quad K_1' = K'(1+k').$$

Man kann diesen Gleichungen auf Grund der ersten Formel (6) *auch die Gestalt verleihen:*

$$(8) \qquad w = w_1 \cdot \frac{1+k_1}{2}, \quad K = K_1(1+k_1), \quad K' = K_1' \cdot \frac{1+k_1}{2}.$$

Endlich entnehmen wir aus (2) und (3) pg. 236:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(v)} \quad \text{und also} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1'}} \frac{\vartheta_1(2v, q^2)}{\vartheta_2(2v, q^2)}.$$

Mit Benutzung der Relationen (2) und (4) folgt weiter:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{k_1'} \frac{2\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(v)^2 - \vartheta_1(v)^2} = \frac{1}{k_1'} \frac{2\sqrt{k'}\operatorname{tg}\varphi}{1-k'\operatorname{tg}\varphi^2}.$$

Setzt man noch für k_1' seinen in (6) gegebenen Wert ein, so ergiebt sich: *Der bei Landen'scher Transformation aus* φ *entspringende Wert* φ_1 *hängt mit* φ *vermöge der Gleichung:*

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{(1+k')\operatorname{tg}\varphi}{1-k'\operatorname{tg}\varphi^2}$$

zusammen, welcher man auch die Gestalt geben kann:

$$(10) \qquad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi.$$

§ 24. Wiederholte Landen'sche Transformation.

Zu verschiedenen theoretisch interessanten sowie namentlich auch praktisch (nämlich für numerische Berechnungen) wichtigen Gleichungen führt die wiederholte Anwendung der Landen'schen Transformation. Setzen wir der Gleichmässigkeit halber $2v = v_1$ und $q^2 = q_1$, und üben wir ein zweites Mal die Landen'sche Transformation aus, so werden wir zu $v_2 = 2^2 v$, $q_2 = q^{2^2}$ gelangen und bezeichnen die ihnen zugehörigen Grössen durch $w_2, k_2, k_2', K_2, K_2', \varphi_2$. Entsprechend gelangen wir nach im ganzen n-maliger Ausübung der fraglichen Transformation zu:

$$v_n = 2^n v,\ q_n = q^{2^n},\ w_n,\ k_n,\ k_n',\ K_n,\ K_n',\ \varphi_n. \tag{1}$$

Wir merken alsdann zunächst die folgenden vier Recursionsformeln an:

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_0(q_n)\,\vartheta_0(v_n, q_n) &= \vartheta_0(v_{n-1}, q_{n-1})\,\vartheta_3(v_{n-1}, q_{n-1})\,, \\ \vartheta_0(q_n)\,\vartheta_1(v_n, q_n) &= \vartheta_1(v_{n-1}, q_{n-1})\,\vartheta_2(v_{n-1}, q_{n-1})\,, \\ 2\vartheta_3(q_n)\,\vartheta_2(v_n, q_n) &= \vartheta_2(v_{n-1}, q_{n-1})^2 - \vartheta_1(v_{n-1}, q_{n-1})^2, \\ 2\vartheta_3(q_n)\,\vartheta_3(v_n, q_n) &= \vartheta_3(v_{n-1}, q_{n-1})^2 + \vartheta_0(v_{n-1}, q_{n-1})^2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Hieran reihen wir sogleich die folgende Formelkette, welche aus den Gleichungen (6) und (8) pg. 265 entspringt:

$$\left\{\begin{array}{lll} K = K_1(1+k_1), & k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'}, & k_1' = \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \\ K_1 = K_2(1+k_2), & k_2 = \dfrac{1-k_1'}{1+k_1'}, & k_2' = \dfrac{2\sqrt{k_1'}}{1+k_1'}, \\ K_2 = K_3(1+k_3), & k_3 = \dfrac{1-k_2'}{1+k_2'}, & k_3' = \dfrac{2\sqrt{k_2'}}{1+k_2'}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right. \tag{3}$$

Die Berechnung der K_n, k_n, k_n' aus $K_{n-1}, k_{n-1}, k_{n-1}'$ auf Grund dieses Schemas liefert wegen der in jeder Zeile auftretenden Quadratwurzel *zwei* Lösungen; und auch die inverse Operation, nämlich die Berechnung von $K_{n-1}, k_{n-1}, k_{n-1}'$ aus K_n, k_n, k_n', erkennt man leicht als eine zweideutige. Hierin, d. i. in diesem Charakter der Zweideutigkeit der in die Formeln (3) gekleideten Landen'schen Transformation, liegt die Quelle zu einer interessanten Weiterentwicklung, der wir indessen hier nicht nachgehen können. *In dem für die Praxis besonders wichtigen Falle eines rein imaginären Periodenverhältnisses ω und also eines reellen positiven q sind sämtliche k_n, k_n' reell, positiv und < 1, so dass jede Quadratwurzel in* (3) *positiv zu nehmen ist.*

Auch bei der Einkleidung der Landen'schen Transformation in

die Gestalt der algebraischen Relationen (2) haben wir, wenn eben diese Relationen zur Berechnung der transformierten Theta aus den ursprünglichen oder umgekehrt benutzt werden sollen, mit mehrdeutigen algebraischen Operationen zu thun. Welche unter den Lösungen zu unserer ursprünglich eindeutig definierten Landen'schen Transformation $v_n = 2v_{n-1}$, $q_n = q_{n-1}^2$ bez. zur inversen Transformation gehört, wird man wenigstens in jedem Specialfalle reeller Argumente q, v vermittelst der Thetareihen (14) pg. 233 ohne besondere Mühe abschätzen können.

Eine interessante Folgerung entspringt aus dem Formelsystem (3). Durch Multiplication der ersten n Gleichungen der ersten Columne folgt:

$$K = K_n(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots(1+k_n). \tag{4}$$

Nun ist $|q|<1$, und also folgt aus (1), dass $\lim\limits_{n=\infty} |q_n| = 0$ sein wird, was zufolge (7) pg. 235 den Schluss auf $\lim\limits_{n=\infty} |k_n| = 0$ erlaubt. Nach Formel (11) pg. 248 findet man demzufolge:

$$\lim_{n=\infty} K_n = \lim_{n=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gleichung (4) liefert also für $\lim. n=\infty$ folgende *Darstellung der Grösse K durch ein unendliches Product:*

$$K = \frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4)\cdots. \tag{5}$$

Diese Formel ist zumal im oben gedachten Falle eines gegebenen reellen, zwischen 0 und 1 gelegenen k für die numerische Berechnung des zugehörigen K tauglich.

Endlich reihen wir den bisherigen Formelketten das aus (8) und und (10) pg. 265 entspringende System an:

$$\left\{\begin{array}{ll} w_1\cdot\frac{1+k_1}{2} = w, & \operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi, \\ w_2\cdot\frac{1+k_2}{2} = w_1, & \operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1) = k_1'\operatorname{tg}\varphi_1, \\ w_3\cdot\frac{1+k_3}{2} = w_2, & \operatorname{tg}(\varphi_3-\varphi_2) = k_2'\operatorname{tg}\varphi_2, \\ \cdots & \cdots \end{array}\right. \tag{6}$$

Für $\lim. n=\infty$ wird $\lim. k_n = 0$ und $\lim. k_n' = 1$, so dass wir mit Benutzung von (10) pg. 248 auf die folgenden Grenzformeln schliessen:

$$\lim_{n=\infty} w_n = \varphi_n, \quad \lim_{n=\infty}\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right) = 2.$$

Die Multiplication der ersten n Formeln in der ersten Columne des Systemes (6) liefert:

$$w = (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n) \cdot \frac{w_n}{2^n} \cdot$$

Unter Vermittlung von (5) ergiebt sich hiernach folgende *Grenzformel für w:*

$$w = \frac{2K}{\pi} \cdot \lim_{n=\infty} \left(\frac{\varphi_n}{2^n} \right) \cdot \tag{7}$$

Man kann diese Formel für die numerische Berechnung von w bei gegebenen Werten des Moduls k^2 und der Amplitude φ benutzen, indem man sich wegen der successiven Bestimmung der Zahlwerte $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ auf die Recursionsformeln (3) und (6) beruft und K näherungsweise aus (5) berechnet.

Die hier vorgetragenen Entwicklungen haben ein hervorragendes geschichtliches Interesse. Nachdem nämlich bereits bei Landen selbst, sowie bei Lagrange*) die Formeln der nach dem ersteren benannten Transformation zur Behandlung specieller elliptischer Integrale Verwendung fanden, hat Gauss, wie man annehmen muss, noch ohne Kenntnis der Untersuchungen seiner Vorgänger in seiner *Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels***) zwei Algorithmen definiert, welche im wesentlichen auf die Recursionsformeln (3) und (2) zurückkommen. Im Gebrauch dieser Algorithmen ist aber Gauss, wie schon pg. 174 ausgeführt wurde, weit über Landen und Lagrange hinausgegangen; er hat die Algorithmen des arithmetisch-geometrischen Mittels zum Fundament für eine ausgedehnte Theorie der elliptischen Functionen gemacht.

§ 25. **Numerische Berechnungen.**

Bei der wirklichen numerischen Berechnung irgend welcher im Voraufgehenden betrachteten Grössen aus anderen, von denen sie abhängen, sind von praktischer Bedeutung meist nur diejenigen Fälle, bei welchen der Radicand der Quadratwurzel $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ resp. $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ *reelle Coefficienten* besitzt. Wir machen für solche numerische Bestimmungen die beiden folgenden Hülfsmittel namhaft:

I. Angenäherte Berechnungen aus convergenten unendlichen Reihen oder Producten.

II. Tafeln für elliptische Integrale und deren Perioden.

---

*) In den Abhandlungen der Turiner Akademie von 1784; siehe auch Lagrange „Oeuvres complètes" t. 2 pg. 253.

**) Siehe Gauss' Werke, Bd. 3 pg. 361 und 387.

Beide Hülfsmittel sollen nach einander besprochen werden.

I. Für die Praxis hat man nicht nur convergente Reihen, sondern vor allen Dingen schnell convergente Reihen nötig. Solche gewinnt man nötigenfalls durch *Heranziehung der linearen bez. der Landen'schen Transformation*, deren Wirkung auf unsere Functionen oben festgestellt wurde.

1) Ist k^2 reell vorgegeben, so können wir, falls $0 < k^2 \leqq \frac{1}{2}$ noch nicht zutreffen sollte, nach (9) pg. 261 durch lineare Transformation, welche auf unsere Functionen in einer a. a. O. festgestellten Weise wirkt, zu einem in jenem Intervalle gelegenen Modul gelangen, den wir gleich selbst wieder k^2 nennen. Dann gilt $\frac{1}{2} \leqq k'^2 < 1$, und wir finden aus (11) und (12) pg. 248 reelle, der Bedingung $K \leqq K'$ genügende Werte K, K'. Durch binomische Entwicklung von $(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ und Integration entspringt übrigens für K die Darstellung:

$$(1) \qquad K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right],$$

der eine entsprechende für K' parallel geht.

Wir erläutern nun gleich auch die Wirkung der Landen'schen Transformation im Anschluss an die Aufgabe, aus gegebenem k^2 vermittelst der Gleichung (1) den Wert von K zu berechnen. Die Sachlage ist die, dass, nachdem bereits $k^2 \leqq \frac{1}{2}$ ist, *die bei jener Transformation folgenden Moduln k_1^2, k_2^2, $\cdots$ sehr schnell abnehmen.* So ist z. B. bereits k_1^2 im Intervall $0 < k_1^2 \leqq 0{,}029 \cdots$ gelegen. Setzen wir also:

$$(2) \quad K = K_1(1 + k_1) = \frac{\pi(1 + k_1)}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k_1^4 + \cdots\right],$$

so ist die hier rechts stehende Reihe weit schneller convergent als die Reihe (1); und offenbar wird eine noch erhöhte Wirkung erzielt, wenn man die Landen'sche Transformation wiederholt ausübt.

Ist neben k^2 auch noch φ als reeller Winkel gegeben, und soll w berechnet werden, so gelten entsprechende Regeln betreffs der Anwendung der Landen'schen Transformation und der Reihenentwicklung der rechten Seite der hier in Betracht zu ziehenden Formel (10) pg. 248.

2) Denken wir als zweites Beispiel etwa die u-Ebene mit einem *Periodenrechteck* gegeben, so haben wir ein rein imaginäres Periodenverhältnis ω und dürfen $-i\omega \geqq 1$ annehmen, da dies nötigenfalls vermöge der linearen Substitution $\omega_1' = -\omega_2$, $\omega_2' = \omega_1$ erreichbar

ist, welche dem Falle III pg. 260 angehört. Wir haben so einen positiven reellen Wert q erreicht, der $\leqq e^{-\pi}$, d. i. $\leqq 0{,}0432\cdots$ ist. Wollen wir nun etwa die Thetareihen für reelle Argumente v auswerten, so werden dieselben bereits gut convergent sein. Doch wird man auch hier durch einmaliges oder wiederholtes Ausüben Landenscher Transformationen zu noch weit schneller convergenten Reihen gelangen, wie denn bereits $q_1 \leqq 0{,}00186\cdots$ ist.

3) Sollen wir numerische Rechnungen im Anschluss an die Weierstrass'sche Normalform $(4z^3 - g_2 z - g_3)$ des Radicanden der im Integral erster Gattung auftretenden Quadratwurzel anstellen, so haben wir, reelle Coefficienten g_2, g_3 vorausgesetzt, zu unterscheiden, ob die Grössen e_1, e_2, e_3 sämtlich reell sind, oder ob zwei unter ihnen conjugiert complex ausfallen. Bei reellen e_1, e_2, e_3 haben wir ein rechteckiges Periodenparallelogramm (cf. pg. 216) und kommen damit zu den in 1) und 2) betrachteten Fällen zurück.

Etwas umständlicher ist der andere Fall, *dass nur eine der Grössen* e_k *reell ist.* Wir haben alsdann (sofern wir e_3 als die reelle Wurzel der Gleichung $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$ ansetzen) ein *rhombisches Periodenparallelogramm* (cf. pg. 213 ff.), und der Periodenquotient ω ist eine Zahl vom absoluten Betrage 1. Ist α die Amplitude der complexen Zahl $\omega = e^{\alpha i}$, so soll unterschieden werden, ob $\alpha < \frac{\pi}{3}$ ist oder zwischen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ (die Grenzen eingeschlossen) liegt oder endlich dem Intervall $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ angehört.

Im ersten und dritten dieser beiden Fälle machen wir zuvörderst von linearen Transformationen Gebrauch. Ist $\alpha < \frac{\pi}{3}$, so gehen wir zu den Perioden $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = -\omega_1 + \omega_2$ über und finden für den neuen Periodenquotienten $\frac{1}{2}\left(1 + i \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right)\cdot$ Ist $\alpha > \frac{2\pi}{3}$, so wähle man als neue Perioden $\omega_1' = -\omega_2$, $\omega_2' = \omega_1 + \omega_2$ und gewinnt für den neuen Quotienten $\frac{1}{2}\left(1 - i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)\cdot$ In beiden Fällen ist hiernach ein Wert $\omega = \xi + i\eta$ mit $\eta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ gewonnen, was für $\frac{\pi}{3} \leqq \alpha \leqq \frac{2\pi}{3}$ direct zutrifft. Dem entspricht es, dass die Ungleichung gilt:

$$|q| = e^{-\pi\eta} \leqq 0{,}06582\cdots.$$

Ist der Periodenrhombus gegeben, so gelangt man in der gekennzeichneten Weise zu einem Wert q, für welchen die Thetareihen gut convergieren, und man kann die Schnelligkeit der Convergenz durch Anwendung Landen'scher Transformationen nötigenfalls wieder erhöhen.

Sind hingegen die g_2, g_3 gegeben, so wird man durch Vermittlung der e_1, e_2, e_3 und k^2, $k^{2\prime}$ die zugehörigen K, K' durch Reihenentwicklungen der Integrale (11) und (12) pg. 248 u. f. resp. durch Ketten Landen'scher Transformationen berechnen und gelangt von hieraus zur Kenntnis des Periodenquotienten und des Wertes q.

II. An Tafeln elliptischer Integrale und Perioden teilen wir am Schlusse des gegenwärtigen Kapitels folgende mit:

1) Tafel für die Werte des elliptischen Integrals erster Gattung w, welches man in seiner Abhängigkeit von k und φ (cf. Formel (10) pg. 248) durch $F(\varphi, k)$ zu bezeichnen pflegt. Die Tafel bezieht sich auf ein Periodenrechteck, d. h. auf ein reelles zwischen 0 und 1 gelegenes k^2; es ist $k = \sin\alpha$ gesetzt, und es sind die Werte $\alpha = 5^0$, 10^0, $15^0, \cdots$ in der Tafel direct berücksichtigt. Die reellen Werte w entsprechen den reellen Winkeln $\varphi = \operatorname{am} w$; die Tafel giebt die Werte w auf 5 Decimalstellen für die Winkel $\varphi = 1^0, 2^0, 3^0, \cdots 90^0$.

2) Tafel der Werte K (und damit K') beim Periodenrechteck. Es gilt wieder $\alpha = \arcsin k$; die Angaben beziehen sich auf alle Winkel $\alpha = 1^0, 2^0, \cdots 90^0$.

3) Tafel für die um 10 vermehrten gemeinen Logarithmen von q bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$ nach je zehn Minuten fortschreitend wieder für das Intervall $\alpha = 0$ bis $\alpha = 90^0$.

4) Tafel für das pg. 251 u. f. betrachtete Integral zweiter Gattung:

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi. \tag{3}$$

Diese Tafel ist ähnlich gebaut wie diejenige für $w = F(\varphi, k)$, jedoch nicht so ausführlich gehalten.

5) Tafel für die in (8) pg. 252 definierte Periode E des Integrales zweiter Gattung, für welche man übrigens die der Gleichung (1) correspondierende Entwicklung hat:

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right]. \tag{4}$$

Beim Interpolieren ist die einzelne Tafel durchaus nicht an allen Stellen gleich brauchbar. Will man z. B. bei gegebenem k^2 die Werte K, K' bestimmen, so erweist sich bei kleinen Werten α die Tafel zur Bestimmung von K als tauglich, für Winkel α nahe an 90^0 jedoch als wenig brauchbar. Da nun K' der zu $\alpha' = 90^0 - \alpha$ gehörende Wert K ist, so wird man im gedachten Falle eines kleinen Winkels α besser thun, aus der Tafel 2) nur erst K abzulesen, sodann aber vermittelst

der ausführlicher angelegten Tafel 3) sogleich erst den Periodenquotienten zu bestimmen, womit dann auch K' bekannt ist.

Handelt es sich um Berechnung von Grössen der Weierstrass'schen Theorie, so wird man zum Zwecke des Gebrauchs der Tafeln vermöge der oben entwickelten Relationen immer erst zu den correspondierenden Grössen der Jacobi'schen Theorie gehen und von diesen dann den Rückgang zu den eigentlich gesuchten Werten nehmen*).

---

*) Die in Rede stehenden Tafeln sind dem schon pg. 175 genannten Werke von Lucien Lévy *„Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques“* (Paris, bei Gauthier-Villars, 1898) entlehnt. Dieselben stammen bis auf die Tafel 3 aus dem zweiten Bande von Legendre's *„Traité des fonctions elliptiques etc.“* (cf. pg. 173), in welchem ein höchst ausgedehntes und wertvolles Tafelwerk enthalten ist. In der That schreiten die Legendre'schen Tafeln für $E(\varphi, \sin\alpha)$ und $F(\varphi, \sin\alpha)$ sowohl für α als φ von Grad zu Grad fort, und zwar sind die Werte $E(\varphi, \sin\alpha)$ und $F(\varphi, \sin\alpha)$ im Intervall von $\alpha = 0^0$ bis 45^0 auf zehn Decimalstellen, von $\alpha = 45^0$ bis $\alpha = 90^0$ aber auf neun Stellen angegeben. Für die Perioden K und E giebt Legendre sogar eine auf zwölf Stellen berechnete Tafel für alle ganzzahligen Grade von $\alpha = 0^0$ bis 90^0. Für $\log q$ hat Jacobi am Ende der Abhandlung *„Über die zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen zweckmässigsten Formeln“* (Journ. f. Mathem. Bd. 26, 1843 oder Jacobi's gesammelte Werke, Bd. 1, pg. 343) eine fünfstellige Tafel mitgeteilt, in welcher α nach Zehnteln eines Grades fortschreitet. In Bertrand *„Traité de calcul intégral“* (Paris, 1870) ist eine auf Zwölfteilung des Grades beruhende Tafel für $\log q$ mitgeteilt.

φ	$\alpha = 5^0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 15^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 25^0$	$\alpha = 30^0$
1^0	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2^0	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3^0	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05237
4^0	0,06981	0,06981	0,06982	0,06982	0,06982	0,06983
5^0	0,08727	0,08727	0,08727	0,08728	0,08729	0,08729
6^0	0,10472	0,10473	0,10473	0,10474	0,10475	0,10477
7^0	0,12218	0,12218	0,12219	0,12221	0,12223	0,12225
8^0	0,13963	0,13964	0,13966	0,13968	0,13971	0,13974
9^0	0,15708	0,15710	0,15712	0,15715	0,15719	0,15724
10^0	0,17454	0,17456	0,17459	0,17464	0,17469	0,17475
11^0	0,19200	0,19202	0,19206	0,19212	0,19220	0,19228
12^0	0,20945	0,20949	0,20954	0,20962	0,20971	0,20982
13^0	0,22691	0,22695	0,22702	0,22712	0,22724	0,22738
14^0	0,24436	0,24442	0,24451	0,24463	0,24478	0,24495
15^0	0,26182	0,26189	0,26200	0,26215	0,26233	0,26254
16^0	0,27928	0,27936	0,27949	0,27967	0,27989	0,28015
17^0	0,29674	0,29684	0,29699	0,29721	0,29748	0,29779
18^0	0,31420	0,31431	0,31450	0,31475	0,31507	0,31544
19^0	0,33166	0,33179	0,33201	0,33231	0,33268	0,33312
20^0	0,34912	0,34927	0,34953	0,34988	0,35031	0,35082
21^0	0,36658	0,36676	0,36706	0,36746	0,36796	0,36855
22^0	0,38404	0,38425	0,38459	0,38505	0,38563	0,38630
23^0	0,40151	0,40174	0,40213	0,40266	0,40331	0,40408
24^0	0,41897	0,41924	0,41968	0,42027	0,42102	0,42189
25^0	0,43643	0,43674	0,43723	0,43791	0,43875	0,43973
26^0	0,45390	0,45424	0,45479	0,45555	0,45650	0,45761
27^0	0,47137	0,47174	0,47236	0,47321	0,47427	0,47551
28^0	0,48883	0,48925	0,48994	0,49089	0,49207	0,49345
29^0	0,50630	0,50677	0,50753	0,50858	0,50988	0,51142
30^0	0,52377	0,52428	0,52513	0,52628	0,52773	0,52943
31^0	0,54124	0,54181	0,54273	0,54401	0,54560	0,54747
32^0	0,55871	0,55933	0,56035	0,56175	0,56349	0,56555
33^0	0,57619	0,57686	0,57797	0,57950	0,58141	0,58367
34^0	0,59366	0,59439	0,59561	0,59727	0,59936	0,60183
35^0	0,61113	0,61193	0,61325	0,61506	0,61734	0,62003
36^0	0,62861	0,62948	0,63090	0,63287	0,63534	0,63827
37^0	0,64609	0,64702	0,64857	0,65070	0,65337	0,65655
38^0	0,66356	0,66457	0,66624	0,66854	0,67144	0,67487
39^0	0,68104	0,68213	0,68393	0,68641	0,68953	0,69324
40^0	0,69852	0,69969	0,70162	0,70429	0,70765	0,71165
41^0	0,71600	0,71726	0,71933	0,72219	0,72580	0,73010
42^0	0,73349	0,73483	0,73704	0,74011	0,74398	0,74860
43^0	0,75097	0,75240	0,75477	0,75805	0,76219	0,76714
44^0	0,76846	0,76998	0,77251	0,77600	0,78043	0,78573
45^0	0,78594	0,78756	0,79025	0,79398	0,79871	0,80437

φ	$\alpha = 5^0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 15^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 25^0$	$\alpha = 30^0$
46⁰	0,80343	0,80515	0,80801	0,81198	0,81701	0,82305
47⁰	0,82092	0,82275	0,82578	0,82999	0,83535	0,84178
48⁰	0,83841	0,84035	0,84356	0,84803	0,85371	0,86055
49⁰	0,85590	0,85795	0,86135	0,86609	0,87211	0,87937
50⁰	0,87339	0,87556	0,87915	0,88416	0,89054	0,89825
51⁰	0,89088	0,89317	0,89697	0,90226	0,90901	0,91716
52⁰	0,90838	0,91078	0,91479	0,92037	0,92750	0,93613
53⁰	0,92587	0,92841	0,93262	0,93850	0,94603	0,95514
54⁰	0,94337	0,94603	0,95047	0,95666	0,96458	0,97420
55⁰	0,96086	0,96366	0,96832	0,97483	0,98317	0,99331
56⁰	0,97836	0,98130	0,98618	0,99302	1,00179	1,01247
57⁰	0,99586	0,99894	1,00406	1,01123	1,02044	1,03167
58⁰	1,01336	1,01658	1,02194	1,02946	1,03912	1,05092
59⁰	1,03086	1,03423	1,03984	1,04770	1,05783	1,07021
60⁰	1,04837	1,05188	1,05774	1,06597	1,07657	1,08955
61⁰	1,06587	1,06954	1,07566	1,08425	1,09534	1,10894
62⁰	1,08338	1,08720	1,09358	1,10255	1,11414	1,12837
63⁰	1,10088	1,10486	1,11151	1,12087	1,13296	1,14784
64⁰	1,11839	1,12253	1,12945	1,13920	1,15182	1,16735
65⁰	1,13590	1,14020	1,14740	1,15755	1,17070	1,18691
66⁰	1,15340	1,15787	1,16536	1,17592	1,18961	1,20651
67⁰	1,17091	1,17555	1,18333	1,19430	1,20854	1,22615
68⁰	1,18842	1,19324	1,20130	1,21269	1,22750	1,24583
69⁰	1,20593	1,21092	1,21928	1,23110	1,24648	1,26555
70⁰	1,22345	1,22861	1,23727	1,24953	1,26548	1,28530
71⁰	1,24096	1,24630	1,25527	1,26796	1,28451	1,30509
72⁰	1,25847	1,26400	1,27328	1,28641	1,30356	1,32491
73⁰	1,27599	1,28169	1,29129	1,30488	1,32263	1,34477
74⁰	1,29350	1,29939	1,30930	1,32335	1,34172	1,36466
75⁰	1,31102	1,31710	1,32733	1,34184	1,36083	1,38457
76⁰	1,32853	1,33480	1,34535	1,36034	1,37996	1,40452
77⁰	1,34605	1,35251	1,36339	1,37884	1,39911	1,42449
78⁰	1,36356	1,37022	1,38143	1,39736	1,41827	1,44449
79⁰	1,38108	1,38793	1,39947	1,41588	1,43744	1,46451
80⁰	1,39860	1,40565	1,41752	1,43442	1,45663	1,48455
81⁰	1,41612	1,42336	1,43557	1,45296	1,47583	1,50462
82⁰	1,43364	1,44108	1,45362	1,47150	1,49504	1,52470
83⁰	1,45115	1,45879	1,47168	1,49005	1,51426	1,54479
84⁰	1,46867	1,47651	1,48974	1,50861	1,53350	1,56490
85⁰	1,48619	1,49423	1,50781	1,52717	1,55273	1,58503
86⁰	1,50371	1,51195	1,52587	1,54574	1,57198	1,60516
87⁰	1,52123	1,52968	1,54394	1,56431	1,59123	1,62530
88⁰	1,53875	1,54740	1,56200	1,58288	1,61048	1,64545
89⁰	1,55627	1,56512	1,58007	1,60145	1,62974	1,66560
90⁰	1,57379	1,58284	1,59814	1,62003	1,64900	1,68575

φ	$\alpha = 35^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 45^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 55^0$	$\alpha = 60^0$
1⁰	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2⁰	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3⁰	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05238	0,05238
4⁰	0,06983	0,06984	0,06984	0,06985	0,06985	0,06986
5⁰	0,08730	0,08731	0,08732	0,08733	0,08734	0,08735
6⁰	0,10478	0,10480	0,10482	0,10483	0,10485	0,10486
7⁰	0,12227	0,12230	0,12233	0,12235	0,12238	0,12240
8⁰	0,13978	0,13981	0,13985	0,13989	0,13993	0,13997
9⁰	0,15729	0,15735	0,15740	0,15746	0,15751	0,15757
10⁰	0,17482	0,17490	0,17498	0,17505	0,17513	0,17520
11⁰	0,19237	0,19247	0,19258	0,19268	0,19278	0,19288
12⁰	0,20994	0,21007	0,21021	0,21034	0,21047	0,21059
13⁰	0,22753	0,22770	0,22787	0,22804	0,22821	0,22836
14⁰	0,24514	0,24535	0,24556	0,24578	0,24599	0,24618
15⁰	0,26278	0,26303	0,26330	0,26356	0,26382	0,26406
16⁰	0,28044	0,28075	0,28107	0,28139	0,28171	0,28200
17⁰	0,29813	0,29850	0,29889	0,29927	0,29965	0,30001
18⁰	0,31585	0,31629	0,31675	0,31721	0,31766	0,31809
19⁰	0,33360	0,33412	0,33466	0,33520	0,33574	0,33624
20⁰	0,35138	0,35199	0,35262	0,35326	0,35388	0,35447
21⁰	0,36920	0,36990	0,37063	0,37137	0,37210	0,37279
22⁰	0,38705	0,38786	0,38871	0,38956	0,39040	0,39119
23⁰	0,40494	0,40587	0,40683	0,40782	0,40878	0,40969
24⁰	0,42287	0,42392	0,42503	0,42614	0,42724	0,42829
25⁰	0,44084	0,44203	0,44328	0,44455	0,44580	0,44699
26⁰	0,45885	0,46020	0,46161	0,46304	0,46445	0,46580
27⁰	0,47690	0,47841	0,48000	0,48161	0,48320	0,48472
28⁰	0,49500	0,49669	0,49846	0,50027	0,50206	0,50377
29⁰	0,51315	0,51503	0,51700	0,51902	0,52102	0,52293
30⁰	0,53134	0,53343	0,53562	0,53787	0,54009	0,54223
31⁰	0,54959	0,55189	0,55432	0,55681	0,55928	0,56166
32⁰	0,56788	0,57042	0,57310	0,57586	0,57860	0,58123
33⁰	0,58623	0,58902	0,59197	0,59501	0,59803	0,60095
34⁰	0,60463	0,60769	0,61093	0,61427	0,61760	0,62082
35⁰	0,62308	0,62643	0,62998	0,63364	0,63730	0,64085
36⁰	0,64159	0,64524	0,64912	0,65313	0,65715	0,66104
37⁰	0,66016	0,66413	0,66836	0,67273	0,67713	0,68141
38⁰	0,67879	0,68309	0,68769	0,69246	0,69727	0,70195
39⁰	0,69747	0,70214	0,70713	0,71232	0,71756	0,72267
40⁰	0,71622	0,72126	0,72667	0,73231	0,73801	0,74358
41⁰	0,73502	0,74047	0,74632	0,75243	0,75862	0,76469
42⁰	0,75389	0,75976	0,76608	0,77269	0,77940	0,78600
43⁰	0,77282	0,77914	0,78594	0,79308	0,80035	0,80752
44⁰	0,79182	0,79860	0,80592	0,81362	0,82149	0,82926
45⁰	0,81088	0,81815	0,82602	0,83431	0,84281	0,85122

φ	$\alpha = 35^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 45^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 55^0$	$\alpha = 60^0$
46⁰	0,83001	0,83779	0,84623	0,85515	0,86431	0,87342
47⁰	0,84920	0,85752	0,86656	0,87614	0,88601	0,89585
48⁰	0,86846	0,87734	0,88701	0,89729	0,90791	0,91853
49⁰	0,88779	0,89725	0,90759	0,91860	0,93001	0,94146
50⁰	0,90719	0,91725	0,92829	0,94008	0,95232	0,96465
51⁰	0,92665	0,93735	0,94912	0,96171	0,97484	0,98811
52⁰	0,94618	0,95755	0,97007	0,98352	0,99759	1,01185
53⁰	0,96578	0,97784	0,99115	1,00550	1,02055	1,03587
54⁰	0,98545	0,99822	1,01237	1,02765	1,04374	1,06018
55⁰	1,00519	1,01871	1,03371	1,04998	1,06716	1,08479
56⁰	1,02499	1,03928	1,05519	1,07248	1,09082	1,10971
57⁰	1,04487	1,05996	1,07680	1,09517	1,11472	1,13494
58⁰	1,06481	1,08073	1,09854	1,11803	1,13886	1,16050
59⁰	1,08482	1,10159	1,12042	1,14108	1,16325	1,18638
60⁰	1,10490	1,12256	1,14243	1,16432	1,18788	1,21254
61⁰	1,12504	1,14361	1,16457	1,18773	1,21277	1,23916
62⁰	1,14525	1,16476	1,18685	1,21134	1,23792	1,26606
63⁰	1,16552	1,18601	1,20926	1,23513	1,26332	1,29332
64⁰	1,18586	1,20735	1,23180	1,25910	1,28898	1,32094
65⁰	1,20626	1,22877	1,25447	1,28326	1,31491	1,34893
66⁰	1,22672	1,25029	1,27727	1,30760	1,34109	1,37728
67⁰	1,24724	1,27190	1,30020	1,33212	1,36753	1,40600
68⁰	1,26782	1,29359	1,32325	1,35683	1,39423	1,43510
69⁰	1,28846	1,31537	1,34642	1,38171	1,42119	1,46457
70⁰	1,30915	1,33723	1,36972	1,40677	1,44840	1,49441
71⁰	1,32990	1,35917	1,39313	1,43200	1,47587	1,52463
72⁰	1,35070	1,38118	1,41666	1,45739	1,50359	1,55522
73⁰	1,37155	1,40328	1,44030	1,48296	1,53155	1,58618
74⁰	1,39244	1,42544	1,46404	1,50867	1,55974	1,61750
75⁰	1,41339	1,44767	1,48788	1,53455	1,58817	1,64918
76⁰	1,43437	1,46997	1,51183	1,56056	1,61682	1,68120
77⁰	1,45540	1,49232	1,53586	1,58672	1,64569	1,71356
78⁰	1,47647	1,51474	1,55999	1,61302	1,67476	1,74625
79⁰	1,49757	1,53721	1,58419	1,63943	1,70403	1,77924
80⁰	1,51870	1,55973	1,60848	1,66597	1,73347	1,81253
81⁰	1,53987	1,58230	1,63283	1,69261	1,76309	1,84609
82⁰	1,56106	1,60491	1,65725	1,71935	1,79286	1,87991
83⁰	1,58228	1,62756	1,68172	1,74618	1,82278	1,91395
84⁰	1,60352	1,65024	1,70625	1,77309	1,85281	1,94821
85⁰	1,62478	1,67295	1,73082	1,80006	1,88296	1,98264
86⁰	1,64605	1,69569	1,75542	1,82710	1,91320	2,01723
87⁰	1,66734	1,71844	1,78006	1,85418	1,94351	2,05194
88⁰	1,68864	1,74121	1,80472	1,88129	1,97388	2,08674
89⁰	1,70994	1,76399	1,82939	1,90843	2,00429	2,12161
90⁰	1,73125	1,78677	1,85407	1,93558	2,03472	2,15652

φ	$\alpha = 65^0$	$\alpha = 70^0$	$\alpha = 75^0$	$\alpha = 80^0$	$\alpha = 85^0$	$\alpha = 90^0$
1⁰	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2⁰	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3⁰	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4⁰	0,06986	0,06986	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
5⁰	0,08736	0,08736	0,08737	0,08737	0,08738	0,08738
6⁰	0,10488	0,10489	0,10490	0,10491	0,10491	0,10491
7⁰	0,12242	0,12244	0,12246	0,12247	0,12248	0,12248
8⁰	0,14000	0,14003	0,14005	0,14007	0,14008	0,14008
9⁰	0,15761	0,15765	0,15769	0,15771	0,15772	0,15773
10⁰	0,17526	0,17532	0,17536	0,17540	0,17542	0,17543
11⁰	0,19296	0,19304	0,19310	0,19314	0,19317	0,19318
12⁰	0,21071	0,21080	0,21088	0,21094	0,21098	0,21099
13⁰	0,22851	0,22863	0,22873	0,22880	0,22885	0,22886
14⁰	0,24636	0,24652	0,24664	0,24674	0,24680	0,24681
15⁰	0,26428	0,26448	0,26463	0,26475	0,26482	0,26484
16⁰	0,28227	0,28251	0,28270	0,28284	0,28293	0,28295
17⁰	0,30034	0,30062	0,30085	0,30102	0,30112	0,30116
18⁰	0,31848	0,31881	0,31909	0,31929	0,31942	0,31946
19⁰	0,33670	0,33710	0,33742	0,33766	0,33781	0,33786
20⁰	0,35501	0,35548	0,35586	0,35615	0,35632	0,35638
21⁰	0,37342	0,37396	0,37441	0,37474	0,37494	0,37501
22⁰	0,39192	0,39255	0,39307	0,39346	0,39369	0,39377
23⁰	0,41053	0,41126	0,41186	0,41230	0,41257	0,41266
24⁰	0,42925	0,43008	0,43077	0,43128	0,43159	0,43169
25⁰	0,44808	0,44904	0,44982	0,45040	0,45075	0,45088
26⁰	0,46704	0,46812	0,46901	0,46967	0,47008	0,47021
27⁰	0,48612	0,48735	0,48835	0,48910	0,48956	0,48972
28⁰	0,50534	0,50672	0,50785	0,50870	0,50922	0,50939
29⁰	0,52470	0,52624	0,52752	0,52847	0,52905	0,52925
30⁰	0,54420	0,54593	0,54736	0,54843	0,54908	0,54931
31⁰	0,56386	0,56579	0,56739	0,56858	0,56931	0,55956
32⁰	0,58367	0,58582	0,58760	0,58893	0,58975	0,59003
33⁰	0,60365	0,60604	0,60802	0,60950	0,61042	0,61073
34⁰	0,62381	0,62646	0,62865	0,63029	0,63131	0,63166
35⁰	0,64415	0,64707	0,64950	0,65132	0,65245	0,65284
36⁰	0,66468	0,66790	0,67058	0,67260	0,67385	0,67428
37⁰	0,68540	0,68895	0,69131	0,69414	0,69552	0,69599
38⁰	0,70633	0,71023	0,71349	0,71594	0,71747	0,71799
39⁰	0,72746	0,73175	0,73533	0,73804	0,73972	0,74029
40⁰	0,74882	0,75352	0,75745	0,76043	0,76228	0,76291
41⁰	0,77041	0,77555	0,77987	0,78313	0,78517	0,78586
42⁰	0,79224	0,79786	0,80258	0,80617	0,80841	0,80917
43⁰	0,81432	0,82045	0,82562	0,82954	0,83200	0,83284
44⁰	0,83665	0,84333	0,84898	0,85329	0,85598	0,85690
45⁰	0,85925	0,86653	0,87270	0,87741	0,88037	0,88137

φ	$\alpha = 65^0$	$\alpha = 70^0$	$\alpha = 75^0$	$\alpha = 80^0$	$\alpha = 85^0$	$\alpha = 90^0$
46⁰	0,88213	0,89005	0,89678	0,90193	0,90517	0,90628
47⁰	0,90529	0,91390	0,92124	0,92687	0,93042	0,93163
48⁰	0,92875	0,93811	0,94610	0,95226	0,95614	0,95747
49⁰	0,95252	0,96267	0,97139	0,97810	0,98235	0,98381
50⁰	0,97660	0,98762	0,99711	1,00444	1,00909	1,01068
51⁰	1,00102	1,01297	1,02329	1,03129	1,03638	1,03812
52⁰	1,02578	1,03872	1,04995	1,05868	1,06425	1,06616
53⁰	1,05089	1,06491	1,07711	1,08665	1,09274	1,09483
54⁰	1,07637	1,09155	1,10481	1,11521	1,12188	1,12418
55⁰	1,10223	1,11865	1,13307	1,14442	1,15171	1,15423
56⁰	1,12848	1,14624	1,16190	1,17430	1,18229	1,18505
57⁰	1,15513	1,17433	1,19136	1,20488	1,21364	1,21667
58⁰	1,18220	1,20295	1,22145	1,23623	1,24582	1,24916
59⁰	1,20970	1,23212	1,25223	1,26837	1,27890	1,28257
60⁰	1,23764	1,26186	1,28371	1,30135	1,31292	1,31696
61⁰	1,26604	1,29219	1,31594	1,33524	1,34795	1,35240
62⁰	1,29490	1,32314	1,34897	1,37008	1,38407	1,38899
63⁰	1,32425	1,35473	1,38281	1,40594	1,42135	1,42679
64⁰	1,35409	1,38699	1,41753	1,44288	1,45989	1,46591
65⁰	1,38443	1,41994	1,45316	1,48098	1,49977	1,50645
66⁰	1,41529	1,45360	1,48976	1,52031	1,54112	1,54855
67⁰	1,44668	1,48800	1,52738	1,56096	1,58404	1,59232
68⁰	1,47860	1,52317	1,56606	1,60303	1,62868	1,63794
69⁰	1,51107	1,55913	1,60586	1,64661	1,67518	1,68557
70⁰	1,54410	1,59591	1,64684	1,69181	1,72372	1,73542
71⁰	1,57768	1,63352	1,68905	1,73877	1,77450	1,78771
72⁰	1,61182	1,67198	1,73256	1,78759	1,82774	1,84273
73⁰	1,64653	1,71132	1,77743	1,83844	1,88370	1,90079
74⁰	1,68180	1,75155	1,82371	1,89146	1,94267	1,96226
75⁰	1,71763	1,79269	1,87145	1,94682	2,00499	2,02759
76⁰	1,75401	1,83473	1,92073	2,00470	2,07106	2,09732
77⁰	1,79094	1,87768	1,97157	2,06529	2,14136	2,17212
78⁰	1,82840	1,92154	2,02403	2,12878	2,21644	2,25280
79⁰	1,86637	1,96630	2,07813	2,19538	2,29694	2,34040
80⁰	1,90484	2,01193	2,13390	2,26527	2,38365	2,43625
81⁰	1,94377	2,05840	2,19131	2,33866	2,47748	2,54209
82⁰	1,98313	2,10568	2,25035	2,41569	2,57954	2,66031
83⁰	2,02290	2,15371	2,31097	2,49648	2,69109	2,79422
84⁰	2,06303	2,20244	2,37309	2,58105	2,81362	2,94870
85⁰	2,10348	2,25178	2,43658	2,66935	2,94869	3,13130
86⁰	2,14421	2,30166	2,50129	2,76116	3,09782	3,35467
87⁰	2,18515	2,35198	2,56703	2,85612	3,26198	3,64253
88⁰	2,22627	2,40265	2,63357	2,95366	3,44116	4,04813
89⁰	2,26750	2,45354	2,70068	3,05304	3,63279	4,74135
90⁰	2,30879	2,50455	2,76806	3,15339	3,83174	∞

α	K	α	K	α	K
1°	1,57092	31°	1,69411	61°	2,18421
2°	1,57127	32°	1,70284	62°	2,21319
3°	1,57187	33°	1,71192	63°	2,24355
4°	1,57271	34°	1,72139	64°	2,27538
5°	1,57379	35°	1,73125	65°	2,30879
6°	1,57511	36°	1,74150	66°	2,34390
7°	1,57668	37°	1,75217	67°	2,38087
8°	1,57849	38°	1,76326	68°	2,41984
9°	1,58054	39°	1,77479	69°	2,46100
10°	1,58284	40°	1,78677	70°	2,50455
11°	1,58539	41°	1,79922	71°	2,55073
12°	1,58820	42°	1,81216	72°	2,59982
13°	1,59125	43°	1,82560	73°	2,65214
14°	1,59457	44°	1,83957	74°	2,70807
15°	1,59814	45°	1,85407	75°	2,76806
16°	1,60198	46°	1,86915	76°	2,83267
17°	1,60608	47°	1,88481	77°	2,90256
18°	1,61045	48°	1,90108	78°	2,97857
19°	1,61510	49°	1,91800	79°	3,06173
20°	1,62003	50°	1,93558	80°	3,15339
21°	1,62523	51°	1,95386	81°	3,25530
22°	1,63073	52°	1,97288	82°	3,36987
23°	1,63632	53°	1,99267	83°	3,50042
24°	1,64260	54°	2,01327	84°	3,65186
25°	1,64900	55°	2,03472	85°	3,83174
26°	1,65570	56°	2,05706	86°	4,05276
27°	1,66272	57°	2,08036	87°	4,33865
28°	1,67006	58°	2,10466	88°	4,74272
29°	1,67773	59°	2,13002	89°	5,43491
30°	1,68575	60°	2,15652	90°	∞

α	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	$-\infty$	3,72333	4,32539	4,67758	4,92746	5,12129
1°	5,27966	5,41356	5,52955	5,68187	5,72339	5,80619
2°	5,88178	5,95132	6,01571	6,07565	6,13173	6,18441
3°	6,23408	6,28106	6,32564	6,36804	6,40847	6,44711
4°	6,48411	6,51960	6,55369	6,58651	6,61813	6,64864
5°	6,67813	6,70664	6,73426	6,76103	6,78700	6,81222
6°	6,83673	6,86058	6,88379	6,90639	6,92843	6,94993
7°	6,97091	6,99140	7,01143	7,03100	7,05015	7,06888
8°	7,08723	7,10520	7,12281	7,14007	7,15700	7,17361
9°	7,18991	7,20592	7,22164	7,23708	7,25226	7,26718
10°	7,28185	7,29628	7,31048	7,32446	7,33821	7,35176
11°	7,36510	7,37825	7,39120	7,40396	7,41655	7,42896
12°	7,44119	7,45326	7,46517	7,47693	7,48852	7,49997
13°	7,51128	7,52244	7,53346	7,54436	7,55511	7,56575
14°	7,57625	7,58664	7,59690	7,60705	7,61709	7,62701
15°	7,63683	7,64654	7,65615	7,66566	7,67506	7,68437
16°	7,69359	7,70271	7,71174	7,72068	7,72954	7,73831
17°	7,74699	7,75560	7,76402	7,77256	7,78093	7,78922
18°	7,79743	7,80558	7,81365	7,82165	7,82958	7,83744
19°	7,84524	7,85297	7,86064	7,86824	7,87578	7,88326
20°	7,89068	7,89804	7,90535	7,91259	7,91979	7,92692
21°	7,93400	7,94103	7,94801	7,95493	7,96180	7,96863
22°	7,97540	7,98213	7,98880	7,99543	8,00202	8,00856
23°	8,01505	8,02150	8,02791	8,03427	8,04059	8,04687
24°	8,05311	8,05931	8,06547	8,07159	8,07767	8,08371
25°	8,08971	8,09568	8,10161	8,10751	8,11336	8,11919
26°	8,12498	8,13073	8,13645	8,14214	8,14780	8,15342
27°	8,15901	8,16457	8,17010	8,17559	8,18106	8,18650
28°	8,19190	8,19728	8,20263	8,20795	8,21324	8,21851
29°	8,22374	8,22895	8,23414	8,23929	8,24442	8,24953
30°	8,25461	8,25966	8,26469	8,26969	8,27467	8,27963
31°	8,28456	8,28947	8,29435	8,29922	8,30406	8,30887
32°	8,31367	8,31844	8,32319	8,32792	8,33263	8,33732
33°	8,34199	8,34664	8,35126	8,35587	8,36046	8,36502
34°	8,36957	8,37410	8,37861	8,38310	8,38757	8,39203
35°	8,39646	8,40088	8,40528	8,40966	8,41403	8,41838
36°	8,42271	8,42702	8,43132	8,43560	8,43987	8,44411
37°	8,45835	8,45256	8,45677	8,46095	8,46512	8,46928
38°	8,47342	8,47754	8,48166	8,48575	8,48983	8,49390
39°	8,49796	8,50200	8,50602	8,51003	8,51403	8,51802
40°	8,52199	8,52595	8,52990	8,53383	8,53775	8,54166
41°	8,54555	8,54944	8,55331	8,55717	8,56101	8,56485
42°	8,56867	8,57249	8,57629	8,58007	8,58385	8,58762
43°	8,59138	8,59512	8,59885	8,60258	8,60629	8,60999
44°	8,61368	8,61737	8,62104	8,62470	8,62835	8,63199

α	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	8,63562	8,63925	8,64286	8,64646	8,65006	8,65364
46°	8,65722	8,66078	8,66434	8,66789	8,67143	8,67496
47°	8,67848	8,68200	8,68550	8,68900	8,69249	8,69597
48°	8,69944	8,70291	8,70636	8,70981	8,71326	8,71669
49°	8,72012	8,72353	8,72695	8,73035	8,73375	8,73714
50°	8,74052	8,74390	8,74726	8,75063	8,75398	8,75733
51°	8,76067	8,76401	8,76733	8,77066	8,77398	8,77729
52°	8,78059	8,78389	8,78718	8,79047	8,79375	8,79703
53°	8,80030	8,80356	8,80682	8,81007	8,81332	8,81656
54°	8,81980	8,82303	8,82626	8,82948	8,83270	8,83591
55°	8,83911	8,84232	8,84552	8,84871	8,85190	8,85508
56°	8,85826	8,86144	8,86461	8,86778	8,87094	8,87410
57°	8,87726	8,88041	8,88356	8,88670	8,88984	8,89298
58°	8,89611	8,89924	8,90237	8,90549	8,90861	8,91173
59°	8,91484	8,91795	8,92106	8,92417	8,92727	8,93037
60°	8,93347	8,93656	8,93965	8,94274	8,94583	8,94891
61°	8,95200	8,95508	8,95816	8,96123	8,96431	8,96738
62°	8,97045	8,97352	8,97659	8,97966	8,98272	8,98579
63°	8,98885	8,99191	8,99497	8,99803	9,00109	9,00414
64°	9,00720	9,01026	9,01331	9,01637	9,01942	9,02247
65°	9,02553	9,02858	9,03163	9,03469	9,03774	9,04079
66°	9,04385	9,04690	9,04996	9,05301	9,05607	9,05912
67°	9,06218	9,06524	9,06830	9,07136	9,07442	9,07748
68°	9,08055	9,08361	9,08668	9,08975	9,09282	9,09590
69°	9,09897	9,10205	9,10513	9,10821	9,11130	9,11439
70°	9,11748	9,12057	9,12367	9,12677	9,12987	9,13298
71°	9,13609	9,13920	9,14232	9,14544	9,14857	9,15170
72°	9,15484	9,15798	9,16113	9,16428	9,16743	9,17059
73°	9,17376	9,17693	9,18011	9,18330	9,18649	9,18969
74°	9,19289	9,19610	9,19932	9,20255	9,20578	9,20903
75°	9,21228	9,21554	9,21880	9,22208	9,22537	9,22866
76°	9,23197	9,23528	9,23861	9,24194	9,24529	9,24865
77°	9,25202	9,25540	9,25879	9,26220	9,26562	9,26906
78°	9,27250	9,27597	9,27944	9,28294	9,28645	9,28997
79°	9,29351	9,29707	9,30065	9,30424	9,30786	9,31150
80°	9,31515	9,31883	9,32253	9,32625	9,32999	9,33376
81°	9,33756	9,34138	9,34523	9,34910	9,35301	9,35694
82°	9,36091	9,36491	9,36894	9,37301	9,37712	9,38127
83°	9,38545	9,38968	9,39395	9,39827	9,40263	9,40705
84°	9,41152	9,41604	9,42063	9,42527	9,42998	9,43476
85°	9,43962	9,44455	9,44956	9,45466	9,45985	9,46514
86°	9,47054	9,47605	9,48169	9,48746	9,49338	9,49945
87°	9,50569	9,51213	9,51877	9,52565	9,53278	9,54021
88°	9,54798	9,55613	9,56472	9,57384	9,58359	9,59412
89°	9,60564	9,61844	9,63302	9,65025	9,67196	9,70342

φ	$\alpha = 0^0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 70^0$	$\alpha = 80^0$	$\alpha = 90^0$
2°	0,03491	0,03491	0,03491	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490	0,03490
4°	0,06981	0,06981	0,06981	0,06980	0,06979	0,06978	0,06977	0,06976	0,06976	0,06976
6°	0,10472	0,10471	0,10470	0,10467	0,10464	0,10461	0,10458	0,10455	0,10453	0,10453
8°	0,13963	0,13961	0,13957	0,13951	0,13944	0,13936	0,13929	0,13923	0,13919	0,13917
10°	0,17453	0,17451	0,17443	0,17431	0,17417	0,17401	0,17387	0,17375	0,17367	0,17365
12°	0,20944	0,20939	0,20926	0,20906	0,20881	0,20855	0,20830	0,20809	0,20796	0,20791
14°	0,24435	0,24427	0,24406	0,24374	0,24335	0,24293	0,24253	0,24221	0,24200	0,24192
16°	0,27925	0,27914	0,27883	0,27836	0,27777	0,27714	0,27655	0,27606	0,27575	0,27564
18°	0,31416	0,31401	0,31357	0,31289	0,31205	0,31116	0,31032	0,30963	0,30917	0,30902
20°	0,34907	0,34886	0,34825	0,34733	0,34619	0,34496	0,34381	0,34286	0,34224	0,34202
22°	0,38397	0,38370	0,38290	0,38167	0,38015	0,37853	0,37699	0,37572	0,37490	0,37461
24°	0,41888	0,41852	0,41749	0,41590	0,41394	0,41183	0,40983	0,40819	0,40711	0,40674
26°	0,45379	0,45333	0,45203	0,45002	0,44753	0,44486	0,44232	0,44023	0,43885	0,43837
28°	0,48869	0,48813	0,48651	0,48402	0,48092	0,47759	0,47441	0,47180	0,47007	0,46947
30°	0,52360	0,52292	0,52094	0,51788	0,51409	0,51000	0,50609	0,50287	0,50074	0,50000
32°	0,55851	0,55768	0,55530	0,55161	0,54703	0,54207	0,53733	0,53341	0,53082	0,52992
34°	0,59341	0,59243	0,58959	0,58520	0,57972	0,57379	0,56811	0,56340	0,56028	0,55919
36°	0,62832	0,62716	0,62382	0,61864	0,61217	0,60515	0,59841	0,59280	0,58909	0,58779
38°	0,66323	0,66188	0,65798	0,65193	0,64436	0,63612	0,62820	0,62159	0,61720	0,61566
40°	0,69813	0,69658	0,69207	0,68506	0,67628	0,66671	0,65746	0,64974	0,64459	0,64279
42°	0,73304	0,73126	0,72609	0,71804	0,70793	0,69688	0,68619	0,67722	0,67124	0,66913
44°	0,76794	0,76592	0,76003	0,75085	0,73931	0,72665	0,71435	0,70401	0,69710	0,69466
46°	0,80285	0,80056	0,79390	0,78350	0,77040	0,75599	0,74195	0,73010	0,72215	0,71934
48°	0,83776	0,83518	0,82770	0,81599	0,80121	0,78490	0,76896	0,75546	0,74636	0,74314
50°	0,87266	0,86979	0,86142	0,84832	0,83173	0,81338	0,79538	0,78007	0,76971	0,76604
52°	0,90757	0,90438	0,89507	0,88048	0,86197	0,84143	0,82120	0,80391	0,79218	0,78801
54°	0,94248	0,93895	0,92865	0,91248	0,89193	0,86904	0,84641	0,82698	0,81374	0,80902
56°	0,97738	0,97350	0,96216	0,94433	0,92160	0,89622	0,87101	0,84926	0,83436	0,82904
58°	1,01229	1,00803	0,99560	0,97602	0,95100	0,92297	0,89500	0,87075	0,85404	0,84805
60°	1,04720	1,04255	1,02897	1,00756	0,98013	0,94930	0,91839	0,89144	0,87276	0,86603
62°	1,08210	1,07705	1,06228	1,03895	1,00900	0,97521	0,94118	0,91132	0,89049	0,88295
64°	1,11701	1,11154	1,09553	1,07020	1,03762	1,00072	0,96339	0,93041	0,90273	0,89879
66°	1,15192	1,14601	1,12871	1,10132	1,06599	1,02585	0,98502	0,94870	0,92297	0,91355
68°	1,18682	1,18047	1,16185	1,13231	1,09413	1,05060	1,00609	0,96622	0,93731	0,92718
70°	1,22173	1,21491	1,19493	1,16318	1,12205	1,07500	1,02664	0,98298	0,95144	0,93969
72°	1,25664	1,24935	1,22796	1,19394	1,14977	1,09907	1,04668	0,99900	0,96417	0,95106
74°	1,29154	1,28377	1,26094	1,22459	1,17731	1,12283	1,06624	1,01431	0,97590	0,96126
76°	1,32645	1,31818	1,29389	1,25516	1,20467	1,14631	1,08537	1,02896	0,98667	0,97030
78°	1,36136	1,35258	1,32680	1,28565	1,23189	1,16954	1,10410	1,04300	0,99650	0,97815
80°	1,39626	1,38698	1,35968	1,31606	1,25897	1,19255	1,12249	1,05648	1,00543	0,98481
82°	1,43117	1,42137	1,39254	1,34641	1,28594	1,21538	1,14057	1,06948	1,01354	0,99027
84°	1,46608	1,45575	1,42537	1,37672	1,31282	1,23805	1,15841	1,08207	1,02091	0,99452
86°	1,50098	1,49013	1,45819	1,40699	1,33963	1,26061	1,17606	1,09435	1,02768	0,99756
88°	1,53589	1,52451	1,49100	1,43723	1,36640	1,28310	1,19359	1,10642	1,03401	0,99936
90°	1,57080	1,55889	1,52380	1,46746	1,39314	1,30554	1,21106	1,11838	1,04011	1,00000

α	E	α	E	α	E
1°	1,57068	31°	1,46077	61°	1,20154
2°	1,57032	32°	1,45391	62°	1,19205
3°	1,56972	33°	1,44687	63°	1,18259
4°	1,56888	34°	1,43966	64°	1,17318
5°	1,56781	35°	1,43229	65°	1,16383
6°	1,56650	36°	1,42476	66°	1,15455
7°	1,56495	37°	1,41707	67°	1,14535
8°	1,56296	38°	1,40924	68°	1,13624
9°	1,56114	39°	1,40126	69°	1,12725
10°	1,55889	40°	1,39314	70°	1,11838
11°	1,55640	41°	1,38489	71°	1,10964
12°	1,55368	42°	1,37650	72°	1,10106
13°	1,55073	43°	1,36800	73°	1,09265
14°	1,54755	44°	1,35938	74°	1,08443
15°	1,54415	45°	1,35064	75°	1,07641
16°	1,54052	46°	1,34181	76°	1,06861
17°	1,53667	47°	1,33287	77°	1,06106
18°	1,53260	48°	1,32384	78°	1,05378
19°	1,52831	49°	1,31473	79°	1,04679
20°	1,52380	50°	1,30554	80°	1,04011
21°	1,51908	51°	1,29628	81°	1,03379
22°	1,51415	52°	1,28695	82°	1,02784
23°	1,50901	53°	1,27757	83°	1,02231
24°	1,50366	54°	1,26815	84°	1,01724
25°	1,49811	55°	1,25868	85°	1,01266
26°	1,49237	56°	1,24918	86°	1,00865
27°	1,48643	57°	1,23966	87°	1,00526
28°	1,48029	58°	1,23013	88°	1,00258
29°	1,47397	59°	1,22059	89°	1,00075
30°	1,46746	60°	1,21106	90°	1,00000

Fünftes Kapitel.

Anwendungen der elliptischen Functionen.

Gauss spricht gegen Ende des Art. 8 seiner nachgelassenen Abhandlung *„De origine numerorum mediorum arithmetico-geometricorum“* *), welche mit der Theorie der elliptischen Functionen, wie oben bemerkt, aufs engste zusammenhängt, die Hoffnung aus, dass durch diese Abhandlung Denjenigen, welche die göttliche Schönheit der ewigen Wahrheiten jener Entwicklungen nicht fassen, die jedoch deren Wert aus ihrer Verwendbarkeit in verschiedenen Gebieten der angewandten Mathematik zu schätzen wüssten, ein wärmeres Interesse an den fraglichen Entdeckungen verliehen würde. Seit zu Euler's Zeiten die Rectification der Ellipse und Hyperbel den Anlass bot, tiefer in die Natur der „elliptischen Integrale“ einzudringen, hat in der That die Theorie der elliptischen Functionen ebenso sehr das Interesse des Theoretikers gefesselt, wie sie im Gebiete der Anwendungen bei zahlreichen tiefer gehenden Untersuchungen zu einem wertvollen Hilfsmittel wurde.

Es ist hier nur beabsichtigt, von den bekanntesten Anwendungen einige Proben zu geben. Wir stellen hierbei das Gebiet der Geometrie voran, indem wir von der Beziehung der elliptischen Functionen zu den *„Poncelet'schen Polygonen“*, sowie zur *„sphärischen Trigonometrie“* handeln. Auch bei den dann folgenden Untersuchungen, die *„geodätischen Linien auf dem Sphäroid“* und die *„elliptischen Coordinaten“* betreffend, handelt es sich zunächst um geometrische Anwendungen. Doch kommt die erstere Entwicklung unmittelbar in der Geodäsie, letztere in verschiedenen Gebieten der mathematischen Physik zur Geltung. Aus der Mechanik sollen das *„sphärische Pendel“* und die *„kräftefreie Bewegung eines starren Körpers um einen Punkt“* behandelt werden. Einige auf diese Gegenstände bezügliche litterarische Nachweisungen sollen unten nachgetragen werden.

Die neueren Lehrbücher über elliptische Functionen (cf. pg. 175)

---

*) Gauss' Werke, Bd. 3 pg. 371.

behandeln in der Regel auch einige Anwendungen derselben. Wir erwähnen in dieser Hinsicht neben den a. a. O. genannten Büchern auch noch A. G. Greenhill, *The applications of elliptic functions**). Allen voran steht der zweite Band von Halphen's „*Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*"**), wo man über die weitverzweigten Anwendungen der elliptischen Functionen den umfassendsten Überblick findet.

§ 1. Jacobi's Theorie der Poncelet'schen Polygone.

In der Abhandlung „*Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie*" ***) hat Jacobi eine Theorie der alsbald näher zu definierenden Poncelet'schen Polygone entworfen, welche wir von den Additionstheoremen der Functionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ aus ohne Mühe verstehen werden.

Wir knüpfen an ein elliptisches Integral:

$$w = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

in welchem k^2 reell und $0 < k^2 < 1$ ist, beschränken w auf reelle Werte und können demnach φ als reellen Winkel deuten. Der doppelte Winkel 2φ heisse ψ:

$$(1) \qquad \psi = 2\varphi = 2 \operatorname{am} w.$$

Wir deuten ψ als Bogen auf einem Kreise vom Radius 1 und legen zur Orientierung in der Ebene dieses Kreises rechtwinklige Coordinaten x, y zu Grunde; der Kreismittelpunkt soll Nullpunkt des Coordinatensystems sein, und es soll $\psi = 0$ im Punkte $x = 1$, $y = 0$, sowie $\psi = \frac{\pi}{2}$ im Punkte $x = 0$, $y = 1$ zutreffen, so dass $x = \cos\psi$, $y = \sin\psi$ auf dem Kreise gelten wird.

Die reellen Werte w und diejenigen von ψ sind vermöge (1) *eindeutig* einander zugeordnet. Die reelle w-Axe wird damit auf die Kreisperipherie 1-∞-deutig bezogen sein; die Punkte $w, w \pm 2K, w \pm 4K, \cdots$ liefern sämtlich die gleiche Stelle der Peripherie; $w = K$ liefert $\psi = \pi$.

Man wähle jetzt einen beliebigen reellen Anfangswert w_0 von w und einen gleichfalls beliebigen reellen Zahlwert s, welcher letzterer jedoch dem Intervall $0 < s < K$ angehören soll. Vom Punkte w_0 aus

---

*) London 1892. **) Paris 1888.

***) Journal für Mathematik, Bd. 3 pg. 376 oder Jacobi's gesammelte Werke, Bd. 1 pg. 278.

trage man auf der reellen w-Axe nach rechts und links unendlich oft die Strecke s ab, wodurch die Punkte w_0, $w_0 \pm s$, $w \pm 2s$, $w_0 \pm 3s, \cdots$ markiert werden. Die zugehörigen Punkte der Kreisperipherie nennen wir P_0, $P_{\pm 1}, \ldots$, wobei also P_n dem Werte $(w_0 + ns)$ und damit dem Winkel:

$$\psi_n = 2\varphi_n = 2\,\mathrm{am}\,(w_0 + ns) \tag{2}$$

entspricht. Indem wir jeden Punkt P_{n-1} mit dem folgenden P_n durch eine Sehne des Kreises verbinden, entspringt ein diesem Kreise eingeschriebenes Polygon. Wir stellen die Aufgabe, die Gestalt dieses Polygons näher zu erforschen.

Durch Combination der beiden Formeln (4) und (5) pg. 250, welche die Additionstheoreme für die Functionen cn und dn darstellen, findet man:

$$\mathrm{cn}\,(w + w_1) = \mathrm{cn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w_1 - \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}\,w_1 \cdot \mathrm{dn}\,(w + w_1).$$

Man trage hier im speciellen ein $w = w_0 + ns$, $w_1 = -w_0 - (n-1)s$, wodurch man erhält:

$$\mathrm{cn}\,s = \cos\varphi_n \cos\varphi_{n-1} + \sin\varphi_n \sin\varphi_{n-1}\,\mathrm{dn}\,s,$$

$$2\,\mathrm{cn}\,s = \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})(1 + \mathrm{dn}\,s) + \cos(\varphi_n + \varphi_{n-1})(1 - \mathrm{dn}\,s). \tag{3}$$

Der Punkt P_m hat aber die Coordinaten $\cos 2\varphi_m$, $\sin 2\varphi_m$, so dass die Gleichung der Sehne $\overline{P_{n-1}P_n}$ die Gestalt gewinnt:

$$x\cos(\varphi_n + \varphi_{n-1}) + y\sin(\varphi_n + \varphi_{n-1}) - \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0. \tag{4}$$

Man berechne den Abstand des durch Q zu bezeichnenden Punktes der Coordinaten:

$$x = -\frac{1 - \mathrm{dn}\,s}{1 + \mathrm{dn}\,s}, \quad y = 0 \tag{5}$$

von der Geraden (4) und findet nach einer Elementarregel der analytischen Geometrie:

$$\pm r = -\frac{1}{1 + \mathrm{dn}\,s}\left[\cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})(1 + \mathrm{dn}\,s) + \cos(\varphi_n + \varphi_{n-1})(1 - \mathrm{dn}\,s)\right].$$

Da wegen $0 < s < K$ sowohl $\mathrm{dn}\,s$ wie $\mathrm{cn}\,s$ reell, positiv und < 1 sind, so ergiebt die Relation (3):

$$r = \frac{2\,\mathrm{cn}\,s}{1 + \mathrm{dn}\,s}. \tag{6}$$

Das Bemerkenswerte ist, *dass sowohl dieser Ausdruck von r wie auch die Coordinaten des Punktes Q allein von s abhängen: die sämtlichen Polygonseiten $\overline{P_{n-1}P_n}$ sind Tangenten eines und desselben Kreises mit dem Radius r um den Mittelpunkt Q.*

Dieser neue Kreis liegt gänzlich innerhalb des schon gezeichneten

Kreises vom Radius 1 *um den Nullpunkt.* Nennen wir nämlich die Abscisse von Q, die in (5) gegeben ist, kurz $x = -l$, so hat man einmal wegen $0 < \operatorname{dn} s < 1$:

$$l = \frac{1 - \operatorname{dn} s}{1 + \operatorname{dn} s} < 1,$$

sodann mit Rücksicht auf die offenbar gültige Ungleichung:

$$\operatorname{cn} s = \sqrt{1 - \operatorname{sn} s^2} < \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn} s^2} = \operatorname{dn} s,$$

sowie wegen $0 < \operatorname{cn} s < 1$:

$$l + r = \frac{1 - \operatorname{dn} s + 2 \operatorname{cn} s}{1 + \operatorname{dn} s} < 1.$$

Wir haben damit folgendes sehr elegante Ergebnis gewonnen: *Ist s (und übrigens k^2) gegeben, so ist, ganz gleichgültig von welchem Anfangswerte w_0 resp. ersten Eckpunkte P_0 wir ausgehen, das Polygon $\cdots P_{-1} P_0 P_1 \cdots$ einfach dadurch bestimmt, dass seine Ecken auf dem Kreise des Radius* 1 *um den Nullpunkt liegen, während seine Seiten Tangenten an den mit s und k^2 eindeutig bestimmten Kreis des Radius r um Q sind.* Figur 80 illustriert die Construction unseres Polygons.

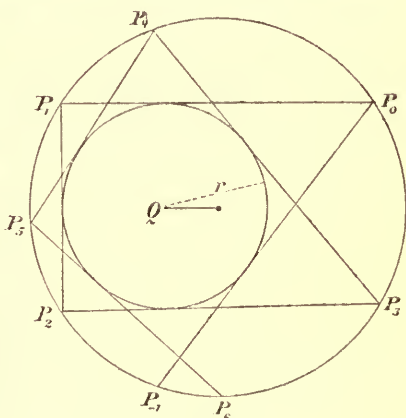


Fig. 80.

Das erhaltene Resultat ist um so bemerkenswerter, *als man k^2 und s stets so bestimmen kann, dass der kleine Kreis mit einem ganz beliebigen innerhalb des grossen Kreises verlaufenden Kreise identisch wird.* Den Fall, dass beide Kreise concentrisch sind, können wir als elementar bei Seite lassen; hier ist $k^2 = 0$ zu nehmen und s aus $r = \cos s$ zu bestimmen. Sind aber beide Kreise nicht concentrisch, so wähle man wie oben als x-Axe die Verbindungslinie der beiden Centren u. s. w. Es sind dann l und r als positive, der Bedingung $l + r < 1$ genügende Grössen gegeben. Für $\operatorname{cn} s$ und $\operatorname{dn} s$ findet man:

$$(7) \qquad \operatorname{cn} s = \frac{r}{1+l}, \quad \operatorname{dn} s = \frac{1-l}{1+l},$$

so dass die Relation $1 - \operatorname{dn} s^2 = k^2 (1 - \operatorname{cn} s^2)$ auf Werte:

$$(8) \qquad k^2 = \frac{4l}{(1+l)^2 - r^2}, \quad k'^2 = \frac{(1-l)^2 - r^2}{(1+l)^2 - r^2}$$

führt, die wegen $1 - l > r$ positive echte Brüche sind. Weiter bestimmt sich daraufhin aus der ersten Gleichung (7) mit Rücksicht auf die Werteverteilung der Functionen cn und dn (cf. pg. 238) eindeutig ein zugehöriger, im Intervall $0 < s < K$ enthaltener Wert s. Unsere Behauptung, es gäbe für jeden innerhalb des grossen Kreises gelegenen kleinen Kreis ein Wertepaar k^2, s, ist damit bewiesen.

Poncelet*) hat ganz allgemein geradlinige Polygone betrachtet, welche einem ersten Kegelschnitt eingeschrieben und zugleich einem zweiten umgeschrieben sind, Polygone, die eben dieserhalb als „Poncelet'sche" bezeichnet werden. Beide Kegelschnitte sollen keinen Punkt gemein haben, und dabei soll der eine Kegelschnitt den anderen in dem Sinne umschliessen, dass man von den Punkten des ersteren (reelle) Tangenten an den letzteren soll ziehen können, aber nicht umgekehrt von den Punkten des letzteren solche an den ersteren. Übrigens ist die Poncelet'sche Construction nur scheinbar allgemeiner als der oben entwickelte Ansatz; denn man kann zeigen, dass ein solches Kegelschnittpaar stets collinear in ein Kreispaar unserer Art transformiert werden kann. Jacobi's Anwendung der elliptischen Functionen gilt demnach für alle Poncelet'schen Polygone.

Es ist eine besonders interessante Frage, unter welchen Umständen sich die Construction eines einzelnen Poncelet'schen Polygons von selber schliesst. Tritt der Schluss nach Construction von n Seiten ein, so muss der Punkt P_n wieder mit dem ersten Eckpunkte P_0 identisch sein, sowie dann weiter P_{n+1} mit P_1 u. s. w.

Die Jacobi'sche Theorie wirft auf diese Verhältnisse ein helles Licht. Man hat folgende Fallunterscheidung zu machen:

1. Die Zahl s stehe zu $2K$ in irrationalem Verhältnis. Dann liefern keine zwei unter den unendlich vielen Werten $w_0, w_0 \pm 2s, \cdots$ den gleichen Punkt P der Kreisperipherie. Die Construction des Poncelet'schen Polygons führt unaufhörlich zu neuen Seiten, welche (wie man leicht beweisen kann) den zwischen unseren beiden Kreisen gelegenen ringförmigen Bereich schliesslich überall dicht bedecken.

2. Es bestehe die Proportion $s : 2K = m : n$, wo m und n ganze Zahlen ohne gemeinsamen Factor sind. Dann ist $w_0 + ns = w_0 + m \cdot 2K$; unter allen Punkten P sind nur n verschiedene $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$, während P_n mit P_0 zusammenfällt, P_{n+1} mit P_1 u. s. w. Wir gelangen zu einem geschlossenen Polygone von n Seiten, welches sich m Male um den inneren Kreis herumwindet. Interessant ist, dass diese

*) Siehe dessen grundlegendes Werk *„Traité des propriétés projectives des figures"* (Paris, 1822) pg. 360 ff.

Angabe wieder von der Auswahl des ersten Eckpunktes P_0 resp. des Anfangswertes w_0 unabhängig ist. Es entspringt das Theorem: *Hat man von einem Punkte P_0 des äusseren Kreises aus ein geschlossenes m-fach gewundenes Poncelet'sches Polygon von n Seiten gewonnen, so liefert jeder andere auf dem äusseren Kreise gelegene Anfangspunkt P_0' ein m-fach gewundenes Poncelet'sches n-Eck.* Es ist hiermit eines der Hauptergebnisse der Poncelet'schen Theorie ausgesprochen.

§ 2. Sphärische Trigonometrie und elliptische Functionen.

Die Werte der Jacobi'schen Functionen mit reellen Argumenten w und reellem Modul k^2 gestatten eine sehr interessante Deutung durch die trigonometrischen Functionen der Seiten und Winkel sphärischer Dreiecke. Diese Beziehung zwischen der Theorie der elliptischen Functionen und der sphärischen Trigonometrie entdeckte Lagrange*) aus der Analogie in der Bauart von Formeln, welche in den beiden genannten Disciplinen auftreten. Es soll sich hier nur um die Grundlagen der gedachten Beziehung handeln, wobei wir zur Abkürzung der Darstellung von einigen gleich zu nennenden beschränkenden Voraussetzungen Gebrauch machen.

Auf der Oberfläche einer Kugel, der wir etwa den Radius 1 geben, sei ein sphärisches Dreieck gezeichnet, dessen Seiten und Winkel durchgehends $< \pi$ sein mögen. Die Seiten sollen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ heissen, die ihnen gegenüberliegenden Winkel bez. ψ_1, ψ_2, ψ_3. Zufolge des Sinussatzes ist:

$$(1) \qquad \frac{\sin \psi_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \psi_2}{\sin \varphi_2} = \frac{\sin \psi_3}{\sin \varphi_3}.$$

Der gemeinsame Wert dieser drei Quotienten werde k genannt:

$$(2) \qquad \sin \psi_1 = k \sin \varphi_1, \quad \sin \psi_2 = k \sin \varphi_2, \quad \sin \psi_3 = k \sin \varphi_3,$$

und es soll die *beschränkende Annahme* gemacht werden, *dass $k < 1$ ist.* Man kann diese Forderung in die Ungleichung:

$$(3) \qquad \left| \frac{\pi}{2} - \varphi_\nu \right| < \left| \frac{\pi}{2} - \psi_\nu \right|, \quad \nu = 1, 2, 3$$

kleiden und findet so z. B., dass *rechtwinklige Dreiecke ausgeschlossen* sind.

Um jedoch weitere Angaben über die Dreiecke mit $k < 1$ zu machen, nehmen wir an, ein einzelnes solches Dreieck habe wenigstens einen spitzen Winkel, etwa ψ_1. Die gegenüberliegende Seite φ_1 ist alsdann $> \psi_1$. Denken wir daher vorerst das Kugelzweieck mit den

*) Siehe das Kapitel XI im ersten Teile von Lagrange's *„Théorie des fonctions analytiques“* (Paris, 1813), Oeuvres, t. 9.

beiden Winkeln ψ_1 gezeichnet, so giebt es, wie ein Blick auf Figur 81 lehrt, wegen $\varphi_1 > \psi_1$ zwei einander symmetrische Scharen von Dreiecken mit diesen φ_1, ψ_1. Einer dieser Scharen gehört das gedachte Dreieck an. Ein rechtwinkliges Dreieck kommt in keiner der beiden Scharen

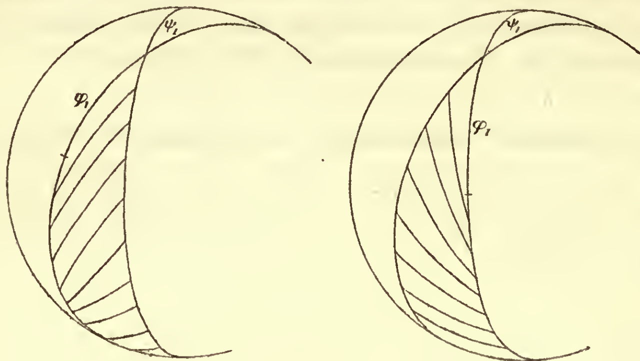


Fig. 81.

vor; und eben deshalb erkennt man wieder unmittelbar aus der Figur, dass in jedem fraglichen Dreiecke neben ψ_1 noch ein spitzer Winkel auftritt, während der dritte Winkel stumpf ist.

Man bemerke nun, dass ein sphärisches Dreieck längs jeder Seite ein benachbartes Dreieck besitzt, welches mit jenem zusammen ein sphärisches Zweieck ausmacht. Die Bestimmungsstücke zweier solcher benachbarten Dreiecke können aufs leichteste aus einander berechnet werden, und insbesondere haben beide immer dasselbe k. Unter den drei benachbarten Dreiecken unseres oben gegebenen Dreiecks ist nun offenbar eines enthalten, welches drei stumpfe Winkel hat. Merken wir somit den folgenden (übrigens nicht umkehrbaren) Satz an: *Ein sphärisches Dreieck mit $k < 1$ hat entweder drei stumpfe Winkel, oder zwei Winkel sind spitz und der dritte ist stumpf.*

Es ist hiernach keine wesentliche Einschränkung mehr, wenn wir uns zunächst zur Betrachtung eines *Dreiecks mit drei stumpfen Winkeln* wenden.

Die Beziehung zur Theorie der elliptischen Functionen wird alsdann dadurch vermittelt, dass wir unter Benutzung des hier vorliegenden Wertes k für die Seiten des Dreiecks:

$$(4) \qquad \varphi_1 = \mathrm{am}\,(w_1, k^2), \quad \varphi_2 = \mathrm{am}\,(w_2, k^2), \quad \varphi_3 = \mathrm{am}\,(w_3, k^2)$$

ansetzen, wobei die Argumente w_ν, die dem Intervall $0 < w_\nu < 2K$ angehören sollen, mit φ_ν eindeutig bestimmt sind.

Aus $\psi_\nu > \frac{\pi}{2}$ folgt $\cos\psi_\nu < 0$. Aus (2) aber ergiebt sich:

$$\cos^2\psi_\nu = 1 - k^2 \sin^2\varphi_\nu = (\mathrm{dn}\, w_\nu)^2.$$

Da nun die Function $\mathrm{dn}\, w$ bei reellem $k < 1$ für alle dem Intervall $0 < w < 2K$ angehörenden Argumente w reell und positiv ist (pg. 238), so entspringt als erstes Ergebnis: *Die Cosinus der Winkel ψ_ν des sphärischen Dreiecks stellen sich in den Argumenten w_ν vermöge der Function* $\mathrm{dn}\, w$ *so dar:*

$$(5)\quad \cos\psi_1 = -\mathrm{dn}\, w_1, \quad \cos\psi_2 = -\mathrm{dn}\, w_2, \quad \cos\psi_3 = -\mathrm{dn}\, w_3.$$

Aus den Additionsformeln (3), (4), (5) pg. 250 entnehmen wir:

$$\mathrm{cn}\,(w_1 + w_2) + \mathrm{dn}\,(w_1 + w_2)\,\mathrm{sn}\, w_1\,\mathrm{sn}\, w_2 = \mathrm{cn}\, w_1\,\mathrm{cn}\, w_2,$$

$$\mathrm{cn}\,(w_1 + w_2)\cdot k^2\,\mathrm{sn}\, w_1\,\mathrm{sn}\, w_2 + \mathrm{dn}\,(w_1 + w_2) = \mathrm{dn}\, w_1\,\mathrm{dn}\, w_2,$$

zwei Gleichungen, welche wir auch in die Gestalt setzen können:

$$(6)\quad \begin{aligned} \mathrm{cn}\,(w_1 + w_2) + \mathrm{dn}\,(w_1 + w_2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2 &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2,\\ \mathrm{cn}\,(w_1 + w_2)\sin\psi_1\sin\psi_2 + \mathrm{dn}\,(w_1 + w_2) &= \cos\psi_1\cos\psi_2. \end{aligned}$$

Sieht man diese beiden Gleichungen als solche für die Unbekannten $\mathrm{cn}\,(w_1 + w_2)$, $\mathrm{dn}\,(w_1 + w_2)$ an, so erscheinen diese in $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ eindeutig bestimmt, da die Determinante der Gleichungen (6):

$$1 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\psi_1\sin\psi_2 > 0$$

ist. Andrerseits folgert man aus dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie:

$$(7)\quad \begin{aligned} \cos\varphi_3 - \cos\psi_3\sin\varphi_1\sin\varphi_2 &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2,\\ \cos\varphi_3\sin\psi_1\sin\psi_2 - \cos\psi_3 &= \cos\psi_1\cos\psi_2. \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung der Structur zwischen diesen der sphärischen Trigonometrie entnommenen Gleichungen und den eben aus den Additionsformeln der elliptischen Functionen abgeleiteten Relationen liegt auf der Hand; und in der That waren es derartige Analogien, welche, wie berichtet, zuerst Lagrange erkannte. Sehen wir in (7) Bestimmungsgleichungen für $\cos\varphi_3$ und $-\cos\psi_3$, so liegen genau dieselben Coefficienten wie bei $\mathrm{cn}\,(w_1 + w_2)$ und $\mathrm{dn}\,(w_1 + w_2)$ in (6) vor; es folgt:

$$\mathrm{cn}\,(w_1 + w_2) = \cos\varphi_3 = \mathrm{cn}\, w_3, \quad \mathrm{dn}\,(w_1 + w_2) = -\cos\psi_3 = \mathrm{dn}\, w_3.$$

Da nun $w_1 + w_2$ im Intervall zwischen 0 und $4K$ gelegen ist, so ergiebt sich aus diesen Gleichungen bei der Werteverteilung der Functionen $\mathrm{cn}\, w$ und $\mathrm{dn}\, w$ für reelle w, dass entweder $w_1 + w_2 = w_3$ oder $w_1 + w_2 = 4K - w_3$ stattfindet. Beide Fälle schliessen sich aus, da $w_3 < 2K$ ist. Wäre nun $w_1 + w_2 = w_3$, so würde eine der bisherigen genau analog gebaute Überlegung auf $w_1 + w_3 = w_2$ und damit auf

$w_1 = 0$ führen, was unmöglich ist, oder aber auf $w_1 + w_3 = 4K - w_2$ und damit auf $w_3 = 2K$, was gleichfalls unbrauchbar ist. Es entspringt so das Hauptresultat, welches hier abgeleitet werden sollte: *Für die Seiten jedes durchaus stumpfwinkligen sphärischen Dreiecks mit $k < 1$ besteht die Relation:*

$$(8) \qquad w_1 + w_2 + w_3 = 4K.$$

Von hieraus sieht man ein, *dass die Additionsformeln der elliptischen Functionen, d. i. Gleichungen, welche die Functionen von $(w_1 + w_2)$ mit denen von w_1 und w_2 einzeln verbinden, insgesamt auch als Formeln der sphärischen Trigonometrie gedeutet werden können.*

Wir kommen endlich nochmals auf eines der drei mit unserem stumpfwinkligen Dreieck benachbarten Dreiecke zurück und wenden auf dieses gleich wieder die bisherigen Bezeichnungen φ_ν, ψ_ν, w_ν an. Seien etwa ψ_1 und ψ_2 die beiden spitzen Winkel; man gewinnt dann aus (3) für unser Dreieck leicht:

$$(9) \qquad w_1 + w_2 = w_3,$$

da in der That die obigen Seiten φ_1, φ_2 jetzt durch ihre Supplemente zu ersetzen sind.

Das sphärische Dreieck liefert hier offenbar ein Mittel, bei Angabe von k^2, $\varphi_1 = \operatorname{am} w_1$ und $\varphi_2 = \operatorname{am} w_2$ durch Construction zur Kenntnis von $\varphi_3 = \operatorname{am}(w_1 + w_2)$ zu gelangen. Man bestimme nämlich ψ_1 aus $\sin\psi_1 = k \sin\varphi_1$ und zeichne, wie Figur 82 ausführt, das sphärische Dreieck mit einem Winkel ψ_1 und zwei Seiten φ_1, φ_2, wobei der von den beiden letzteren eingeschlossene Winkel $> \frac{\pi}{2}$ sein muss. Die dritte Seite $\widehat{AB_1}$ des Dreiecks liefert dann $\varphi_3 = \operatorname{am}(w_1 + w_2)$. In Figur 82 ist die gleiche Construction noch mehrfach wiederholt. Von B_1 aus ist unter stumpfem Winkel gegen $\widehat{AB_1}$ die Seite $\widehat{B_1 B_2} = \varphi_1$ erneut eingetragen und von B_2 aus wieder unter stumpfem Winkel gegen $\widehat{AB_2}$ wiederum $\widehat{B_2 B_3} = \varphi_1$ gemacht u. s. w. Man erkennt sofort, dass

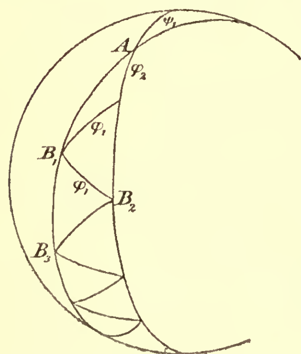


Fig. 82.

$$\widehat{AB_2} = \operatorname{am}(2w_1 + w_2), \quad \widehat{AB_3} = \operatorname{am}(3w_1 + w_2), \cdots$$

zutreffen wird. Diese Construction leistet hiernach in beschränkterem Umfange dasselbe, wie diejenige des Poncelet'schen Polygones, welches zum vorliegenden k und zu $s = w_1$, $w_0 = w_2$ gehört.

§ 3. Geodätische Linien auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Eine zunächst beliebige Oberfläche sei in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Zwischen zwei auf dieser Fläche gelegenen Punkten P_1 und P_2 sei ein elastischer Faden gespannt, der gezwungen sein soll, längs seines ganzen Verlaufes der Fläche anzugehören. Der Faden habe eine Lage angenommen, in welcher sich jeder seiner Punkte im Gleichgewicht befindet. Würde man alsdann unter Festhaltung von P_1 und P_2 dem Faden auf der Oberfläche eine Verschiebung erteilen, so muss, wie die letztere auch vollzogen wird, zunächst eine Dehnung des Fadens eintreten. *Der Faden stellt hiernach eine Verbindungslinie von P_1 und P_2 dar, welche im Vergleich zu allen in seiner nächsten Umgebung gleichfalls auf der Fläche von P_1 nach P_2 laufenden Linien eine „kürzeste" ist.* Eine Curve dieser Art heisst *eine „geodätische Linie" auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$.*

Wir denken uns den gespannten Faden als eine Kette von Punkten, von denen sich je zwei benachbarte in Richtung ihrer Verbindungsgeraden anziehen. Unter drei consecutiven Punkten wird sonach der mittlere von den beiden äusseren mit zwei Kräften angezogen, deren Richtungen in der Ebene durch jene drei Punkte, d. i. in der zum mittleren Punkte gehörenden Osculationsebene der geodätischen Linie gelegen sind. Die Resultante beider Kräfte wird gleichfalls dieser Ebene angehören. Aber diese Resultante ist, da sich der Punkt im Gleichgewicht befindet, senkrecht gegen die Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ gerichtet. Wir gelangen damit zu einer rein geometrischen Definition der geodätischen Linien: *Eine auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$ gelegene Curve, welche die Eigenschaft hat, dass jede ihrer Osculationsebenen die zugehörige Flächennormale enthält, heisst eine geodätische Linie der Fläche.*

Die Normalebene der geodätischen Linie im einzelnen Punkte enthält offenbar gleichfalls die zugehörige Flächennormale. Man kann demnach die ausgesprochene Eigenschaft der geodätischen Linien auch dahin formulieren, *dass der Schnitt der Normal- und Osculationsebene, d. i. die Hauptnormale der Curve an der einzelnen Stelle, mit der Flächennormale zusammenfällt.*

Aus dieser letzteren Angabe leiten wir die Differentialgleichungen der geodätischen Linien ab. Die Coordinaten x, y, z des einzelnen Curvenpunktes fassen wir als Functionen der Bogenlänge s, gerechnet von irgend einem Anfangspunkte auf der Curve, auf. Dann zeigt man in den Anwendungen der Differentialrechnung auf Raumgeometrie, dass die Richtungscosinus der Hauptnormale sich gerade so zu einander

verhalten, wie $\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2}$. Andererseits verhalten sich die Richtungscosinus der Flächennormale an der einzelnen Stelle x, y, z, wie $\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$. *Als Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf der Fläche* $f(x, y, z) = 0$ *entspringen somit:*

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \tau \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \tau \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \tau \frac{\partial f}{\partial z},$$

unter τ *einen (von* x, y, z *abhängenden) Proportionalitätsfactor verstanden.*

Man wende diesen Ansatz auf den Fall an, dass die gegebene Fläche ein *abgeplattetes Rotationsellipsoid* ist, und setze:

$$(2) \qquad f(x, y, z) = \frac{1}{2} b^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} a^2 z^2 - \frac{1}{2} a^2 b^2,$$

wo $2b$ die auf der z-Axe des Coordinatensystems gelegene Rotationsaxe und $2a$ die grosse Axe bedeuten, und wo $a > b$ ist. *Die Differentialgleichungen für die geodätischen Linien auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid* (2) *sind:*

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \tau b^2 x, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \tau b^2 y, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \tau a^2 z.$$

Durch Combination der beiden ersten Gleichungen folgt:

$$x \frac{d^2y}{ds^2} - y \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Die Integration liefert von hieraus:

$$(4) \qquad x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = c,$$

wo c eine längs der einzelnen geodätischen Linie constante Grösse ist. Um die Bedeutung von c zu erkennen, projicieren wir das Bogenelement ds auf die xy-Ebene; die Projection sei $ds_0 = ds \cdot \cos\eta$, unter η den Neigungswinkel von ds gegen die xy-Ebene verstanden. Das Element ds_0 verbindet die Punkte (x, y), $(x + dx, y + dy)$. Diese beiden Punkte liefern mit dem Nullpunkte des Coordinatensystems ein Dreieck, dessen doppelter Inhalt bekanntlich durch $\pm (x dy - y dx)$ gegeben ist. Verstehen wir andererseits unter p den senkrechten Abstand des Nullpunktes von der durch ds_0 festgelegten Geraden, so ist jener doppelte Inhalt auch durch $p ds_0$ darstellbar. Es folgt demnach $c ds = \pm p \cos\eta \, ds$, so dass $c = \pm p \cos\eta$ gilt. Der geometrischen Anschauung entnehmen wir damit das Resultat: *Es ist* c *jedenfalls absolut nicht grösser als die halbe grosse Axe* a:

$$(5) \qquad |c| \leq a.$$

An einer solchen Stelle, wo die geodätische Linie eine zur xy*-Ebene*

parallele Tangente besitzt, hat diese Linie die Entfernung $|c|$ *von der* z*-Axe.*

Um in der Integration unserer Differentialgleichungen fortzufahren, bemerke man nun, dass folgende Gleichung identisch gilt:

$$\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right](x^2+y^2)-\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)^2=\left(x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Hier kann man setzen:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2,\quad x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2),$$

$$x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}=c,\quad x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}=-\frac{a^2}{b^2}z\frac{dz}{ds}.$$

Es entspringt eine Relation, welche nach kurzer Zwischenrechnung die nachfolgende *gewöhnliche Differentialgleichung für* z^2 *als Function von* s liefert:

(6) $$\frac{a^2-b^2}{b^2}\left(\frac{d(z^2)}{ds}\right)^2=\frac{4z^2\left[\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2}-z^2\right]}{z^2+\frac{b^4}{a^2-b^2}}.$$

II. Darstellung der geodätischen Linien durch elliptische Functionen.

Die Gleichung (6) bietet Anlass zur Einführung der elliptischen Functionen. Wir berechnen erstlich drei reelle Grössen e_1, e_2, e_3 verschwindender Summe durch:

(7) $$b^2=e_2-e_3,\quad \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}=e_3-e_1.$$

Aus $a>b$ und $a\geqq|c|$ folgt in Übereinstimmung mit den allgemeinen Festsetzungen von pg. 216 die Ungleichung $e_1<e_3<e_2$. Wir setzen weiter:

(8) $$\frac{a^2-b^2}{b^2}z^2=e_3-\wp(u).$$

Dabei muss $\wp(u)$ reell und $\leqq e_3$ sein. Andererseits folgt aus der an Gleichung (4) angeschlossenen Betrachtung, dass für alle Punkte der einzelnen geodätischen Linie $x^2+y^2\geqq c^2$ und also $z^2\leqq\frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)$ ist. Die zweite Gleichung (7) liefert somit $\wp(u)\geqq e_1$. Merken wir also an: *Die in* (8) *eingeführte Function* $\wp(u)$ *hat reelle, dem Intervall* $e_1\leqq\wp(u)\leqq e_3$ *angehörende Werte.* In Anschluss an Figur 62 pg. 217 setzen wir demnach $u=u'+\frac{\omega_1}{2}$ und dürfen alsdann u' als *reelle* Variabele auffassen.

Die Differentialgleichung (6) transformiert sich jetzt auf die Form:

$$\wp'(u)^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{4(\wp(u)-e_3)(\wp(u)-e_1)}{\wp(u)-e_2}.$$

Benutzt man die zwischen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ bestehende Relation und führt die Bogenmessung auf der Curve so ein, dass s mit dem reellen Argumente $u' = u - \frac{\omega_1}{2}$ gleichzeitig wächst, so ergiebt sich als *Differentialgleichung für die Bogenlänge s der geodätischen Linie:*

$$(9) \qquad ds = (e_2 - \wp(u))du.$$

Die Integration der Gleichung (6) soll jetzt in der Art ausgeführt werden, dass wir $u' = u - \frac{\omega_1}{2}$ als unabhängige und unbeschränkte reelle Variabele ansehen und die zugehörigen Werte z und s als Functionen von u resp. u' darstellen. Zur Vereinfachung der Formeln wollen wir hierbei noch einen weiteren constanten Wert u_0 des Argumentes u einführen, der, in die Gleichung (8) eingetragen, $z = b$ liefert und also dem Scheitelpunkte des Ellipsoides entsprechen würde:

$$(10) \qquad a^2 - b^2 = e_3 - \wp(u_0).$$

Einen eindeutig bestimmten Wert u_0 dieser Art finden wir z. B. auf der imaginären u-Axe zwischen $\frac{1}{2}\omega_1$ und ω_1; dieser Wert u_0 werde gewählt. Für $u = \frac{\omega_1}{2}$ wird z^2 zu einem Maximum. Von dieser Stelle der geodätischen Linie werde der Bogen s gemessen. Aus (8) und (9) ergiebt sich dann sofort: *Im Argumente u stellen sich die z-Coordinate und die Bogenlänge s der geodätischen Linie durch die folgenden Gleichungen dar:*

$$(11) \qquad \begin{cases} z^2 = (e_2 - e_3)\dfrac{e_3 - \wp(u)}{e_3 - \wp(u_0)}, \\ s \;= \zeta(u) + e_2 u - \dfrac{1}{2}\eta_1 - \dfrac{1}{2}e_2\omega_1. \end{cases}$$

Um diese Formeln numerischen Berechnungen zugänglicher zu machen, rechnen wir sie auf die Jacobi'schen Functionen um. Wir berechnen aus (7) nach den Formeln (7) pg. 235 zugehörige positive echte Brüche k und k' und setzen übrigens:

$$w = u'\sqrt{e_2 - e_1} = \left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\sqrt{e_2 - e_1}, \quad w_0 = \left(u_0 - \frac{\omega_1}{2}\right)\sqrt{e_2 - e_1}.$$

Aus pg. 251 entwickelten Formeln entnehmen wir noch:

$$\wp(u) - e_3 = (e_1 - e_3)\frac{\wp(u') - e_2}{\wp(u') - e_1} = (e_1 - e_3)\,\mathrm{cn}\, w^2,$$

während aus der ebendort unter (5) angegebenen Relation zwischen $\zeta(u)$ und dem Legendre'schen Integral zweiter Gattung:

$$E(\varphi, k) = \int_0^w (1 - k^2 \operatorname{sn} w^2) dw$$

sich ohne Mühe die Gleichung folgern lässt:

$$\zeta(u) + e_2 u - \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2} e_2 \omega_1 = \sqrt{e_2 - e_1}\, E(\varphi, k).$$

Da w_0 auf der imaginären w-Axe zwischen 0 und iK' liegt, so ist $\operatorname{cn} w_0$ reell und positiv (cf. Formel (15) pg. 239). Indem wir demnach für $w = 0$ die Coordinate z positiv wählen, ergeben sich als *Ausdrücke von z und s durch die Legendre-Jacobi'schen Functionen:*

$$(12) \qquad z = b \frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{cn} w_0}, \quad s = \frac{b}{k'} E(\varphi, k). \text{ —}$$

Um jetzt auch x und y zu berechnen, entwickeln wir zunächst aus (7) und (10) die Darstellungen von a^2 und c^2:

$$(13) \qquad a^2 = e_2 - \wp(u_0), \quad c^2 = \frac{(e_1 - \wp(u_0))(e_2 - \wp(u_0))}{e_3 - \wp(u_0)}.$$

Erweitert man in der zweiten Formel rechts mit $(\wp(u_0) - e_3)$ und multipliciert mit -4, so folgt:

$$(2ic)^2 = \frac{4(\wp(u_0) - e_1)(\wp(u_0) - e_2)(\wp(u_0) - e_3)}{(\wp(u_0) - e_3)^2} = \left(\frac{\wp'(u_0)}{\wp(u_0) - e_3}\right)^2.$$

Das Vorzeichen von c wird zufolge Formel (4) davon abhängen, ob die Masszahl s des Bogens vom gewählten Anfangspunkte $w = 0$ nach der einen oder anderen Seite positiv gerechnet wird. Wir wählen $c > 0$, indem wir:

$$(14) \qquad 2ic = \frac{\wp'(u_0)}{\wp(u_0) - e_3}$$

setzen; denn $\wp'(u_0)$ ist negativ imaginär und $\wp(u_0)$ reell und $< e_3$.

Nun folgt aus (8) und (10):

$$(15) \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2) = \frac{a^2}{a^2 - b^2}(\wp(u) - \wp(u_0)).$$

Die linke Seite schreiben wir als Product der beiden Grössen $X = x + iy$, $Y = x - iy$ und finden unter Benutzung einer pg. 223 aufgestellten Relation:

$$(16) \quad \frac{d \log(XY)}{du} = \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(u_0)} = \zeta(u + u_0) + \zeta(u - u_0) - 2\zeta(u).$$

Andrerseits hat man:

$$d\log\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{YdX-XdY}{XY}=\frac{2i(xdy-ydx)}{XY}=\frac{2icds}{XY}.$$

Den Zähler $2icds$ wandele man jetzt vermöge (14) und (9) um, während man für den Nenner die Gleichungen (15) sowie (13) und (10) benutze; es folgt:

$$\frac{d}{du}\log\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{\wp'(u_0)}{e_2-\wp(u_0)}\cdot\frac{\wp(u)-e_2}{\wp(u)-\wp(u_0)}.$$

Deuten wir die rechte Seite dieser Gleichung für beliebige complexe Variabele u, so stellt dieselbe eine zweiwertige doppeltperiodische Function dar. Letztere wollen wir nach der pg. 197 entwickelten Regel durch das Integral zweiter Gattung ζ ausdrücken, indem wir den (übrigens elementaren) Grenzfall $u_0=\frac{\omega_1}{2}$ einstweilen ausschliessen. Unsere Function wird an allen mit u_0 und $-u_0$ äquivalenten Stellen einfach unendlich; sie gestattet also nach der genannten Regel die Darstellung:

$$A\zeta(u-u_0)-A\zeta(u+u_0)+B,$$

wo A und B von u unabhängig sind. Die Differenz $\wp(u)-\wp(u_0)$ ist in nächster Nähe von u_0 gleich $\wp'(u_0)(u-u_0)$; demnach ist $A=-1$. Zur Bestimmung von B setzen wir $u=\frac{\omega_2}{2}$, wo unsere darzustellende doppeltperiodische Function verschwindet; es folgt:

$$B=-2\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)-\eta_2.$$

Man hat also folgende Gestalt der fraglichen Function:

$$\frac{d}{du}\log\left(\frac{X}{Y}\right)=\zeta(u+u_0)-\zeta(u-u_0)-2\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)-\eta_2.$$

Die Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (16) ergiebt:

$$\frac{d\log X}{du}=\zeta(u+u_0)-\zeta(u)-\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)-\frac{\eta_2}{2},$$

$$\frac{d\log Y}{du}=\zeta(u-u_0)-\zeta(u)+\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\eta_2}{2}.$$

Die Integration nach u kann hier unmittelbar geschehen und führt vermöge (4) pg. 186 auf:

$$\log X=\log\sigma(u+u_0)-\log\sigma(u)-u\left[\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\eta_2}{2}\right]+C_1,$$

$$\log Y=\log\sigma(u-u_0)-\log\sigma(u)+u\left[\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\eta_2}{2}\right]+C_2,$$

unter C_1 und C_2 zwei von u unabhängige Grössen verstanden. Die

für X und Y selbst sich ergebenden Ausdrücke kleiden wir in die Gestalt:

$$(17)\quad \begin{cases} X = c_1 \dfrac{\sigma(u+u_0)}{\sigma(u)\,\sigma(u_0)} e^{-u\left[\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\eta_2}{2}\right]}, \\ Y = c_2 \dfrac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)\,\sigma(u_0)} e^{u\left[\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\eta_2}{2}\right]}, \end{cases}$$

wo c_1, c_2 zwei neue von u unabhängige Grössen sind.

Diese Constanten c_1, c_2 müssen so bestimmt werden, dass für die vorschriftsmässigen Werte von u reelle, der Gleichung (15) genügende Werte x, y aus (17) entspringen. Dies wird der Fall sein, wenn:

$$XY = c_1 c_2 \frac{\sigma(u+u_0)\,\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)^2\,\sigma(u_0)^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2}\left[\wp(u)-\wp(u_0)\right]$$

ist, und wenn ausserdem X und Y complexe Zahlen gleicher absoluter Beträge sind; denn zufolge der ersteren Bedingung ist XY reell und positiv, so dass in der That reelle x, y sich ergeben werden. Mit Rücksicht auf (11) pg. 202 liefert die letzte Gleichung:

$$(18)\qquad c_1 c_2 = -\frac{a^2}{a^2-b^2},$$

während sich andrerseits die Forderung der Gleichheit der absoluten Beträge von X und Y in Gestalt der Bedingung darstellt:

$$\left|\frac{c_1}{c_2}\right| = \left|\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right| \cdot \left|e^{2u\left[\zeta\left(u_0-\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\eta_2}{2}\right]}\right|.$$

Um zunächst diese letzte Gleichung zu discutieren, so setze man wieder $u = u' + \frac{\omega_1}{2}$ und entnehme aus (12) pg. 189:

$$\sigma\left(u' + \frac{\omega_1}{2} - u_0\right) = -e^{\eta_1(u'-u_0)}\sigma\left(u' - \frac{\omega_1}{2} - u_0\right).$$

Da u' reell ist, jedoch ω_1 und u_0 rein imaginäre Werte haben, so sind zufolge (12) pg. 193 die Werte von $\sigma\left(u' - \frac{\omega_1}{2} - u_0\right)$ und $\sigma\left(u' + \frac{\omega_1}{2} + u_0\right)$ conjugiert complex und also von gleichen Beträgen. Da ausserdem η_1 gegenwärtig rein imaginär ist, so können wir aus der zuletzt angegebenen Gleichung unter Rückkehr zur Bezeichnung u den Schluss ziehen:

$$\left|\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right| = e^{-\eta_1 u_0}.$$

Weiter bemerke man, dass $\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}$ einen rein imaginären Wert hat. Ist nämlich für den Augenblick u_0 rein imaginär variabel, so

haben wir eine Function mit reellem Differentialquotienten $-\wp\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right)$. Für $u_0 = 0$ aber verschwindet jene Function, wie man aus der Gleichung $\zeta(u - \omega_2) + \zeta(-u) + \eta_2 = 0$ leicht folgert. Da endlich die für uns in Betracht kommenden Werte $2u$ den imaginären Bestandteil ω_1 besitzen, so folgt:

$$\left|\frac{c_1}{c_2}\right| = e^{-\eta_1 u_0 + \omega_1\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}.$$

Diese Gleichung im Verein mit der Bedingung (18) liefert:

$$c_1 = \frac{a e^{\gamma i}}{\sqrt{a^2 - b^2}} e^{-\frac{\eta_1 u_0}{2} + \frac{\omega_1}{2}\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]},$$

$$c_2 = -\frac{a e^{-\gamma i}}{\sqrt{a^2 - b^2}} e^{\frac{\eta_1 u_0}{2} - \frac{\omega_1}{2}\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]},$$

wo γ *ein willkürlich wählbarer reeller Winkel* ist.

Durch Eintragung dieser Werte c_1, c_2 in (17) kommen wir endlich zum gewünschten Resultat: *Die Coordinaten x, y der Punkte unserer geodätischen Linien sind als Functionen von u durch die Gleichungen gegeben:*

$$(19)\quad \begin{cases} x + iy = \dfrac{a e^{\gamma i}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \dfrac{\sigma(u + u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)} e^{-\frac{\eta_1 u_0}{2} - \left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}, \\ x - iy = -\dfrac{a e^{-\gamma i}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \dfrac{\sigma(u - u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)} e^{\frac{\eta_1 u_0}{2} + \left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen im Verein mit der in (12) gegebenen Darstellung von z liefern das endgültige Ergebnis der Integration der unter I entwickelten Differentialgleichungen der geodätischen Linien; es haben sich dabei die beiden Integrationsconstanten u_0 und γ oder, was auf dasselbe hinausläuft, c und γ eingefunden.

III. Verlauf der geodätischen Linien.

Von den beiden Integrationsconstanten c und γ ist die letztere als unwesentlich anzusehen. Zwei Curven mit gleichen c, aber verschiedenen γ sind congruent und können durch Drehung um die z-Axe in einander übergeführt werden. Wählen wir zur näheren Discussion etwa $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$(20)\quad \begin{cases} x + iy = \dfrac{ai}{\sqrt{a^2 - b^2}} \dfrac{\sigma(u + u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)} \cdot e^{-\frac{\eta_1 u_0}{2} - \left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}, \\ x - iy = \dfrac{ai}{\sqrt{a^2 - b^2}} \dfrac{\sigma(u - u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)} \cdot e^{\frac{\eta_1 u_0}{2} + \left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}, \end{cases}$$

so kommt dies, wie man leicht näher nachweist, darauf hinaus, *dass die geodätische Linie, dem Werte* $u = \frac{\omega_1}{2}$ *entsprechend, in der xz-Ebene einen ersten höchsten Punkt bekommt.* Die Entfernung dieses Punktes von der Rotationsaxe ist durch c gegeben. Wir werden gleich sehen, dass die geodätische Linie weitere höchste Punkte mit dem gleichen z und also derselben Entfernung c von der z-Axe bekommt. Vorgreifend können wir also sagen: *Die geodätische Linie ist durch die Lage eines ihrer höchsten Punkte bereits vollständig bestimmt.*

Zum Zwecke weiterer Angaben machen wir Gebrauch von der Formel (cf. (2) pg. 224):

$$\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) = e^{\frac{\eta_1 u}{2}} \sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma_1(u),$$

mit deren Hülfe sich die Gleichungen (20) so darstellen:

$$(21)\qquad \begin{cases} x + iy = \dfrac{a i}{\sqrt{a^2 - b^2}} \dfrac{\sigma_1(u' + u_0)}{\sigma_1(u')\,\sigma(u_0)} \cdot e^{-u'\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}, \\ x - iy = \dfrac{a i}{\sqrt{a^2 - b^2}} \dfrac{\sigma_1(u' - u_0)}{\sigma_1(u')\,\sigma(u_0)} \cdot e^{u'\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}, \end{cases}$$

unter u' wie bisher die reelle Variabele $\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)$ verstanden. Nun ist $\sigma_1(u)$ eine gerade Function von u. Bei Zeichenwechsel von u' tauschen sich demnach $(x + iy)$ und $(x - iy)$ aus, während z unverändert bleibt. *Die in Discussion gezogene geodätische Linie zeigt einen bezüglich der xz-Ebene symmetrischen Verlauf.*

Lassen wir u oder u' um ω_2 wachsen, so wechselt z sein Zeichen, während $(x + iy)$ und $(x - iy)$ bez. in sich selbst, multipliciert mit den beiden conjugiert complexen Factoren:

$$e^{\pm \eta_2 u_0 \mp \omega_2\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right]}$$

übergehen. Es sind nämlich, wie wir sahen, u_0 und $\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}$ rein imaginär, η_2 und ω_2 aber reell. Man kann sagen, der Übergang von u zu $(u + \omega_2)$ komme hinaus auf eine Drehung des Punktes (x, y, z) um die z-Axe durch den reellen Winkel:

$$(22)\qquad \psi = \eta_2(-iu_0) + \omega_2 i\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right],$$

vereint mit der Spiegelung des Punktes an der xy-Ebene. Bei dieser Transformation geht die geodätische Linie in sich selbst über. *Sie wird demnach abwechselnd oberhalb und unterhalb der xy-Ebene verlaufen und übrigens, gerade wie die Sinuslinie, durch periodische Wieder-*

holung congruenter Stücke entstehen, deren einzelnes, etwa dem Intervall $0 \leqq u' \leqq 2\omega_2$ *entsprechendes, aus vier teils symmetrischen, teils congruenten Vierteln besteht.* Als *Bogenlänge eines einzelnen Viertels* berechnet man aus (12) den Wert $\frac{b}{k'}E$, unter E die durch (4) pg. 271 dargestellte Periode des Integrals zweiter Gattung verstanden*).

In den beiden Grenzfällen $c = 0$ und $c = a$ kommen wir zu elementaren Verhältnissen. Den ersten Fall treffen wir, wenn wir $\lim. u_0 = \frac{\omega_1}{2}$ setzen und die e_k aus $a^2 = e_2 - e_1$, $b^2 = e_2 - e_3$ berechnen. Der Grenzwert von $\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right)$ wird in diesem Falle gleich $\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}$, so dass die Formel (22) vermöge der Legendre'schen Relation (1) pg. 199 für ψ den Wert π liefert. Die rechten Seiten der Formeln (21) werden zufolge (5) pg. 225 einander genau entgegengesetzt, so dass notwendig $x = 0$ sein muss: *Die geodätische Linie ist im Grenzfalle* $c = 0$ *die durch* $x = 0$ *ausgeschnittene Meridiancurve unseres Relationsellipsoides.*

Im anderen Falle ($c = a$) stellt die geodätische Linie den *Äquator des Ellipsoides* dar, d. h. den durch die xy-Ebene ausgeschnittenen Kreis. Es ist wichtig, dass wir den zugehörigen Grenzwert des Winkels ψ berechnen. Dies ist deshalb etwas umständlich, weil im gedachten Falle $\lim. (e_3 - e_1) = 0$ ist und also die pg. 254 besprochene Ausartung der elliptischen Functionen in trigonometrische vorliegt.

Soll aber $\lim. (e_3 - e_1) = 0$ sein, so lehrt die erste Formel (7):

$$\lim. e_1 = \lim. e_3 = -\frac{1}{3}b^2, \quad \lim. e_2 = \frac{2}{3}b^2.$$

Die Gleichung (10) im Verein mit der letzten Formel (4) pg. 254 ergiebt weiter nach kurzer Zwischenrechnung**):

$$\lim. \wp(u_0) = \frac{2}{3}b^2 - a^2 = -\frac{b^2}{3} + b^2\left(\sin\frac{\pi u_0}{\omega_2}\right)^{-2}.$$

---

*) Steht der Wert ψ zu π in einem rationalen Verhältnis, so schliesst sich die geodätische Linie und besteht aus endlich vielen congruenten Stücken. Wir bemerken jedoch nebenher, dass selbst in diesem Falle die geodätische Linie keine algebraische Curve vorstellt, vorausgesetzt, dass nicht einer der beiden im Texte sogleich näher zu betrachtenden Grenzfälle $c = 0$ und $c = a$ vorliegt.

**) Man bemerke, dass sich die eben citierte Formel so schreiben lässt:

$$\wp(u) = -\frac{\eta_2}{\omega_2}\left[1 - 3\left(\sin\frac{\pi u}{\omega_2}\right)^{-2}\right].$$

Setzt man hier $u = \frac{\omega_2}{2}$ ein, so folgt:

$$e_2 = 2\frac{\eta_2}{\omega_2},$$

woraus die im Texte für $\lim. \wp(u_0)$ angegebene Gleichung leicht folgt.

Wir berechnen hieraus:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi u_0}{\omega_2} = +\frac{bi}{a}$$

mit Berücksichtigung des Umstandes, dass wegen des positiv imaginären Wertes u_0 der Wert $\operatorname{tg}\frac{\pi u_0}{\omega_1}$ selber positiv imaginär ist. Nun liefert die zweite Gleichung (4) pg. 254:

$$\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) - \frac{\eta_2}{\omega_2}\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u_0}{\omega_2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{tg}\frac{\pi u_0}{\omega_2},$$

$$\psi = \eta_2(-iu_0) + \omega_2 i\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right] = -\pi i \operatorname{tg}\frac{\pi u_0}{\omega_2} = \frac{b}{a}\pi.$$

Wir haben also das Ergebnis: *Für* lim. $c = a$ *nimmt der Winkel* ψ *den Grenzwert* $\frac{b}{a}\pi$ *an.*

Die Abhängigkeit des Winkels ψ von c ist deshalb eine nicht ganz einfache, weil bei veränderlichem c nicht nur u_0, sondern auch die e_ν und also die Perioden ω_1, ω_2; η_1, η_2 variabel sind. Wir begnügen uns mit der Angabe, dass ψ stetig von π bis $\frac{b}{a}\pi$ abnimmt, falls c von 0 bis a wächst. Zeichnen wir die den Gleichungen (21) entsprechenden Linien für alle c des Intervalls $0 < c < a$ von ihren höchsten, in der xz-Ebene gelegenen, Punkten, bis sie zum ersten Male den Äquator erreichen, so erscheint der durch $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ charakterisierte Octant des Ellipsoids schlicht bedeckt von geodätischen Linien, welche auf diesem Octanten längs des durch $y = 0$ dargestellten Ellipsenquadranten beginnen und längs des Äquators zwischen den beiden Punkten $x = a\cos\frac{b\pi}{2a}$, $y = a\sin\frac{b\pi}{2a}$ und $x = 0$, $y = a$ endigen.

Wir berechnen endlich noch das *Azimut* einer einzelnen geodätischen Linie in einem ihrer Punkte P; hiermit ist der Winkel α gemeint, welchen die geodätische Linie in Richtung wachsender Bogen s gegen den nach dem Pole $z = +b$ gerichteten Meridian von P bildet. Offenbar kann man $\sin\alpha$ auch als Cosinus des Winkels zwischen der geodätischen Linie und dem Parallelkreis von P auffassen. Jene besitzt bezüglich der Coordinatenaxen die Richtungscosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, dieser hat als solche $-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 0. Wir gewinnen direct:

$$\sin\alpha = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{dy}{ds},$$

so dass die Benutzung der Gleichung (4) auf den Satz führt: *Das*

Azimut einer zum Werte c gehörenden geodätischen Linie in ihrem einzelnen Punkte (x, y, z) bestimmt sich aus:

$$\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{bc}{a\sqrt{b^2-z^2}}. \tag{23}$$

Da man hiernach aus den Coordinaten von P und der Grösse von α das zugehörige c berechnen kann, so folgt noch: *Jede geodätische Linie ist aus einem einzelnen ihrer Bogenelemente bereits vollständig bestimmt.*

Beispiel. Ihre wichtigste Anwendung finden die vorstehenden Entwicklungen innerhalb der Geodäsie bei Betrachtung der geodätischen Linien auf dem Erdsphäroid. Wir wollen die entwickelten Formeln hierauf anwenden.

Man hat dabei mit einem von der Kugel nur wenig abweichenden Rotationsellipsoid zu thun, und zwar gilt nahehin $a : b = 293 : 292$. Etwas genauer hat man, wenn der Halbmesser a des Äquators gleich 1 gesetzt wird, für die halbe Erdaxe b und für das Quadrat der Excentricität ε eines einzelnen Meridians:

$$b = 0{,}996639\cdots, \qquad \varepsilon^2 = 0{,}006710\cdots.$$

Die Orientierung auf der Erdoberfläche geschieht durch die „Länge" λ und „Breite" β des einzelnen Punktes P. Jene können wir unter Beibehaltung des bisherigen Coordinatensystems sofort durch $\lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ definieren. Unter β aber soll die sogen. „reducierte Breite" des Ortes P verstanden sein, gegeben durch $\beta = \arccos r$, unter $r = \sqrt{x^2+y^2}$ den Radius des Parallelkreises von P verstanden. Unter Breite β' im gewöhnlichen Sinne versteht man den Neigungswinkel einer in P auf dem Sphäroid errichteten Normalen gegen die Äquatorebene. Figur 83 erläutert diese Verhältnisse in der Meridianebene von P; man findet leicht, dass $z = b\sin\beta$ und $\operatorname{tg}\beta = b\operatorname{tg}\beta'$ ist, so dass zwischen Äquator und Pol β immer etwas kleiner als β' ausfällt.

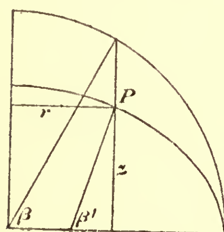


Fig. 83.

Die einzelne geodätische Linie auf dem Erdsphäroid geben wir jetzt durch die Breite β_0 eines ihrer höchsten Punkte; von hieraus folgt dann sogleich $c = \cos\beta_0$. Für die Constanten der einzelnen geodätischen Linie hat man erstlich:

$$e_2 - e_3 = 1 - \varepsilon^2, \qquad e_3 - e_1 = \varepsilon^2\sin^2\beta_0, \qquad e_2 - e_1 = 1 - \varepsilon^2\cos^2\beta_0.$$

Die Division der zweiten Gleichung durch die dritte liefert den Integralmodul k^2. Für $\beta_0 < \frac{\pi}{2}$ ist $k^2 < \varepsilon^2$ und also:

$$k^2 < 0{,}006710\cdots;$$

man hat sonach hier durchgängig mit den Werten k^2 und q zu thun, für welche die Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen gut convergieren.

Ist β_0 gegeben, so bestimmt sich u_0 aus:

$$\wp(u_0) = e_1 - \varepsilon^2\cos^2\beta_0, \qquad u_0 = \frac{\omega_1}{2} + \int_{e_1}^{\wp(u_0)} \frac{dt}{2\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}},$$

wo t eine Integrationsvariabele ist und das Integral längs der reellen t-Axe zu erstrecken ist. Für Länge, Breite und Azimut des einzelnen Punktes der zugehörigen geodätischen Linie hat man dann die Darstellungen:

$$\lambda = iu'\left[\zeta\left(u_0 - \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{\eta_2}{2}\right] + \frac{1}{2i}\log\frac{\sigma_1(u'+u_0)}{\sigma_1(u'-u_0)},$$

$$\sin\beta = \sin\beta_0\frac{\sigma_2(u')}{\sigma_1(u')}, \qquad \sin\alpha = \frac{\cos\beta_0}{\cos\beta}.$$

§ 4. Confocale Flächen zweiten Grades und elliptische Coordinaten.

Es seien a, b, c drei reelle positive Grössen, welche die Bedingungen $a > b > c$ befriedigen, und es bedeute λ einen variabelen reellen Parameter. Deuten wir die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1$$

in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, so gewinnen wir ein sogen. *„System confocaler Flächen zweiten Grades"*. Des näheren gewinnen wir eine Schar von Ellipsoiden, welche für sich genommen bereits den ganzen Raum ausfüllen, falls wir den Parameter λ von $-\infty$ bis c^2 wachsen lassen. Für lim. $\lambda = c^2$ wird das Ellipsoid unendlich flach und geht in das doppelt überdeckte Innere der *„Focalellipse"*:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1$$

über. Den Werten λ des Intervalls $c^2 < \lambda < b^2$ entsprechen einschalige Hyperboloide, deren Schar wieder den ganzen Raum ausfüllt. An der Grenze lim. $\lambda = c^2$ dieses Intervalls kommt das doppelt überdeckte Äussere der Ellipse (2) als unendlich flaches Hyperboloid, während wir an der anderen Grenze lim. $\lambda = b^2$ den zwischen den Zweigen der *„Focalhyperbel"*:

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1$$

gelegenen Teil der xz-Ebene, doppelt überdeckt, als unendlich flaches einschaliges Hyperboloid gewinnen. Die beiden übrigen Stücke der xz-Ebene liefern, wieder doppelt bedeckt, den Grenzfall eines Hyperboloids mit zwei Mantelflächen. Es reiht sich für $b^2 < \lambda < a^2$ eine ganze Schar solcher Hyperboloide an, welche gleichfalls wieder für sich genommen den ganzen Raum ohne Lücke ausfüllt. Den Werten $\lambda > a^2$ entsprechen keine reellen Flächen zweiten Grades.

Durch jeden Punkt P des Raumes zieht je eine Fläche der drei genannten Arten hindurch. Das Ellipsoid durch P habe λ_1 als Wert des Parameters, dem einschaligen Hyperboloid durch P komme λ_2, dem zwei-

schaligen Hyperboloid durch P der Wert λ_3 zu. Es werden alsdann die Ungleichungen gelten:

$$(4) \qquad \lambda_1 \leqq c^2 \leqq \lambda_2 \leqq b^2 \leqq \lambda_3 \leqq a^2.$$

Diese drei Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnet man als die elliptischen Coordinaten des Punktes P. Die in Rede stehenden drei Flächen schneiden sich aber ausser in P noch in weiteren sieben Punkten, welche aus P durch fortgesetzte Spiegelung an den Coordinatenebenen entstehen. Sind (x, y, z) die Coordinaten von P im ursprünglichen System, so sind die Coordinatentripel aller dieser acht Punkte offenbar durch $(\pm x, \pm y, \pm z)$ gegeben, zu bilden für alle acht Zeichencombinationen: *Das einzelne in Übereinstimmung mit* (4) *gewählte System elliptischer Coordinaten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ liefert immer acht Punkte $(\pm x, \pm y, \pm z)$ des Raumes.*

Die beiderlei Coordinaten (x, y, z) und $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ von P sind verbunden durch die drei Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda_i} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_i} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_i} = 1, \qquad (i=1, 2, 3).$$

Die Subtraction zweier unter diesen Gleichungen von einander liefert:

$$(6) \qquad \frac{x^2}{(a^2-\lambda_i)(a^2-\lambda_k)} + \frac{y^2}{(b^2-\lambda_i)(b^2-\lambda_k)} + \frac{z^2}{(c^2-\lambda_i)(c^2-\lambda_k)} = 0.$$

Nun hat man für die Richtungswinkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ der Normalen des Ellipsoides resp. einschaligen oder zweischaligen Hyperboloides in P die Proportion:

$$\cos\alpha_i : \cos\beta_i : \cos\gamma_i = \frac{x}{a^2-\lambda_i} : \frac{y}{b^2-\lambda_i} : \frac{z}{c^2-\lambda_i}.$$

Nach (6) gilt also die Gleichung:

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_k + \cos\beta_i \cos\beta_k + \cos\gamma_i \cos\gamma_k = 0,$$

d. h. die drei Normalen stehen auf einander senkrecht. *Das System der confocalen Flächen* (1) *besteht hiernach aus drei Scharen einander allenthalben orthogonal schneidender Flächen zweiten Grades.*

Giebt man x, y, z, so bestimmen sich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als die drei Wurzeln der für λ cubischen Gleichung (1). Die folgende Gleichung wird demnach in λ identisch bestehen:

$$(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)\left[\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} - 1\right]$$
$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3).$$

Indem wir der Reihe nach $\lambda = a^2, b^2, c^2$ eintragen, entspringen folgende

Darstellungen der rechtwinkligen in den elliptischen Coordinaten des einzelnen Punktes:

$$(7)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \\[2ex] y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)(b^2-\lambda_3)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}, \\[2ex] z^2 = \dfrac{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)(c^2-\lambda_3)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Entwicklungen können nun in interessanter Weise mit den elliptischen Functionen in Zusammenhang gebracht werden. Wir berechnen erstlich drei reelle Grössen e_ν verschwindender Summen aus:

$$(8)\qquad e_3 - e_1 = a^2 - b^2, \quad e_2 - e_1 = a^2 - c^2, \quad e_2 - e_3 = b^2 - c^2;$$

wir gewinnen die mit den Ungleichungen $e_1 < e_3 < e_2$ in Übereinstimmung befindlichen Werte:

$$e_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - a^2,$$

$$e_2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - c^2,$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - b^2.$$

Wir bestimmen ferner für das einzelne System elliptischer Coordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei Functionswerte:

$$\wp(u_i) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \lambda_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

woraus wir unter Rücksicht auf die drei voraufgehenden Gleichungen gewinnen:

$$(9)\quad \wp(u_i) - e_1 = a^2 - \lambda_i, \quad \wp(u_i) - e_2 = c^2 - \lambda_i, \quad \wp(u_i) - e_3 = b^2 - \lambda_i.$$

Hiernach haben wir den Bedingungen (4) entsprechend die Ungleichungen:

$$(10)\qquad \wp(u_1) \geqq e_2 \geqq \wp(u_2) \geqq e_3 \geqq \wp(u_3) \geqq e_1.$$

Solche Werte $\wp$ werden wir z. B. dadurch gewinnen, dass wir für u_1 in der u-Ebene die Verbindungsgerade der Punkte $u = 0$ und $u = \frac{\omega_2}{2}$ als Intervall festsetzen, für u_2 die Verbindungsgerade der Punkte $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_3}{2}$, endlich für u_3 diejenige der Punkte $\frac{\omega_3}{2}$ und $\frac{\omega_1}{2}$.

Für die rechtwinkligen Coordinaten des einzelnen Punktes erhält man aus (8) und (9) die Darstellungen:

$$(11)\quad\begin{cases} x^2 = \dfrac{(\wp(u_1)-e_1)(\wp(u_2)-e_1)(\wp(u_3)-e_1)}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \\ y^2 = \dfrac{(\wp(u_1)-e_3)(\wp(u_2)-e_3)(\wp(u_3)-e_3)}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}, \\ z^2 = \dfrac{(\wp(u_1)-e_2)(\wp(u_2)-e_2)(\wp(u_3)-e_2)}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}. \end{cases}$$

Die Einführung der Jacobi'schen Functionen gestattet die Darstellung der x, y, z selbst. Den Argumenten u_1, u_2, u_3 sollen w_1, w_2, w_3 entsprechen. Wir verstehen ferner unter ε_1, ε_2, ε_3 die Excentricitäten der drei Büschel confocaler Kegelschnitte, welche die Coordinatenebenen aus dem Flächensystem (1) ausschneiden:

$$(12)\quad \varepsilon_1 = +\sqrt{b^2-c^2},\quad \varepsilon_2 = +\sqrt{a^2-c^2},\quad \varepsilon_3 = +\sqrt{a^2-b^2}.$$

Die Formeln (11) pg. 237 ergeben alsdann nach kurzer Zwischenrechnung folgende *Darstellungen der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des Raumes als elliptische Functionen dreier Argumente* w_1, w_2, w_3:

$$(13)\quad\begin{cases} x = \dfrac{\varepsilon_1}{kk'}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sn}w_1\operatorname{sn}w_2\operatorname{sn}w_3}, \\ y = \dfrac{\varepsilon_2}{ikk'}\cdot\dfrac{\operatorname{dn}w_1\operatorname{dn}w_2\operatorname{dn}w_3}{\operatorname{sn}w_1\operatorname{sn}w_2\operatorname{sn}w_3}, \\ z = \dfrac{\varepsilon_3}{kk'}\cdot\dfrac{\operatorname{cn}w_1\operatorname{cn}w_2\operatorname{cn}w_3}{\operatorname{sn}w_1\operatorname{sn}w_2\operatorname{sn}w_3}. \end{cases}$$

Die Werte k und k' sollen in diesen Formeln positiv fixiert sein.

Während einem Wertsystem u_1, u_2, u_3 immer acht Punkte des Raumes zugeordnet waren, ist es ein Vorzug der Formeln (13), *dass dem einzelnen Wertsystem* w_1, w_2, w_3 *ein einziger Punkt* (x, y, z) *entspricht.* Indessen müssen wir, um die gesamten Punkte des Raumes zu gewinnen, die oben für u_1, u_2, u_3 ausgewählten geradlinigen Intervalle je verdoppeln. Würden wir an der bisherigen Beschränkung festhalten, so würde aus der Werteverteilung der Jacobi'schen Functionen $x \geqq 0$, $y \leqq 0$, $z \leqq 0$ folgen, so dass wir nur erst einen Raumoctanten beherrschen würden. Wir wollen vielmehr jetzt die Intervalle der w_1, w_2, w_3 nach Massgabe der Figur 84 wählen, d. h. es soll w_1 reell und absolut nicht grösser als K sein u. s. w. Mit w_1 wird demnach auch $w_1' = -w_1$ dem vorgeschriebenen Intervall angehören, mit w_2 auch $w_2' = w_2 \pm 2K$ für das eine der beiden Zeichen, mit w_3 endlich $w_3' = -w_3 + 2iK'$. Man zeigt dann aus den Grundeigenschaften der Jacobi'schen Func-

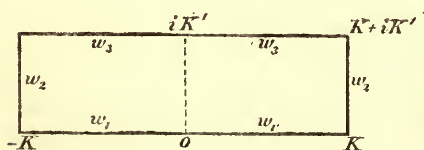


Fig. 84.

tionen leicht: *Der Ersatz von* (w_1, w_2, w_3) *durch* (w_1, w_2, w_3') *führt von* (x, y, z) *zu* $(-x, y, z)$, *derjenige von* (w_1, w_2, w_3) *durch* (w_1, w_2', w_3') *führt von* (x, y, z) *zu* $(x, -y, z)$, *endlich folgt beim Ersatz von* (w_1, w_2, w_3) *durch* (w_1', w_2', w_3) *den Übergang von* (x, y, z) *zu* $(x, y, -z)$.

Wählt man w_1 speciell und lässt ausserdem nur noch $w_1' = -w_1$ zu, während w_2 und w_3 ihre Intervalle unabhängig von einander durchlaufen, so beschreibt der Punkt (x, y, z) die Oberfläche eines w_1 zugeordneten Ellipsoids (und entsprechend kann man natürlich das einzelne der Hyperboloide fixieren). Auf jenem Ellipsoide schneiden die beiden Systeme der Hyperboloide (1) zwei einander orthogonal kreuzende Scharen von Curven aus; die einzelne dieser Curven wird durch weitere Fixierung von w_2 bez. w_3 festgelegt sein. Wir haben hier mit den beiden Scharen der sogen. „*Krümmungslinien*“ auf der Oberfläche des Ellipsoids zu thun.

§ 5. Anwendung auf die Wärmetheorie.

Die elliptischen Coordinaten werden in verschiedenen Gebieten der mathematischen Physik mit Vorteil zur Anwendung gebracht, so z. B. in der Potentialtheorie sowie in der Theorie der Wärme. Einige hierauf bezügliche Andeutungen sollen hier eingefügt werden.

In den Gleichungen (11) pg. 308 sind die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z als Functionen der u_1, u_2, u_3 dargestellt. Man kann das Sachverhältnis auch umkehren und *die einzelne der Grössen* u_1, u_2, u_3 *als Function der drei Argumente* x, y, z betrachten, wo alsdann z. B. durch eine Gleichung $u_1(x, y, z) = \text{Const.}$ bei geeigneter Auswahl dieser Constanten ein einzelnes unserer Ellipsoide dargestellt wird.

Es ist nun eine fundamentale Thatsache, *dass jede einzelne dieser drei Functionen* u_1, u_2, u_3 *ein Integral der Laplace'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (cf. pg. 25):

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

darstellt. Die linke Seite dieser Differentialgleichung bezeichnen wir abgekürzt durch Δu.

Um das aufgestellte Theorem zu beweisen, erinnern wir daran, dass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Werte der dreideutigen Function λ von x, y, z sind, welche durch die Gleichung:

$$(2) \qquad 1 - \frac{x^2}{a^2 - \lambda} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 0$$

definiert ist. Die linke Seite dieser Gleichung sei als Function von λ kurz durch $\Phi(\lambda)$ bezeichnet; unter $\Phi'(\lambda)$, $\Phi''(\lambda)$ sollen die bei con-

stanten x, y, z in Bezug auf λ berechneten partiellen Ableitungen gemeint sein.

Bei partieller Differentiation nach x finden wir nun aus (2):

$$\left[\frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{2x}{a^2-\lambda}=0,$$

wo der in Klammern stehende Ausdruck $-\Phi'(\lambda)$ ist; wir haben:

$$(3)\qquad \Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{a^2-\lambda},\quad \Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{2y}{b^2-\lambda},\quad \Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial z}=\frac{2z}{c^2-\lambda}.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser drei Gleichungen folgt rechts offenbar $-4\Phi'(\lambda)$, so dass wir anmerken können:

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=-\frac{4}{\Phi'(\lambda)}.$$

Differenziert man die erste Gleichung (3) nochmals partiell nach x, so beachte man, dass $\Phi'(\lambda)$ nicht nur durch λ implicite von x abhängt, sondern im ersten Gliede x noch explicite enthält:

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2-\frac{2x}{(a^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{(a^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{2}{a^2-\lambda}.$$

Bilden wir die beiden entsprechenden Gleichungen für y und z und addieren alle drei, so folgt unter Benutzung von (4):

$$\Phi'(\lambda)\cdot\Delta(\lambda)-\frac{4\Phi''(\lambda)}{\Phi'(\lambda)}=\frac{4x}{(a^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{4y}{(b^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{4z}{(c^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$
$$+\frac{2}{a^2-\lambda}+\frac{2}{b^2-\lambda}+\frac{2}{c^2-\lambda}.$$

Ersetzt man in den drei ersten Gliedern rechter Hand die partiellen Ableitungen von λ durch ihre aus (3) hervorgehenden Ausdrücke, so findet man nach kurzer Rechnung als Summe dieser Glieder $-\frac{4\Phi''(\lambda)}{\Phi'(\lambda)}$. Die letzte Gleichung zieht sich demnach auf:

$$\Phi'(\lambda)\cdot\Delta\lambda=2\left(\frac{1}{a^2-\lambda}+\frac{1}{b^2-\lambda}+\frac{1}{c^2-\lambda}\right)$$

oder unter Benutzung von (4) auf:

$$(5)\quad \Delta\lambda=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2-\lambda}+\frac{1}{b^2-\lambda}+\frac{1}{c^2-\lambda}\right)\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right)$$

zusammen. Diese Relation gilt für jeden der drei Zweige $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unserer Function λ.

Die erste Klammer rechter Hand soll jetzt in u ausgedrückt werden. Durch logarithmische Differentiation von

$$\wp'(u)^2=4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3)$$

folgt:

$$\frac{2\wp''(u)}{\wp'(u)^2} = \frac{1}{\wp(u)-e_1} + \frac{1}{\wp(u)-e_2} + \frac{1}{\wp(u)-e_3}.$$

Schreiben wir daraufhin in der eben gewonnenen Relation (5) insbesondere λ_i statt λ, so folgt mit Rücksicht auf (9) pg. 307:

$$(6)\qquad \Delta\lambda_i = -\frac{\wp''(u_i)}{\wp'(u_i)^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial z}\right)^2\right].$$

Indem wir jetzt andererseits:

$$\lambda_i = a^2 + e_1 - \wp(u_i)$$

zweimal partiell nach x differenzieren, gewinnen wir:

$$\frac{\partial^2\lambda_i}{\partial x^2} = -\wp''(u_i)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 - \wp'(u_i)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}.$$

Bildet man die entsprechenden Gleichungen für y und z und addiert alle drei, so folgt:

$$\Delta\lambda_i = -\wp''(u_i)\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)^2\right] - \wp'(u_i)\,\Delta u_i.$$

Ferner aber ist:

$$(7)\quad \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial z}\right)^2 = \wp'(u_i)^2\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)^2\right],$$

so dass sich die voraufgehende Gleichung umwandelt in:

$$\Delta\lambda_i = -\frac{\wp''(u_i)}{\wp'(u_i)^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial z}\right)^2\right] - \wp'(u_i)\,\Delta u_i.$$

Der Vergleich dieses Resultates mit Formel (6) liefert unmittelbar das Bestehen der Laplace'schen Gleichung $\Delta u_i = 0$, was bewiesen werden sollte. —

Die Laplace'sche Differentialgleichung ist nun nicht nur die Grundlage der Potentialtheorie, sondern tritt auch bei der Untersuchung der *Bewegung der Wärme im Innern der Körper* wieder auf. Es handele sich um einen Körper, der an jeder Stelle und in jeder Richtung gleichmässig für Wärme durchlässig ist, und in dessen Innern keine Wärmequelle sich findet. Ist alsdann T die Temperatur an der Stelle x, y, z im Innern des Körpers zur Zeit t, so genügt T als Function von t, x, y, z der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung*):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

unter $\varkappa^2$ eine positive Constante verstanden. Ist T von t unabhängig,

---

*) Wegen des Beweises dieser Differentialgleichung verweisen wir auf Riemann's *„Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen"*, herausgegeben von Hattendorf, pg. 122 der dritten Auflage.

so sagt man, die Temperatur sei im Gleichgewicht, oder es handele sich um eine *„stationäre“* Wärmeströmung; in diesem Falle genügt T der Laplace'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{8}$$

Als Beispiel denken wir jetzt einen nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Körper und wollen den Wärmezustand desselben für den Fall beschreiben, dass wir als Integral der Gleichung (8) unsere Function $T = u_1(x, y, z)$ heranziehen. Dieser Auswahl entspricht die Annahme, dass die Temperatur der in der xy-Ebene von der Focalellipse (2) pg. 305 eingeschlossenen elliptischen Platte allenthalben constant gleich $\frac{1}{2}\omega_2$ erhalten werde, während auf der Oberfläche einer unendlich grossen Kugel um den Nullpunkt die Temperatur allenthalben constant gleich 0 ist. *Es giebt alsdann einen stationären Zustand, bei dem die confocalen Ellipsoide* (1) *pg.* 305 *die sogen. „isothermischen“ Flächen, d. h. die Flächen gleicher Temperatur sind; und zwar findet sich eine beliebige, dem Intervall* $0 < u_1 < \frac{\omega_2}{2}$ *entnommene Temperatur* $T = u_1$ *auf der Oberfläche desjenigen Ellipsoides, welches zum Parameter:*

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \wp(u_1)$$

gehört. —

In ausgedehnter Weise hat Lamé von den elliptischen Coordinaten Gebrauch gemacht bei seinen Untersuchungen über das Gleichgewicht der Wärme im Innern eines homogenen Ellipsoides, falls die Temperatur auf der Oberfläche des letzteren gegeben ist*). Wir können hier nur eine ganz kurze Einführung in Lamé's berühmte Untersuchung skizzieren, bedienen uns dabei übrigens zum Unterschied gegen Lamé der Weierstrass'schen Functionen.

Wir wollen zunächst die Laplace'sche Gleichung (8) auf elliptische Coordinaten resp. auf die Variabelen u_1, u_2, u_3 transformieren. Die Grössen u_1, u_2, u_3 als Functionen der x, y, z genügen erstlich der Gleichung (1), und überdies gilt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_k}{\partial z} = 0$$

für irgend zwei verschiedene Zahlen i, k aus der Reihe 1, 2, 3; denn durch diese Gleichungen kommt zum Ausdruck, dass die drei Flächen-

*) Siehe Lamé *„Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoide à trois axes inégaux“*, Journ. de Math., erste Serie Bd. 4, pg. 126.

büschel $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$, $u_3 = C_3$ einander orthogonal schneiden. Wir haben nun:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial u_2^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial u_3^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}$$
$$+ 2\frac{\partial^2 T}{\partial u_1 \partial u_3}\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u_2 \partial u_3}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial u_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial u_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}.$$

Bildet man entsprechend die zweiten Ableitungen von T nach y und z und addiert alle drei Gleichungen, so folgt mit Rücksicht auf die eben genannten Relationen:

$$(9)\qquad \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial u_1^2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial u_2^2}\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 T}{\partial u_3^2}\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2\right].$$

Nun folgt aus den Gleichungen (4) und (7):

$$(10)\qquad \wp'(u_i)^2\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)^2\right] = -\frac{4}{\Phi'(\lambda_i)}.$$

Schreiben wir aber $\Phi(\lambda)$ in der Gestalt:

$$\Phi(\lambda) = -\frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)},$$

so haben wir für die partiell in Bezug auf λ gemeinte Ableitung $\Phi'(\lambda)$:

$$-\Phi'(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)} + (\lambda - \lambda_1)\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)}\right].$$

Tragen wir hier speciell $\lambda = \lambda_1$ ein, so folgt:

$$-\Phi'(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_1)(c^2 - \lambda_1)}.$$

Führt man rechts auf Grund von (9) pg. 307 die u_i ein, so entspringt:

$$-\frac{4}{\Phi'(\lambda_1)} = \frac{\wp'(u_1)^2}{(\wp(u_1) - \wp(u_2))(\wp(u_1) - \wp(u_3))}.$$

Eine entsprechende Rechnung gilt für λ_2 und λ_3. Die Gleichung (10) geht damit über in:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{(\wp(u_i) - \wp(u_k))(\wp(u_i) - \wp(u_l))}.$$

Diese Werte für die in (9) rechts stehenden Klammerausdrücke trage man daselbst ein und findet so das Resultat: *Führt man in die Laplace'sche Gleichung* (8) *die* u_1, u_2, u_3 *an Stelle der* x, y, z *als un-*

abhängige Variabele ein, so transformiert sich diese Gleichung auf die Gestalt:

$$(11)\quad [\wp(u_2)-\wp(u_3)]\frac{\partial^2 T}{\partial u_1^2}+[\wp(u_3)-\wp(u_1)]\frac{\partial^2 T}{\partial u_2^2}+[\wp(u_1)-\wp(u_2)]\frac{\partial^2 T}{\partial u_3^2}=0.$$

Auf die Gestalt dieser Differentialgleichung gründen sich die von Lamé gezogenen Folgerungen. Ist $F(u)$ eine sogleich näher zu bezeichnende Function, so versuche man ein particuläres Integral der Gleichung (11) in der Form $T=F(u_1)\cdot F(u_2)\cdot F(u_3)$ anzusetzen. Zu diesem Ende muss offenbar folgende Gleichung bestehen:

$$[\wp(u_2)-\wp(u_3)]\frac{F''(u_1)}{F(u_1)}+[\wp(u_3)-\wp(u_1)]\frac{F''(u_2)}{F(u_2)}$$
$$+[\wp(u_1)-\wp(u_2)]\frac{F''(u_3)}{F(u_3)}=0.$$

Dieser Forderung wird aber in der That genügt, falls die Gleichung:

$$\frac{F''(u)}{F(u)}=A\wp(u)+B$$

mit constanten Coefficienten A, B für alle Werte u identisch gilt. Setzen wir $Z=F(u)$, *so ist die Integration der partiellen Differentialgleichung* (11) *auf diese Weise zurückgeführt auf die Integration der sogen. „Lamé'schen" gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$(12)\qquad \frac{d^2Z}{du^2}=(A\wp(u)+B)Z.$$

Da die Differentialgleichung (11) in T linear und homogen ist, so wird man aus mehreren particulären Integralen der gekennzeichneten Art allgemeinere Integrale in der Gestalt:

$$(13)\quad T=C_1F_1(u_1)F_1(u_2)F_1(u_3)+C_2F_2(u_1)F_2(u_2)F_2(u_3)+\cdots$$

aufbauen. Des näheren gilt hierbei folgende Überlegung. Man nimmt an, dass T im Innern des zu Grunde liegenden Ellipsoides als Function von x, y, z in eine Mac Laurin'sche Reihe entwickelbar ist:

$$T=T_0+T_1+T_2+T_3+\cdots,$$

wo T_n eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von x, y, z ist. Dann zeigt sich leicht, dass T_n für sich genommen der Gleichung (8) und also auch (11) genügt. Ein solches T_n würde als Function von u_1 nach (11) pg. 308 für $u_1=0$ einen Pol n^{ter} Ordnung bekommen, so dass wir für die diesem T_n zugehörige Function $Z=F(u)$ die Entwicklung ansetzen müssen:

$$F(u)=c_0u^{-n}+c_1u^{-n+1}+c_2u^{-n+2}+\cdots.$$

Das Anfangsglied der Potenzentwicklung für die linke Seite von (12) wird damit $n(n+1)c_1 u^{-n-2}$, während wir nach (9) pg. 193 rechts als Anfangsglied gewinnen $Ac_1 u^{-n-2}$. Es folgt, dass $A = n(n+1)$ sein muss, und also nimmt die *Lamé'sche Differentialgleichung die Gestalt an:*

(14) $$\frac{d^2Z}{du^2} = [n(n+1)\wp(u) + B]\,Z,$$

wo n eine positive ganze Zahl ist.

Lamé erkannte in jedem Falle n für gewisse $(2n+1)$ specielle Coefficienten B die Existenz von Integralen, welche abgesehen von etwaigen Factoren $\sqrt{\wp(u) - e_i}$ ganz und rational in $\wp(u)$ aufgebaut sind (Lamé'sche Polynome). Hermite*) stellte bei beliebigem B eindeutige Integrale von (14) aus σ- resp. ϑ-Functionen durch Productbildungen her. Wegen der weiteren Ausführungen verweisen wir auf die pg. 175 genannten Werke von Halphen (Bd. 2 pg. 457) und Burkhardt (pg. 342).

§ 6. Sphärisches Pendel.

Ein materieller Punkt von der Masse 1 sei an dem einen Ende eines gewichtlosen starren Stabes von der Länge l befestigt, der sich um seinen anderen Endpunkt frei bewegen kann. Der materielle Punkt sei der Schwerkraft unterworfen; es soll die Bewegung des materiellen Punktes untersucht werden.

Wir wählen das fixierte Ende des Stabes zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen z-Axe vertical aufwärts gerichtet sei. Für die Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes ist dann beständig die Gleichung:

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

erfüllt. Der Punkt bewegt sich auf der Oberfläche einer Kugel des Radius l um den Nullpunkt; und in diesem Sinne bezeichnet man die gedachte Vorkehrung als ein „sphärisches Pendel".

Möge nun zur Zeit t der materielle Punkt auf den Stab die Spannung S ausüben, die > 0 oder $= 0$ oder < 0 sein kann. Die Richtungswinkel dieser Spannkraft gegen die Axen haben folgende Cosinus: $\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}$. Es wird alsdann unser materieller Punkt *ohne* die durch den Stab hergestellte starre Verbindung mit dem Nullpunkte offenbar

---

*) Siehe die Mitteilungen *„Sur quelques applications des fonctions elliptiques"* in den Pariser Comptes Rendus von 1877 bis 1882.

genau die gleiche Bewegung ausführen, falls wir der Schwerkraft eine mit S gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kraft hinzugesellen. Die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Punktes haben hiernach die Gestalt:

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -S\frac{x}{l}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -S\frac{y}{l}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -S\frac{z}{l} - g,$$

wo g die Beschleunigung durch die Schwerkraft ist.

Die Integration dieses Systems bei Gültigkeit der Relation (1) gestaltet sich nun ganz ähnlich, wie die oben an die Gleichungen (2) und (3) pg. 294 angeschlossene Behandlung der geodätischen Linien auf dem Sphäroid. Wir finden erstlich wie dort die Relation:

$$(3) \qquad xdy - ydx = cdt,$$

wo c eine Constante ist. Setzen wir unter Einführung von Polarcoordinaten r, φ in der xy-Ebene $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so nimmt die Gleichung (3) die Gestalt an:

$$(4) \qquad r^2 d\varphi = cdt;$$

sie bringt einen der „Flächensätze" zum Ausdruck. Man nehme an, dass $c \geqq 0$ sei; es wird alsdann φ mit wachsendem t nicht abnehmen.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt} = 0.$$

Multiplicieren wir demnach die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$ und addieren, so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -2g\frac{dz}{dt}.$$

Links in der Klammer steht das Quadrat der Geschwindigkeit v unseres Punktes. Durch Integration folgt somit:

$$(5) \qquad v^2 = h - 2gz,$$

wo h eine Constante ist; man kann die letztere in der Gestalt:

$$(6) \qquad h = v_0^2 + 2gz_0$$

darstellen, unter v_0 und z_0 die Werte von v und z zur Zeit $t = 0$ verstanden. Die Gleichung (5) enthält den „Satz von der lebendigen Kraft".

Wir gelangen nun sehr leicht zu einer Differentialgleichung zwischen z und t. Drücken wir das Quadrat des Bogenelementes ds erstlich durch r, φ, z, sodann durch v^2dt^2 aus, so ist:

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2 = v^2dt^2.$$

Hier multipliciere man nochmals mit r^2 und berücksichtige, dass die Gleichungen gelten:

$$r^2 + z^2 = l^2, \quad rdr + zdz = 0, \quad r^4 d\varphi^2 = c^2 dt^2;$$

es ergiebt sich:

$$z^2 dz^2 + c^2 dt^2 + (l^2 - z^2) dz^2 = (h - 2gz)(l^2 - z^2) dt^2,$$

$$(7) \qquad l^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (h - 2gz)(l^2 - z^2) - c^2.$$

Verstehen wir wie vorhin unter z_0 den Anfangswert von z, so zeigt sich zunächst, *dass die Constante c die Bedingung:*

$$(8) \qquad c^2 \leqq (h - 2gz_0)(l^2 - z_0^2)$$

befriedigen muss. Weiter aber folgt, dass z innerhalb solcher Grenzen variabel sein muss, dass die rechte Seite der Gleichung (7) beständig positiv oder null ist. Verschwindet die rechte Seite von (7), so wird z zu einem Maximum oder Minimum. *Aber die cubische Gleichung:*

$$(9) \qquad (h - 2gz)(l^2 - z^2) - c^2 = 0$$

hat für $c^2 > 0$ *zwei reelle Wurzeln* z_1, z_2 *zwischen* $-l$ *und* $+l$ *und eine dritte* z_3 *oberhalb* l; denn die linke Seite der Gleichung wird für $z = \pm l$ negativ, ist dagegen positiv für z_0 und $+\infty$. Sind die Wurzeln z_1, z_2 verschieden, so sei z_1 die kleinere; es gilt also $z_1 \leqq z_2$. Für lim. $c^2 = 0$ wird $z_1 = -l$, und entweder eine der beiden Wurzeln z_2, z_3 oder beide werden gleich $+l$. Merken wir somit an:

$$(10) \qquad -l \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq +l \leqq z_3.$$

Der Wert von z aber wird z_1 als Minimum und z_2 als Maximum besitzen, mithin auf das Intervall $z_1 \leqq z \leqq z_2$ eingeschränkt erscheinen.

Zur Einführung der elliptischen Functionen berechnen wir drei reelle Grössen e_1, e_2, e_3 verschwindender Summe aus:

$$\tau(e_2 - e_1) = z_3 - z_1, \quad \tau(e_3 - e_1) = z_2 - z_1, \quad \tau(e_2 - e_3) = z_3 - z_2,$$

wo τ ein gleich näher zu bestimmender positiver constanter Factor ist. Es ergiebt sich:

$$(11) \qquad \tau e_1 = z_1 - \frac{h}{6g}, \quad \tau e_2 = z_3 - \frac{h}{6g}, \quad \tau e_3 = z_2 - \frac{h}{6g},$$

so dass der Bedingung $e_1 \leqq e_3 \leqq e_2$ genügt wird. Weiter definieren wir $\wp(u)$ durch:

$$(12) \qquad \tau \wp(u) = z - \frac{h}{6g}$$

und entsprechen der Forderung $z_1 \leqq z \leqq z_2$ genau wie pg. 295 dadurch,

dass wir $\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)$ als reell veränderlich annehmen. Wir können vorschreiben, dass $\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)$ mit t wachse, und wollen übrigens als Wert von z für $t = 0$ den Minimalwert z_1 annehmen, als zugehörigen Wert von u aber $\frac{\omega_1}{2}$. Gleichung (7) liefert jetzt:

$$l^2\tau^2 \wp'(u)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2g\tau^3(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3),$$

$$2l^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = g\tau.$$

Setzen wir demnach den Proportionalitätsfactor $\tau = \frac{2l^2}{g}$, so folgt $du^2 = dt^2$, mithin bei Berücksichtigung der soeben über u getroffenen Bestimmungen $u = t + \frac{\omega_1}{2}$. *Die z-Coordinate stellt sich als elliptische Function der Zeit in der Gestalt dar:*

$$(13) \qquad z = \frac{h}{6g} + \frac{2l^2}{g}\wp\left(t + \frac{\omega_1}{2}\right).$$

Wir merken auch noch die Darstellung von z durch Jacobi'sche Functionen an. Erstlich finden wir aus (13) mit Benutzung einer pg. 251 (dritte Zeile) aufgestellten Formel:

$$z - z_1 = \frac{2l^2}{g}\left[\wp\left(t + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1\right] = \frac{2l^2}{g} \cdot \frac{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}{\wp(t) - e_1}.$$

Die Division durch $(z_2 - z_1)$ liefert weiter:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{e_2 - e_1}{\wp(t) - e_1}.$$

Setzen wir $w = t\sqrt{e_2 - e_1}$, so folgt unter Vermittlung von (11) pg. 237: *Die z-Coordinate des materiellen Punktes gestattet als Function der Zeit die Darstellung:*

$$(14) \qquad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = (\mathrm{sn}\, w)^2,$$

wo das Argument w und der Modul k^2 gegeben sind durch:

$$(15) \qquad w = t\sqrt{\frac{g(z_3 - z_1)}{2l^2}}, \quad k^2 = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \leq 1. \text{ —}$$

Auch bei der Darstellung von x und y schlagen wir einen ähnlichen Weg ein, wie pg. 297 ff. Nimmt u auf der imaginären Axe von $\frac{\omega_1}{2}$ bis 0 ab, so nimmt $\wp(u)$ von e_1 bis $-\infty$ ab und also die durch (12) als Function von u zu definierende Grösse z von z_1 bis $-\infty$. Dabei passieren wir einmal einen Wert u_1, für welchen $z = -l$ ge-

worden ist. Entsprechend giebt es auf der Verbindungsgeraden der Punkte $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ einen eindeutig bestimmten Punkt u_2, für den $z = + l$ wird. Für diese beiden Argumente folgt aus:

$$l^2 \tau^2 \wp'(u)^2 = (h - 2gz)(l^2 - z^2) - c^2$$

durch Eintragung von $u = u_1$ resp. u_2 und $z = \pm l$:

$$\wp'(u_1)^2 = \wp'(u_2)^2 = -\frac{c^2}{l^2 \tau^2} = -\frac{c^2 g^2}{4 l^6}.$$

Da nun $\wp'(u_1)$ negativ imaginär, $\wp'(u_2)$ positiv imaginär ist, so ziehen wir die Folgerungen:

$$(16) \qquad \wp'(u_1) = -i\frac{gc}{2l^3}, \quad \wp'(u_2) = i\frac{gc}{2l^3};$$

man erinnere sich nur, dass bereits im Anschluss an Formel (4) die Annahme $c \geq 0$ formuliert wurde.

Da r sofort aus z bestimmt werden kann, so haben wir zur Gewinnung von x und y nur noch die Kenntnis von φ nötig. Aus (4) aber folgt:

$$d\varphi = \frac{c\,dt}{r^2} = \frac{c\,dt}{l^2 - z^2} = \frac{c}{2l}\left(\frac{1}{l-z} + \frac{1}{l+z}\right)dt.$$

Rechts können wir setzen $dt = du$ und:

$$z + l = \tau[\wp(u) - \wp(u_1)], \quad z - l = \tau[\wp(u) - \wp(u_2)],$$

wodurch wir gewinnen:

$$d\varphi = \frac{cg}{4l^3}\left[\frac{1}{\wp(u) - \wp(u_1)} - \frac{1}{\wp(u) - \wp(u_2)}\right]du.$$

Die Anwendung der vorausgeschickten Gleichungen (16) liefert:

$$d\varphi = -\frac{1}{2i}\left[\frac{\wp'(u_1)}{\wp(u) - \wp(u_1)} + \frac{\wp'(u_2)}{\wp(u) - \wp(u_2)}\right]du,$$

d. i. nach einer pg. 223 aufgestellten Gleichung:

$$d\varphi = \frac{1}{2i}[\zeta(u + u_1) - \zeta(u - u_1)$$
$$+ \zeta(u + u_2) - \zeta(u - u_2) - 2\zeta(u_1) - 2\zeta(u_2)]du.$$

Die Integration ist hier nach (4) pg. 186 sofort durchführbar und ergiebt:

$$(17) \quad \varphi = \frac{1}{2i}\log\left[\frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u + u_2)}{\sigma(u - u_1)\,\sigma(u - u_2)}\right] + ui[\zeta(u_1) + \zeta(u_2)] + C.$$

Setzt man noch $u = t + \frac{\omega_1}{2}$, so gelangt man gerade wie pg. 301 zur Function σ_1; es ist:

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log \left[\frac{\sigma_1(t+u_1)\,\sigma_1(t+u_2)}{\sigma_1(t-u_1)\,\sigma_1(t-u_2)}\right] + it[\zeta(u_1) + \zeta(u_2)] + C',$$

wo C' eine neue Constante bedeutet. Setzen wir fest, dass zur Zeit $t = 0$ der Winkel $\varphi = 0$ sein soll, *so ergiebt sich folgende Darstellung des Winkels* $\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ *als Function der Zeit* t*:*

$$(18) \qquad \varphi = \frac{1}{2i} \log \left[\frac{\sigma_1(t+u_1)\,\sigma_1(t+u_2)}{\sigma_1(t-u_1)\,\sigma_1(t-u_2)}\right] + it[\zeta(u_1) + \zeta(u_2)].$$

Lässt man t um ω_2 zunehmen, so nimmt z seinen Anfangswert wieder an, während φ um den leicht als reell erkennbaren*) Betrag:

$$(19) \qquad \varphi_0 = \omega_2 i[\zeta(u_1) + \zeta(u_2)] - \eta_2 i(u_1 + u_2)$$

zunimmt. Wesentlich ist, dass dieser Winkel φ_0 von t unabhängig ist. Da zufolge (5) auch die Geschwindigkeit v nach Verlauf der Zeit ω_2 wieder die gleiche ist, so ergiebt sich, *dass der zu untersuchende Bewegungsvorgang ein periodischer ist.* Die Curve, welche der materielle Punkt auf der Kugel (1) beschreibt, setzt sich aus lauter congruenten Stücken zusammen, deren einzelnes wir etwa von einem höchsten Punkte bis zum nächst folgenden rechnen. Ein erstes dieser Stücke wird also z. B. während der Zeit von $t = -\frac{\omega_2}{2}$ bis $t = +\frac{\omega_2}{2}$ beschrieben. Da aber zufolge (13) und (18) bei Zeichenwechsel von t der Wert z unverändert bleibt, während $-\varphi$ an Stelle von φ tritt, *so setzt sich das einzelne Stück unserer Curve aus zwei symmetrischen Hälften zusammen.*

Die Zeitdauer ω_2, welche der Punkt braucht, um von einem höchsten Punkte seiner Bahn bis zum nächsten zu gelangen, heisse die „*Schwingungsdauer*" des sphärischen Pendels und werde als solche auch durch T bezeichnet. Wir merken für dieselbe noch die aus (15) entspringende Darstellung an:

$$(20) \qquad T = 2K\sqrt{\frac{2l^2}{g(z_3 - z_1)}}.$$

Erster Specialfall.

Ist $c = 0$, so ist zufolge (3) der Quotient $\frac{y}{x}$ constant. Der Punkt bewegt sich demnach in einer Verticalebene, d. h. wir haben den Fall des *einfachen Pendels.* Jetzt ist $z_1 = -l$; wir hatten aber weiter schon vorhin für diesen Fall die beiden Möglichkeiten genannt, dass entweder $z_3 = l$ oder $z_2 = l$ wird, und müssen hier auch noch den Übergangsfall $z_3 = z_2 = l$ betrachten.

---

*) Siehe die analogen Überlegungen pg. 299 unten und pg. 300 oben.

I. Es mögen erstlich die Annahmen gelten:

$$z_1 = -l, \quad z_2 = \frac{h}{2g} < l, \quad z_3 = l.$$

Die Formeln (15) nehmen die Gestalt an:

$$w = t\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad k^2 = \frac{h + 2gl}{4gl}.$$

Die Ebene des Pendels ist hierneben in Figur 85 so orientiert gedacht, dass es zur Zeit $t = 0$ die tiefste Stelle seiner Bahn in der nach rechts weisenden Pfeilrichtung durchläuft. Der (nach rechts positiv gerechnete) Ausschlagswinkel ψ möge zur Zeit t erreicht sein. Das zur Zeit $\frac{1}{2}T$ erreichte Maximum von ψ ist in Figur 85 mit α bezeichnet; hier ist $v = 0$ geworden, und der Punkt kehrt um.

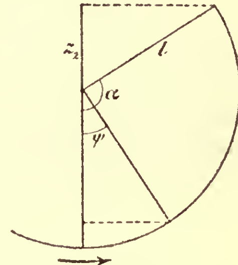


Fig. 85.

Man liest nun aus der Figur sofort ab:

$$\frac{z}{z_1} = -\frac{z}{l} = \cos\psi, \quad \frac{z_2}{l} = \frac{h}{2gl} = -\cos\alpha.$$

Die Gleichung (14) sowie die zweite Gleichung (15) liefern damit nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn} w, \quad \cos\frac{\psi}{2} = \operatorname{dn} w, \quad k = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Für die Schwingungsdauer ergiebt Gleichung (20):

$$T = 2K\sqrt{\frac{l}{g}}$$

oder, falls wir die Reihenentwicklung (1) pg. 269 für K eintragen:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right].$$

II. Im zweiten Falle gelten die Voraussetzungen:

$$z_1 = -l, \quad z_2 = l, \quad z_3 = \frac{h}{2g} > l.$$

Die Formeln (15) ergeben:

$$k^2 = \frac{4gl}{h + 2gl}, \quad w = \frac{t}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Die Schwingungsdauer stellt sich jetzt dar durch:

$$T = 2Kk\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[k + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^3 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^5 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^7 + \cdots\right].$$

Gebraucht man den Winkel ψ im bisherigen Sinne, so ergiebt Formel (14) nach leichter Zwischenrechnung $\sin\frac{\psi}{2} = \operatorname{sn} w$ und also:

$$\psi = 2 \operatorname{am} w = 2 \operatorname{am} \frac{2Kt}{T}.$$

Der Winkel ψ wächst jetzt mit t unaufhörlich, so dass der materielle Punkt, ohne die Richtung zu ändern, fortdauernd die Peripherie eines vollen Kreises beschreibt; dabei wird derselbe einen einmaligen Umlauf während der Zeit T ausführen.

III. Die beiden bisher besprochenen Möglichkeiten haben als gemeinsamen Grenzfall denjenigen, dass $z_2 = z_3 = l$ zutrifft. Hier wird $k = 1$, und es tritt eine Ausartung der elliptischen Functionen in Exponentialfunctionen resp. hyperbolische Functionen ein (cf. pg. 99 ff.). Setzen wir nämlich $\operatorname{sn} w = s$, so gilt nach (2) pg. 242 wegen $k^2 = 1$:

$$w = \int_0^s \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+s}{1-s}\right),$$

woraus wir berechnen:

$$\operatorname{sn} w = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}.$$

Andrerseits folgt aus (15), wie im Falle I, die Darstellung $w = t\sqrt{\frac{g}{l}}$ von w in t. Der wieder im bisherigen Sinne gedachte Winkel ψ stellt sich damit in der Gestalt dar:

$$\psi = 2 \arcsin\left(\frac{e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}}{e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}}\right).$$

Wir haben hier die sogen. „asymptotische“ Bewegung des Pendels; der Winkel ψ wächst mit wachsendem t; indessen verlangsamt die Bewegung des materiellen Punktes immer mehr, so dass erst für lim. $t = \infty$ der Winkel ψ die Grenze π erreicht.

Zweiter Specialfall.

Ist $c^2 > 0$, so kann nur noch in dem einen Falle eine Ausartung der elliptischen Functionen eintreten, dass die beiden Wurzeln z_1 und z_2 der cubischen Gleichung (9) identisch ausfallen. Alsdann gilt lim. $(e_3 - e_1) = 0$, so dass die pg. 254 behandelte Ausartung vorliegt. Der Bewegungsvorgang ist jetzt ein elementarer; man erkennt leicht, dass der materielle Punkt mit constanter Geschwindigkeit die Peripherie eines Horizontalkreises unserer Kugeloberfläche beschreibt.

§ 7. Drehung eines starren Körpers um einen Punkt.

Es sei ein starrer Körper, d. i. ein System endlich oder unendlich vieler fest mit einander verbundener materieller Punkte, gegeben; und es sei einer dieser Punkte oder auch ein sonstiger starr mit dem Körper verbundener Punkt im Raume fest gedacht. Der Körper soll ohne Einwirkung äusserer Kräfte um diesen Punkt frei beweglich sein. Die Bewegung, welche er ausführen wird, soll untersucht werden*).

I. Rein geometrische Betrachtung der Drehung des starren Körpers.

Das Centrum der Drehung sei der Nullpunkt eines Systems rechtwinkliger Coordinaten x, y, z. Neben diesem Systeme, das seine Lage dauernd im Raume behalten soll, führen wir ein zweites System rechtwinkliger Coordinaten X, Y, Z mit dem gleichen Nullpunkte ein, welches mit dem Körper fest verbunden sein soll und demnach mit ihm die hier zu untersuchende Bewegung ausführt. Die positiven Axenrichtungen werden wir so wählen, dass das bewegliche System durch Drehung in das feste überführbar ist.

Beide Systeme hängen zusammen vermöge der Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z, \end{cases}$$

wo die neun Coefficienten Functionen der Zeit sind. Geometrisch bedeuten diese Coefficienten die Cosinus der Winkel zwischen den festen und beweglichen Axen; es gelten demnach die wohlbekannten Relationen:

$$(2) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \end{cases}$$

Vermöge derselben berechnet man aus (1)

---

*) Ein schwerer geworfener Körper würde, falls der Luftwiderstand verschwindend klein wäre, um seinen Schwerpunkt die im Texte zu untersuchende Bewegung ausführen, während der Schwerpunkt selbst die parabolische Wurfbahn beschreiben würde.

$$(3) \qquad \begin{cases} X = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{cases}$$

Löst man das System (1) ohne Benutzung von (2) nach X, Y, Z auf und vergleicht das Ergebnis mit (3), so folgt:

$$Da_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad Da_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3, \quad Da_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1, \cdots,$$

unter D die Determinante des Gleichungssystems (1) verstanden. Wenn man diese drei explicite angegebenen Gleichungen quadriert und addiert, so folgt bei Benutzung von (2):

$$D^2 = b_1^2(c_2^2 + c_3^2) + b_2^2(c_3^2 + c_1^2) + b_3^2(c_1^2 + c_2^2) - 2 b_2 c_2 b_3 c_3 \\ - 2 b_3 c_3 b_1 c_1 - 2 b_1 c_1 b_2 c_2,$$

$$D^2 = b_1^2(1 - c_1^2) + b_2^2(1 - c_2^2) + \cdots - 2 b_2 c_2 b_3 c_3 - 2 b_3 c_3 b_1 c_1 - \cdots,$$

$$D^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)^2 = 1.$$

Es ergiebt sich $D = \pm 1$, wo indessen nur das obere Zeichen brauchbar ist; denn bei continuierlicher Überführung des beweglichen Systems in das feste kann D keine unstetige Abänderung erfahren und hat doch schliesslich den Wert $+1$. Merken wir demnach die Relationen an:

$$(4) \quad a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad a_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3, \quad a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1, \cdots,$$

welche später Verwendung finden sollen. —

Um Geschwindigkeiten einführen zu können, müssen wir die Betrachtung *unendlich kleiner Drehungen* voraussenden. Weicht demnach das System der X, Y, Z von dem der x, y, z nur erst unendlich wenig ab, so sind a_1, b_2, c_3 die Cosinus unendlich kleiner Winkel, während die übrigen sechs Coefficienten in (1) die Sinus solcher Winkel sind. Wegen der bekannten Natur der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus entsprechen wir diesen Verhältnissen, indem wir:

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1$$

setzen, die übrigen sechs Coefficienten in (1) oder (3) aber mit unendlich kleinen Grössen identificieren. Die Relationen (2) liefern dann (bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung):

$$b_1 + a_2 = 0, \quad c_1 + a_3 = 0, \quad c_2 + b_3 = 0.$$

Unter Benutzung geeigneter neuer Bezeichnungen merken wir somit den Satz an: *Eine unendlich kleine Drehung lässt sich darstellen durch:*

$$(5)\quad \begin{cases} x = + X - \mu Y + \lambda Z, \\ y = + \mu X + Y - \varkappa Z, \\ z = - \lambda X + \varkappa Y + Z, \end{cases}$$

wo $\varkappa$, λ, μ unendlich kleine Grössen sind.

Bei dieser Drehung bleibt natürlich der Nullpunkt fest. Soll überdies ein weiterer bestimmter Punkt (x, y, z) eine Verschiebung nicht erfahren, so müssen die zugehörigen X, Y, Z bez. den x, y, z gleich sein. Dies ist stets und nur der Fall, wenn

$$-\mu y + \lambda z = 0, \quad \mu x - \varkappa z = 0, \quad -\lambda x + \varkappa y = 0$$

ist, drei Gleichungen, die sich auch so schreiben lassen*):

$$(6)\qquad \frac{x}{\varkappa} = \frac{y}{\lambda} = \frac{z}{\mu}.$$

Die unendlich kleine Drehung stellt sich als eine solche um die durch (6) *gegebene Axe dar.*

Zur Berechnung des unendlich kleinen Drehungswinkels $d\varphi$ bemerke man, dass die zur Axe (6) normale Ebene der Gleichung:

$$(7)\qquad \varkappa x + \lambda y + \mu z = 0$$

eine Drehung in sich um den Winkel $d\varphi$ erfährt. Der dieser Ebene angehörende Punkt $x = \lambda$, $y = -\varkappa$, $z = 0$ hat nach der Drehung die Coordinaten $X = \lambda$, $Y = -\varkappa$, $Z = 0$ und also $x = \lambda + \varkappa\mu$, $y = \lambda\mu - \varkappa$, $z = -\lambda^2 - \varkappa^2$. Die beiden vom Nullpunkte nach den Punkten $(\lambda, -\varkappa, 0)$, $(\lambda + \varkappa\mu, \lambda\mu - \varkappa, -\varkappa^2 - \lambda^2)$ ziehenden Strahlen bilden mit einander den Winkel $d\varphi$. Berechnet man $\sin d\varphi = d\varphi$ nach einer bekannten Grundformel der analytischen Geometrie, so ergiebt sich als *Grösse des Drehungswinkels*:

$$(8)\qquad d\varphi = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2}.$$

Eine sehr brauchbare geometrische Darstellung der fraglichen Drehung gewinnt man auf folgende Art. Man markiere auf der Drehungsaxe (6) den Punkt $(\tau\varkappa, \tau\lambda, \tau\mu)$, unter τ einen positiven festgewählten Proportionalitätsfactor verstanden; man denkt denselben zweckmässig derart unendlich gross gewählt, dass der fragliche Punkt $(\tau\varkappa, \tau\lambda, \tau\mu)$ vom Nullpunkte endliche Entfernung bekommt. *Die Drehung* (5) *wird alsdann durch einen Pfeil dargestellt, der vom Nullpunkte bis zum Punkte* $(\tau\varkappa, \tau\lambda, \tau\mu)$ *reicht und gegen letzteren Punkt gerichtet ist.* Eine solche nach *Richtung* und *Länge* fixierte Strecke

*) Vorausgesetzt, dass keine der Grössen $\varkappa$, λ, μ mit 0 identisch ist. In diesem Falle tritt eine leicht erkennbare Abänderung der Gleichungen (6) ein.

nennt man einen „*Vector*“; wir sprechen demnach fortan von einem zu unserer Drehung (5) gehörenden „*Drehungsvector*“.

Ein solcher Vector ist in der That zur Darstellung der einzelnen Drehung sehr geeignet. Erstlich nämlich fixiert der Vector die Drehungsaxe. Andrerseits giebt die Länge $\tau \cdot d\varphi$ des Vectors die Grösse des Drehungswinkels. Um aber den Drehungssinn in Erfahrung zu bringen, ziehen wir nochmals die Ebene (7) heran, auf welcher der Vector normal steht. Man vergegenwärtige sich in dieser Ebene die Lage des Punktes $(\tau\lambda, -\tau\varkappa, 0)$, welcher nach der Drehung die z-Coordinate $-\tau(\varkappa^2 + \lambda^2)$ bekommt und also *unter* die xy-Ebene rückt. *Der Drehungssinn der Ebene* (7) *ist demnach, von Seiten des Vectors aus gesehen, entgegen dem Drehungssinn des Uhrzeigers.* Die Pfeilrichtung des Vectors legt solchergestalt zugleich den Richtungssinn der Drehung fest.

Eine erste Benutzung des Drehungsvectors findet bei folgender Überlegung statt. Möge das bewegliche Coordinatensystem nach Ausführung der Drehung (5) einer zweiten, gleichfalls unendlich kleinen Drehung unterworfen werden. Auf die dadurch erreichte Lage der beweglichen Axen beziehe man die Coordinaten X', Y', Z'; dann gilt:

$$\begin{aligned} X &= + \quad X' - \mu' Y' + \lambda' Z', \\ Y &= + \mu' X' + \quad Y' - \varkappa' Z', \\ Z &= - \lambda' X' + \varkappa' Y' + \quad Z', \end{aligned}$$

wo $\varkappa'$, λ', μ' unendlich klein sind. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes berechnet man:

$$\begin{aligned} x &= + X' - (\mu + \mu') Y' + (\lambda + \lambda') Z', \\ y &= + (\mu + \mu') X' + Y' - (\varkappa + \varkappa') Z', \\ z &= - (\lambda + \lambda') X' + (\varkappa + \varkappa') Y' + Z'. \end{aligned}$$

Die beiden hinter einander ausgeübten Drehungen können hiernach durch eine einzige ersetzt werden, von welcher man sagt, sie entstehe durch „Composition“ jener beiden Drehungen. Die Lage der drei Punkte $(\tau\varkappa, \tau\lambda, \tau\mu)$, $(\tau\varkappa', \tau\lambda', \tau\mu')$, $(\tau\varkappa + \tau\varkappa', \tau\lambda + \tau\lambda', \tau\mu + \tau\mu')$, welche mit dem Nullpunkte die Ecken eines ebenen Parallelogramms bilden, liefert aber unmittelbar den Satz: *Der Vector der componierten Drehung entsteht nach dem „Parallelogrammgesetz“ der Mechanik aus den Vectoren der componierenden Drehungen.* Hierin ist zugleich das weitere Theorem enthalten: *Die componierte Drehung ist unabhängig von der Anordnung der componierenden Drehungen.* Diese Sätze bleiben offenbar bestehen, falls es sich um die Composition von mehr als zwei unendlich kleinen Drehungen handelt.

Man kann hiernach die Drehung (5) zusammengesetzt denken aus

drei Drehungen, deren Vectoren durch *Projection des Vectors der Drehung* (5) *auf die Axen der Coordinaten* x, y, z gewonnen werden. Zufolge (8) werden die Drehungswinkel $d\varphi_x$, $d\varphi_y$, $d\varphi_z$ dieser drei *„nach den Axen der* x, y, z *genommenen Componenten“ der Drehung* (5) einfach durch:

$$d\varphi_x = \varkappa, \quad d\varphi_y = \lambda, \quad d\varphi_z = \mu \tag{9}$$

gegeben sein, womit die $\varkappa$, λ, μ eine unmittelbare geometrische Bedeutung gewonnen haben. Der positive Drehungssinn um die einzelne Coordinatenaxe ist nach den bezüglichen obigen Festsetzungen zu wählen. Dem leichteren Überblicke dient Figur 86*); eine positive Drehung um die x-Axe, d. i. eine solche mit positivem $\varkappa = d\varphi_x$, befolgt denjenigen Drehungssinn, welcher durch die Pfeilrichtung des in der yz-Ebene gezeichneten Kreisquadranten festgelegt ist u. s. w.

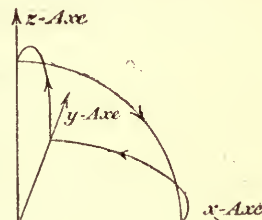


Fig. 86.

Ein beliebiger Punkt (x, y, z) hat nach der Drehung im bewegten System die Coordinaten $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ und also im festen System die durch:

$$x - y\,d\varphi_z + z\,d\varphi_y, \quad x\,d\varphi_z + y - z\,d\varphi_x, \quad -x\,d\varphi_y + y\,d\varphi_x + z$$

gegebenen. Man kann sagen, *der Punkt* (x, y, z) *sei nach der Stelle* ($x + dx$, $y + dy$, $z + dz$) *verschoben, wobei* dx, dy, dz *sich bestimmen zu:*

$$\left\{\begin{aligned} dx &= -y\,d\varphi_z + z\,d\varphi_y, \\ dy &= -z\,d\varphi_x + x\,d\varphi_z, \\ dz &= -x\,d\varphi_y + y\,d\varphi_x. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die während *endlicher* Zeit vollführte Rotation des starren Körpers um den Nullpunkt denkt man aus einer Reihe unendlich kleiner Drehungen zusammengesetzt. Die Axe der einzelnen dieser Drehungen bezeichnen wir als die augenblickliche oder *„instantane Drehaxe“*. Bei der hier zu untersuchenden Bewegung wird nun die instantane Drehaxe ihre Stellung mit der Zeit stetig ändern. Sie beschreibt dabei die Mantelfläche eines Kegels mit der Spitze im Nullpunkte; man bezeichnet diesen Kegel als den *„Herpolodiekegel“* der fraglichen Bewegung. Auch im starren Körper wird die Drehungsaxe ihre Lage stetig ändern; man kann sagen, dieselbe beschreibe im beweglichen System der X, Y, Z gleichfalls die Mantelfläche eines Kegels mit der Spitze im Nullpunkte, des sogen. *„Polodiekegels“*.

---

*) Dieselbe ist, wie üblich, so gedacht, dass die xz-Ebene mit der Papierebene zusammenfällt, und die positive y-Axe vom Beschauer abgewandt ist.

Beide Kegel haben die Spitze gemeinsam und berühren einander zu jeder Zeit längs einer der geradlinigen Erzeugenden. Indem diese Berührungsgerade fortwährend stetig wechselt, andrerseits aber als instantane Drehaxe die für den Augenblick festbleibenden Punkte vereinigt, entspringt die Anschauung, *dass der bewegliche Polodiekegel auf dem festen Herpolodiekegel ohne Gleitung abrollt* *).

II. Die Euler'schen Differentialgleichungen.

Die Bewegung, welche der starre Körper während des Elementes zwischen den Zeiten t und $(t + dt)$ ausführt, ist eine unendlich kleine Drehung. Ist $d\varphi$ deren (absolut genommener) Drehungswinkel, so ist $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ die *Winkelgeschwindigkeit* zur Zeit t. Entschliessen wir uns, den vorhin unbestimmt gelassenen Proportionalitätsfactor $\tau = \frac{1}{dt}$ zu setzen, so wird die Länge des Drehungsvectors offenbar $\tau\, d\varphi = \omega$, d. i. er stellt vermöge seiner Länge direct die Grösse der Winkelgeschwindigkeit dar. Die Richtung des Vectors liefert Axe und Drehungssinn der Geschwindigkeit. Es erscheint demnach gerechtfertigt, wenn wir den fraglichen Vector fortan als den *„Vector der Geschwindigkeit" zur Zeit t* bezeichnen.

Es übertragen sich nun die Theoreme über Zusammensetzung und Zerlegung der unendlich kleinen Drehungen unmittelbar auf die Geschwindigkeiten. Setzen wir:

$$(11)\qquad \frac{d\varphi_x}{dt} = \omega_x, \quad \frac{d\varphi_y}{dt} = \omega_y, \quad \frac{d\varphi_z}{dt} = \omega_z,$$

(wobei offenbar diese ω_x, ω_y, ω_z durchaus nicht, wie ω, auf positive Werte eingeschränkt sind), so haben wir *„die nach den Axen der x, y, z genommenen Componenten" der Winkelgeschwindigkeit* ω. Man gewinnt dieselben direct durch Projection des Geschwindigkeitsvectors auf die Axen und hat übrigens:

$$(12)\qquad \omega = +\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Von den sechs Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers **) kommen hier nur diejenigen drei zur Geltung, welche die Drehungsmomente um die Axen betreffen. Wir denken den Körper aus materiellen Punkten zusammengesetzt und nennen generell m die Masse

---

*) Diese Vorstellung wurde zuerst von Poinsot entwickelt; siehe dessen *„Théorie nouvelle de la rotation des corps"* (Paris 1834).

**) Siehe hierüber die Lehrbücher der Dynamik, z. B. E. J. Routh, *„Die Dynamik der Systeme starrer Körper"*, übersetzt von A. Schepp (Leipzig 1898), Bd. 1 pg. 58.

des einzelnen Punktes, x, y, z aber dessen Coordinaten. Da es sich um die kräftefreie Bewegung des Körpers handeln soll, so sind die fraglichen Drehungsmomente gleich null, und die Differentialgleichungen haben daraufhin die Gestalt:

$$(13)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Nun folgt aus (10) und (11):

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega_z + z\omega_y, \quad \frac{dy}{dt} = x\omega_z - z\omega_x, \quad \frac{dz}{dt} = -x\omega_y + y\omega_x.$$

Man differenziere nach t und ersetze die rechts auftretenden Ableitungen von x, y, z nach t wieder durch $-y\omega_z + z\omega_y, \cdots$; man findet so nach kurzer Zwischenrechnung:

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = (y^2+z^2)\frac{d\omega_x}{dt} - (z^2-y^2)\,\omega_y\omega_z - yz(\omega_y^2 - \omega_z^2)$$
$$+ xy\left(\omega_x\omega_z - \frac{d\omega_y}{dt}\right) - xz\left(\omega_x\omega_y + \frac{d\omega_z}{dt}\right),$$

sowie zwei entsprechende Ausdrücke für die linken Seiten der zweiten und dritten Gleichung (13).

Setzt man daraufhin die erste Gleichung (13) an, so berücksichtige man, dass die Componenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ der Winkelgeschwindigkeit für alle Punkte (x, y, z) des Körpers dieselben sind. Die genannte Differentialgleichung nimmt damit die Gestalt an:

$$(14)\quad \begin{aligned} &\frac{d\omega_x}{dt}\sum m(y^2+z^2) - \omega_y\omega_z\sum m(z^2-y^2) - (\omega_y^2-\omega_z^2)\sum myz \\ &\quad + \left(\omega_x\omega_z - \frac{d\omega_y}{dt}\right)\sum mxy - \left(\omega_x\omega_y + \frac{d\omega_z}{dt}\right)\sum mxz = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung sowie die beiden ihr coordinierten liefern ein besonders einfaches Resultat, wenn wir zum beweglichen Coordinatensystem X, Y, Z übergehen. Letzteres sollte mit dem Körper fest verbunden sein. In dieser Hinsicht erscheint es jetzt zweckmässig zu bestimmen, *dass die Axen der X, Y, Z mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Nullpunkt zusammenfallen.* Es werden dann die sechs Gleichungen gelten:

$$(15)\quad \begin{cases} \sum m(Y^2+Z^2) = A, & \sum m(Z^2+X^2) = B, & \sum m(X^2+Y^2) = C, \\ \sum mYZ = 0, & \sum mZX = 0, & \sum mXY = 0, \end{cases}$$

wo A, B, C die Hauptträgheitsmomente sind. Die Anordnung der Axen sei eine solche, dass:

$$A \geqq B \geqq C \tag{16}$$

zutrifft*).

Um diese Gleichungen verwerten zu können, wollen wir die Winkelgeschwindigkeit ω jetzt auch nach den zur Zeit t vorliegenden Axen X, Y, Z zerlegen; die so entspringenden Componenten seien ω_1, ω_2, ω_3 genannt. Die Zeit t soll dabei diejenige sein, auf welche sich die Formeln (13) ff. beziehen, die aber übrigens beliebig gewählt werden konnte. Wir machen sodann die Annahme, dass gerade zu dieser Zeit t das bewegliche System der X, Y, Z mit dem festen der x, y, z coincidiert. In diesem Augenblick werden demnach die x, y, z bez. den X, Y, Z gleich sein, und ebenso sind die Componenten ω_x, ω_y, ω_z im fraglichen Augenblicke mit den ω_1, ω_2, ω_3 gleich. Die Gleichung (14) gewinnt daraufhin bei Berücksichtigung von (15) die Gestalt:

$$A \frac{d\omega_x}{dt} - (B - C)\,\omega_2\omega_3 = 0. \tag{17}$$

Hier gilt nun der höchst wichtige Satz, dass auch noch die während des nächst folgenden Zeitelementes dt eintretenden Differentiale $d\omega_1$ und $d\omega_x$ gleich sind. Im Augenblick $(t + dt)$ sind nämlich die Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das feste System $\omega_x + d\omega_x$, $\omega_y + d\omega_y$, $\omega_z + d\omega_z$. Das bewegliche System der X, Y, Z coincidirt nicht mehr mit dem der x, y, z, vielmehr folgt aus (5) und (9):

$$\begin{aligned} X &= +x + y\,d\varphi_z - z\,d\varphi_y, \\ Y &= -x\,d\varphi_z + y + z\,d\varphi_x, \\ Z &= +x\,d\varphi_y - y\,d\varphi_x + z. \end{aligned}$$

Setzt man hier die Coordinaten vom Endpunkt des Geschwindigkeitsvectors zur Zeit $(t + dt)$ im festen System, nämlich $x = \omega_x + d\omega_x, \cdots$ ein, so sind die zugehörigen X, Y, Z die Geschwindigkeitscomponenten $\omega_1 + d\omega_1$, $\omega_2 + d\omega_2$, $\omega_3 + d\omega_3$ zur Zeit $t + dt$ im beweglichen System; man berechnet hieraus bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung und mit Rücksicht auf $\omega_x = \omega_1, \cdots$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\omega_x + \omega_y\,d\varphi_z - \omega_z\,d\varphi_y, \\ d\omega_2 &= d\omega_y + \omega_z\,d\varphi_x - \omega_x\,d\varphi_z, \\ d\omega_3 &= d\omega_z + \omega_x\,d\varphi_y - \omega_y\,d\varphi_x. \end{aligned}$$

Aber es ist $d\varphi_x = \omega_x dt$, $d\varphi_y = \omega_y dt$, $d\varphi_z = \omega_z dt$, so dass sich die vorstehenden Gleichungen in der That auf $d\omega_1 = d\omega_x, \cdots$ kürzen.

*) Siehe E. J. Routh a. a. O., Bd. 1, pg. 1 ff.

Ersetzen wir demnach $d\omega_x$ in (17) durch $d\omega_1$ und bilden die beiden coordinirten Gleichungen, so entspringt der Satz: *Sind die in Bezug auf das bewegliche System genommenen Componenten der Geschwindigkeit unseres kräftefreien starren Körpers* ω_1, ω_2, ω_3, *so gelten zu jeder Zeit t die drei Differentialgleichungen:*

$$(18)\qquad \begin{cases} A\dfrac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\,\omega_2\omega_3 = 0, \\ B\dfrac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\,\omega_3\omega_1 = 0, \\ C\dfrac{d\omega_3}{dt} - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = 0, \end{cases}$$

wo A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Körpers sind. Dies sind die nach Euler*) benannten Differentialgleichungen für die Rotation eines starren Körpers um einen Punkt.

III. Integration der Euler'schen Gleichungen**).

Die Integration der drei Gleichungen (18) führt zunächst zur Kenntnis des Polodiekegels. Man kann erstlich zwei rationale Integralgleichungen von (18) sofort angeben. Addiert man nämlich die Euler-schen Gleichungen, nachdem man sie mit ω_1, ω_2, ω_3 multipliciert hat, so ergiebt sich, dass die Ableitung von $(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)$ nach der Zeit t verschwindet, d. h. dass dieser Ausdruck constant ist. Ebenso überzeugt man sich von der Constanz der Summe $(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2)$. Wir schreiben unter geschickter Bezeichnung der beiden hiermit eintretenden Constanten:

$$(19)\qquad \begin{cases} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = D\mu^2, \\ A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = D^2\mu^2, \end{cases}$$

wobei D und μ als reelle positive Constanten anzusehen sind.

Der Punkt $X = \omega_1$, $Y = \omega_2$, $Z = \omega_3$ liefert den Endpunkt des Geschwindigkeitsvectors. Es ergiebt sich: *Der Endpunkt des Geschwindigkeitsvectors beschreibt im beweglichen Coordinatensystem, d. i. im Körper, die durch:*

$$(20)\qquad \begin{cases} AX^2 + BY^2 + CZ^2 = D\mu^2 \\ A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 = D^2\mu^2 \end{cases}$$

---

*) Vergl. dessen Abhandlung *„Mouvement de rotation des corps solides autour d'un point fixe"* in den Abhandlungen der Berlin. Akad. von 1758.

**) Wegen der systematischen Theorie der Integration von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung siehe Kapitel VII, § 3 ff.

dargestellte Raumcurve vierter Ordnung; dieselbe heisst die *„Polodiecurve“*. Die Combination der Gleichungen (20) giebt:

$$(21)\qquad A(A-D)\,X^2+B(B-D)\,Y^2+C(C-D)\,Z^2=0.$$

Hier haben wir die Gleichung des Polodiekegels vor uns, der damit als Kegel zweiten Grades erkannt ist. Man bemerke, dass die Polodiecurve diesen Kegel nicht nur vollständig ersetzt, sondern auch noch die Grösse der Geschwindigkeit in jedem Augenblick zum Ausdruck bringt. Damit ein reeller Kegel (21) vorliegt, haben wir mit Rücksicht auf (16) für die Constante D die Ungleichung zu constatieren:

$$(22)\qquad A \geqq D \geqq C.$$

Die durch die erste Gleichung (20) gegebene Fläche kann man als „Trägheitsellipsoid“ des Körpers in Bezug auf den Nullpunkt ansehen. *Die Polodiecurve ist hiernach die Schnittcurve des Trägheitsellipsoids mit dem Polodiekegel.*

Aus (19) folgt weiter:

$$(23)\qquad \begin{cases} A(A-C)\,\omega_1^2=D(D-C)\,\mu^2-B(B-C)\,\omega_2^2, \\ C(A-C)\,\omega_3^2=D(A-D)\,\mu^2-B(A-B)\,\omega_2^2. \end{cases}$$

Hiernach liefert die zweite Euler'sche Gleichung (18) folgende gewöhnliche Differentialgleichung zwischen ω_2 und t:

$$B^2AC\left(\frac{d\omega_2}{dt}\right)^2$$
$$=\mu^4D^2(A-D)(D-C)\left[1-\frac{B(B-C)}{\mu^2D(D-C)}\,\omega_2^2\right]\left[1-\frac{B(A-B)}{\mu^2D(A-D)}\,\omega_2^2\right].$$

An dieser Stelle greifen die *elliptischen Functionen* ein*). Offenbar wird t in Abhängigkeit von ω_2 ein elliptisches Integral erster Gattung vorstellen; und umgekehrt wird sich (was wir sogleich weiter ausführen) ω_2 als Function von t durch die Jacobi'sche Function sn darstellen. Die Folge ist, dass ω_2 bei wachsendem t um den Wert 0 hin und her schwankt. Wir benutzen diesen Umstand, um als *Anfangspunkt $t=0$ der Zeit* einen Augenblick zu wählen, *in dem ω_2 als wachsende Grösse durch 0 hindurchgeht.*

Des weiteren haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Constante D grösser oder kleiner als B ist. Beide Fälle gestatten

*) Da wir weiterhin nur die Jacobi'schen Functionen benutzen, so ist eine Verwechselung der im Texte untersuchten Geschwindigkeitscomponenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ mit den ebenso bezeichneten Perioden der Weierstrass'schen Functionen nicht zu befürchten.

parallel gehende Behandlungen; wir verfolgen demnach etwa nur den Fall $B \geqq D \geqq C$. Setzen wir aber unter dieser Voraussetzung:

$$(24) \quad \frac{(A-B)(D-C)}{(A-D)(B-C)} = k^2, \quad \frac{B(B-C)}{\mu^2 D(D-C)}\,\omega_2^2 = s^2, \quad \frac{\mu^2 D(A-D)(B-C)}{ABC} = \lambda^2,$$

so gilt die Ungleichung $0 \leqq k^2 \leqq 1$, und es nimmt die Differentialgleichung zwischen ω_2 und t die Gestalt an:

$$\frac{ds^2}{(1-s^2)(1-k^2s^2)} = \lambda^2 dt^2.$$

Wir integrieren diese Differentialgleichung mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen durch $s = \mathrm{sn}\,(\lambda t)$, wo λ positiv gewählt werden soll. Ist ω_2 berechnet, so stellen sich auf Grund von (23) die ω_1, ω_2 vermöge der Functionen cn und dn dar. Es entspringt das Theorem: *Die nach den beweglichen Axen genommenen Geschwindigkeitscomponenten stellen sich als elliptische Functionen der Zeit t wie folgt dar:*

$$(25) \quad \begin{cases} \omega_1 = +\,\varepsilon\mu\sqrt{\dfrac{D(D-C)}{A(A-C)}}\,\mathrm{cn}\,(\lambda t), \\ \omega_2 = +\,\mu\sqrt{\dfrac{D(D-C)}{B(B-C)}}\,\mathrm{sn}\,(\lambda t), \\ \omega_3 = -\,\varepsilon\mu\sqrt{\dfrac{D(A-D)}{C(A-C)}}\,\mathrm{dn}\,(\lambda t); \end{cases}$$

hier sollen die Wurzeln rechter Hand positiv gewählt sein, der Multiplicator λ und der Modul k^2 sind gegeben durch:

$$(26) \quad \lambda = +\,\mu\sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC}}, \quad k^2 = \frac{(A-B)(D-C)}{(A-D)(B-C)},$$

und ε bedeutet entweder $+1$ oder -1. Die Vorzeichen sind hierbei der Forderung gemäss bestimmt, dass $\omega_1\omega_3$ für $t=0$ negativ wird; dies ist eine Folge der zweiten Gleichung (18) und der Voraussetzung, dass ω_2 in der Umgebung von $t=0$ mit t wachsen sollte. Die Werte von ω_1, ω_3 zur Zeit $t=0$ sind als gegeben anzusehen; sie bestimmen vermöge (19) die Constanten D und μ^2, während man ε etwa aus der ersten Gleichung (25) für $t=0$ unter der Voraussetzung bestimmt, dass μ als positive Quadratwurzel aus μ^2 gewählt wird.

Die Formeln (25) belehren uns darüber, *dass die instantane Drehaxe im starren Körper eine periodische Bahn beschreibt.* Zu einem einmaligen vollen Umlauf auf dem Mantel des Polodiekegels braucht sie die Zeit:

$$(27) \quad T = \frac{4K}{\lambda} = \frac{2\pi}{\mu}\frac{\sqrt{ABC}}{\sqrt{D(A-D)(B-C)}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right].$$

IV. Die Poinsot-Bewegung.

Der Verlauf des Herpolodiekegels ist nicht so übersichtlich, wie der des Polodiekegels. Poinsot hat dementsprechend die kräftefreie Bewegung des starren Körpers unter Vermeidung des Herpolodiekegels auf eine Weise beschrieben, die wir hier noch kurz darstellen wollen.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x, y), \quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = (y, z), \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = (z, x)$$

Diese Ausdrücke (y, z), (z, x), (x, y) zeigen bei einer Transformation des Coordinatensystems ein sehr einfaches Verhalten. Haben wir ein zweites rechtwinkliges System der Coordinaten X, Y, Z, die mit den x, y, z durch die Gleichungen (1) zusammenhängen, so berechnet man unter Benutzung der Relationen (4):

$$(y, z) = a_1 (Y, Z) + b_1 (Z, X) + c_1 (X, Y),$$
$$(z, x) = a_2 (Y, Z) + b_2 (Z, X) + c_2 (X, Y),$$
$$(x, y) = a_3 (Y, Z) + b_3 (Z, X) + c_3 (X, Y).$$

Wir denken diese Gleichungen für jeden einzelnen Punkt unseres starren Körpers gebildet, multiplicieren mit der Masse des Punktes und summieren über alle Punkte des Körpers; es folgt:

$$\sum m\,(y, z) = a_1 \sum m\,(Y, Z) + b_1 \sum m\,(Z, X) + c_1 \sum m\,(X, Y),$$

. . . .

Die Ableitungen der linken Seiten dieser Gleichungen nach t verschwinden zufolge (13); diese linken Seiten sind also drei Constanten gleich, die wir p_1, p_1, p_3 nennen:

$$\sum m\,(y, z) = p_1, \quad \sum m\,(z, x) = p_2, \quad \sum m\,(x, y) = p_3.$$

Lassen wir andrerseits wie vorhin die Axen der X, Y, Z mit der zur Zeit t erreichten Lage der Hauptaxen des Körpers in Bezug auf das Drehungscentrum coincidieren, so gelten für dieses System wie oben die Gleichungen:

$$\frac{dX}{dt} = -Y\omega_3 + Z\omega_2, \quad \frac{dY}{dt} = -Z\omega_1 + X\omega_3, \quad \frac{dZ}{dt} = -X\omega_2 + Y\omega_1.$$

Hieraus aber folgt:

$$\sum m\,(Y, Z) = \omega_1 \sum m\,(Y^2 + Z^2) - \omega_2 \sum m\,XY - \omega_3 \sum m\,XZ,$$

eine Gleichung, deren rechte Seite sich vermöge (15) sofort auf $A\omega_1$ zusammenzieht. Entsprechend findet man überhaupt:

$$\sum m(Y, Z) = A\omega_1, \quad \sum m(Z, X) = B\omega_2 \quad \sum m(X, Y) = C\omega_3,$$

und es bestehen demgemäss die folgenden drei Gleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} a_1 A\omega_1 + b_1 B\omega_2 + c_1 C\omega_3 = p_1, \\ a_2 A\omega_1 + b_2 B\omega_2 + c_2 C\omega_3 = p_2, \\ a_3 A\omega_1 + b_3 B\omega_2 + c_2 C\omega_3 = p_3. \end{cases}$$

Es hat nun der Endpunkt des Geschwindigkeitsvectors im festen System die Coordinaten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, im beweglichen aber $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, so dass man die Gleichungen hat:

$$a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3 = \omega_x,$$
$$a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + c_2\omega_3 = \omega_y,$$
$$a_3\omega_1 + b_3\omega_2 + c_3\omega_3 = \omega_z.$$

Multipliciert man diese Gleichungen bezw. mit den drei voraufgehenden und addiert die Producte, so folgt unter Benutzung der Relationen (2):

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = p_1\omega_x + p_2\omega_y + p_3\omega_z.$$

Aber die linke Seite dieser Gleichung hat nach (19) den von t unabhängigen Wert $D\mu^2$. Es entspringt der Satz: *Der Endpunkt* $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ *des Geschwindigkeitsvectors bewegt sich beständig in der „festen Ebene":*

$$(29)\qquad p_1 x + p_2 y + p_3 z = D\mu^2;$$

die „Herpolodiecurve" ist also eine ebene Curve.

Die Ebene (29) hat im System der X, Y, Z die Gleichung:

$$p_1(a_1 X + b_1 Y + c_1 Z) + p_2(a_2 X + \cdots) + p_3(a_3 X + \cdots) = D\mu^2,$$

welche man mit Hilfe von (28) sofort umrechnet auf:

$$(30)\qquad A\omega_1 X + B\omega_2 Y + C\omega_3 Z = D\mu^2.$$

Diese Gleichung aber liefert die *Tangentialebene an das durch die erste Gleichung* (20) *dargestellte Trägheitsellipsoid im Endpunkte* $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *des zur Zeit t vorliegenden Geschwindigkeitsvectors.* Wir gelangen zu der Erkenntnis, *dass bei der kräftefreien Bewegung des starren Körpers dessen Trägheitsellipsoid* (20) *während seiner Drehung um den Mittelpunkt beständig mit der festen Ebene* (29) *in Berührung bleibt und also auf dieser abrollt; die Vectoren nach den jeweiligen Berührungspunkten hin liefern den Herpolodiekegel und ergeben vermöge ihrer Länge in jedem Augenblick die Grösse der Geschwindigkeit.* Dies ist das von Poinsot entwickelte Bild der in Rede stehenden Bewegung, die man dieserhalb kurz als *„Poinsot-Bewegung"* bezeichnet.

V. Specialfälle.

Indem wir an der unter III gemachten Voraussetzung $B \geqq D \geqq C$ festhalten, wollen wir noch auf den Charakter der beiden Grenzfälle hinweisen, die hierbei eintreten können. Ist $B = D$, so besteht die Poinsot-Bewegung darin, dass das Trägheitsellipsoid gleichförmig um

seine mittlere Axe rotiert, und für $D = C$ rotiert es entsprechend um seine kleine Axe. Man bezeichnet beide Axen (und ebenso natürlich die grosse Axe) in diesem Sinne als *„permanente Drehungsaxen"*. Aber beide Bewegungen haben einen gänzlich verschiedenen Charakter, demzufolge die für $D = C$ als eine *„stabile"*, die bei $B = D$ als eine *„instabile"* bezeichnet wird.

Um diesen Unterschied näher darzulegen, betrachten wir zunächst den Fall, dass $D - C = \delta^2$ unendlich klein wird. Wir gewinnen einen unendlich kleinen Wert des Moduls k^2, so dass nach pg. 254 die Jacobi'schen Functionen cn, sn angenähert durch trigonometrische Functionen dargestellt werden können, während dn nahehin gleich 1 ist. Man findet:

$$\omega_1 = \varepsilon\mu\delta \sqrt{\frac{C}{A(A-C)}} \cos\left(\mu t \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\right),$$

$$\omega_2 = \mu\delta \sqrt{\frac{C}{B(B-C)}} \sin\left(\mu t \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\right),$$

$$\omega_3 = -\varepsilon\mu.$$

Hier sind ω_1, ω_2 *dauernd* unendlich klein. Haben wir aber zu irgend einer Zeit unendlich kleine ω_1, ω_2, so ist zufolge (19) die Differenz $(D - C)$ unendlich klein, d. h. der eben betrachtete Fall liegt dann thatsächlich vor. Der Charakter der Stabilität besteht hiernach kurz ausgedrückt darin, *dass, falls zu irgend einer Zeit die instantane Drehaxe in unmittelbarer Nähe der kleinen Hauptaxe gelegen ist, sie sich zu keiner Zeit von dieser Hauptaxe weit zu entfernen vermag.*

Während der grossen Hauptaxe der gleiche Charakter der Stabilität zukommt, treffen wir bei der Axe des mittleren Trägheitsmomentes auf gänzlich andere Verhältnisse. Ist $D = B$, so wird $k^2 = 1$, und also degenerieren die elliptischen Functionen (cf. pg. 322) in reelle Exponentialfunctionen (hyperbolische Functionen). Im einzelnen folgern wir aus (25) im gegenwärtigen Falle:

$$\omega_1 = \varepsilon\mu \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \cdot \frac{2}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}},$$

$$\omega_2 = \mu \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}},$$

$$\omega_3 = -\varepsilon\mu \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \cdot \frac{2}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}},$$

wo λ den folgenden Wert hat:

$$\lambda = \mu \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}.$$

Die in (27) dargestellte Zeitdauer T ist ∞ geworden.

Die Polodiecurve (20) zerfällt gegenwärtig in zwei Ellipsen, welche auf dem Trägheitsellipsoid durch das Ebenenpaar der Gleichungen:

$$(31) \qquad X\sqrt{A(A-B)} \pm Z\sqrt{C(B-C)} = 0$$

ausgeschnitten werden. Beide Ellipsen überkreuzen sich in den beiden Scheitelpunkten, welche die Y-Axe auf dem Ellipsoid ausschneidet. *Befindet sich der Endpunkt der Drehungsaxe zu irgend einer Zeit auf einer der vier so entspringenden Ellipsenhälften, so wird er sich auf dieser Hälfte gegen die Y-Axe hin bewegen, der er jedoch erst für* $\lim. t = \infty$ *unendlich nahe kommt.* Man liest dies unmittelbar aus den soeben für ω_1, ω_2, ω_3 mitgeteilten Formeln ab.

Hiermit vergleiche man nun den Fall einer äusserst kleinen, aber nicht mit 0 identischen Differenz $(B - D)$. In Figur 87 sind die eben

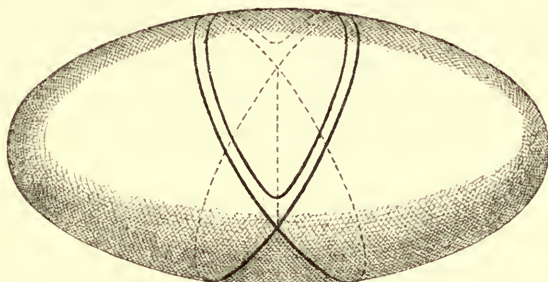


Fig. 87.

betrachtete zerfallende Polodiecurve und eine in der Nähe der letzteren verlaufende nicht-zerfallende Polodiecurve auf dem Trägheitsellipsoid gezeichnet. Wir finden: *Liegt die Drehungsaxe in irgend einem Augenblicke der Axe des mittleren Trägheitsmomentes wenn auch noch so nahe, ohne jedoch einer der Ebenen* (31) *anzugehören, so entfernt sie sich nach hinreichend langer, aber jedenfalls endlicher Zeit von der Y-Axe und kommt sogar gelegentlich senkrecht zu letzterer zu stehen.* Hierin ist der Charakter der Instabilität der Y-Axe begründet*).

*) Wegen Weiterführung der im Texte behandelten Probleme sei auf die Lehrbücher der Dynamik verwiesen. Speciell vergl. man das pg. 328 bereits genannte Werk von E. J. Routh, Bd. 2, Kap. 4, sowie vor allem das gegenwärtig im Erscheinen begriffene Werk von F. Klein und A. Sommerfeld *„Über die Theorie des Kreisels“*, Heft I und II (Leipzig, 1897 und 1898).

Sechstes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen.

Das Problem der Integration vorgelegter Differentialgleichungen zwischen zwei oder mehreren Variabelen ist seit der Entdeckung der Differentialrechnung oft wiederholt der Anlass zur Gewinnung der verschiedenartigsten und werthvollsten mathematischen Erkenntnisse geworden, und es kleiden sich in die Gestalt dieses Problems zahllose Aufgaben der theoretischen Naturbetrachtung. Aus dem dieser Sachlage entsprechend höchst ausgedehnten Gebiete der Theorie der Differentialgleichungen sollen hier einige eng umgrenzte Kapitel behandelt werden.

Wir wenden uns zuvörderst zu den *linearen Differentialgleichungen zwischen zwei Variabelen* z, Z, von denen die erste als unabhängig gelten soll, während Z als Function von z zu denken ist. Die Theorie dieser Gleichungen, deren Gestalt sogleich näher angegeben werden soll (§ 1), steht der im dritten Kapitel (pg. 75 ff.) entworfenen Lehre von den Functionen einer complexen Variabelen besonders nahe. Man kann sie neben der Theorie der elliptischen Functionen als eine der einfachsten und interessantesten Anwendungen der allgemeinen Lehre von den complexen Functionen ansehen.

Die ersten grundlegenden Sätze über die *Existenz von Integralen* linearer Differentialgleichungen unserer Art verdankt man Cauchy*). Den namentlich von ihm vertretenen Anschauungen entspricht es, die Eigenschaften dieser Integrale als *Functionen der unbegrenzten complexen Variabelen* z in Untersuchung zu ziehen. Speciell ist es das Verhalten der Integrale bei gewissen „geschlossenen Umläufen" der Variabelen z, welche das Interesse der Untersuchung fesselte. In dieser Richtung

*) Man vergl. z. B. den ersten Band von Cauchy's *„Exercices d'analyse et de physique mathématique"* (Paris, 1840) oder die von Moigno neu bearbeiteten *„Leçons sur le calcul différentiel"* Bd. II (Paris 1844); siehe auch die Nachweise betreffend den „calcul des limites" in der Einleitung zum nächsten Kapitel,

liegen die wertvollen Ansätze Riemann's*), welcher von seiner Theorie der hypergeometrischen Reihe an die linearen Differentialgleichungen herangeführt wurde**). Im Laufe der letzten Jahrzehnte sind es vor allem die ausgedehnten und tiefgehenden Untersuchungen von L. Fuchs***) und seinen Schülern gewesen, welche die Theorie der linearen Differentialgleichungen im Sinne der Gesamtlehre von den complexen Functionen aufs wesentlichste gefördert haben.

Dem Einflusse Fuchs' danken wir auch den Besitz eines ausführlichen Handbuchs der Theorie der linearen Differentialgleichungen†).

Zu den interessantesten und am meisten behandelten Beispielen gehört die *hypergeometrische Differentialgleichung* zweiter Ordnung, mit welcher die vorhin citierten Untersuchungen Riemann's in unmittelbarem Zusammenhange stehen. Indem wir diesen Gegenstand unten kurz behandeln, finden wir zugleich Gelegenheit, auf die durch Schwarz††), Klein†††) u. A. entwickelte ausgedehnte Weiterführung der in Rede stehenden Riemann'schen Ansätze hinzuweisen.

Schwierigere neuere Untersuchungen von Thomé, Poincaré, Hill u. A. über die analytische Darstellung der Integrale in der Umgebung gewisser irregulärer Stellen können wir nur ganz kurz andeuten*†). Das Interesse, welches diesen Entwicklungen anhaftet, besteht darin, dass dieselben namentlich in der Störungstheorie der Astronomie unmittelbar zur Geltung kommen und zum Teil auf Anregung der letzteren ausgebildet wurden*††).

---

*) *„Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten“* (Februar 1857), Riemann's gesammelte Werke, pg. 357.

**) *„Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ darstellbaren Functionen“*, Göttinger Abhandlungen von 1857 oder Riemann's gesammelte Werke, pg. 62.

***) Beginnend mit den beiden Abhandlungen *„Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“*, im Journ. f. Math. Bd. 66 (1866) und Bd. 68 (1868).

†) Verfasst von L. Schlesinger in zwei Bänden (Leipzig 1895—1898). Eine *„Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen“* gab L. Heffter heraus (Leipzig 1894).

††) *„Über diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt“*, Journ. f. Math. Bd. 75 (1872).

†††) Siehe die *„Vorlesungen über das Ikosaeder“* (Leipzig 1884), wo man die weitere bezügliche Litteratur mit grosser Vollständigkeit genannt findet.

*†) Siehe die zusammenfassende Darstellung bei Schlesinger, l. c. Bd. 1 pg. 272, wo auch die litterarischen Nachweise zu finden sind.

*††) Man vergl. den inhaltreichen Aufsatz von Burkhardt *„Über einige mathematische Resultate neuerer astronomischer Untersuchungen, insbesondere über irreguläre Integrale linearer Differentialgleichungen“*, Mathem. papers read at the mathem. congress, held at Chicago 1893 (New York 1896).

Es ist unerlässlich, in den Kapiteln VI und VII beim Leser die Kenntnis der Elemente der Determinantentheorie voraussetzen zu dürfen. Zur Einführung in diese Theorie benutzt man zweckmässig R. Baltzer's *„Theorie und Anwendung der Determinanten"* *) oder auch P. Gordan's *„Vorlesungen über Invariantentheorie"* **).

§ 1. Ansatz der linearen Differentialgleichungen.

Es soll $z = x + iy$ eine unabhängige complexe Variabele und $Z = X + iY$ eine Function von z bedeuten. Die Abhängigkeit des Z von z soll festgelegt sein durch die *Differentialgleichung der* n^{ten} *Ordnung:*

$$(1) \quad P_0(z)\frac{d^nZ}{dz^n} + P_1(z)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(z)\frac{dZ}{dz} + P_n(z)Z = P_{n+1}(z),$$

in welcher die gesuchte Function Z und ihre Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung *linear* enthalten sind. Die „Coefficienten" dieser linearen Differentialgleichung $P_0(z), P_1(z), \cdots, P_{n+1}(z)$ sollen *analytische Functionen* von z sein, von denen die erste $P_0(z)$ jedenfalls nicht mit 0 identisch sein darf.

Eine erste Vereinfachung besteht nun darin, dass wir das „Absolutglied" $P_{n+1}(z)$ der Gleichung (1) durch 0 ersetzen. Wir gehen dergestalt zur *linearen homogenen Differentialgleichung*:

$$(2) \quad P_0(z)\frac{d^nZ}{dz^n} + P_1(z)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(z)\frac{dZ}{dz} + P_n(z)Z = 0.$$

Kennt man nämlich das „allgemeine Integral" der Gleichung (2), deren linke Seite mit derjenigen der Gleichung (1) übereinstimmt, so kann man nach Lagrange's „Methode der Variation der Constanten" das allgemeine Integral der Gleichung (1) durch n Quadraturen gewinnen***). Die weiteren Betrachtungen knüpfen demnach ausschliesslich an die homogene Gleichung (2) an.

Da $P_0(z)$ nicht identisch verschwindet, so können wir die Gleichung (2) durch $P_0(z)$ teilen; wir können auch sogleich $P_0(z)$ mit 1 oder, was noch zweckmässiger ist, mit -1 identisch nehmen. Auf diese Weise entspringt die Gleichungsform:

---

*) 4. Aufl., Leipzig 1875.

**) Bd. 1, herausgegeben von Kerschensteiner (Leipzig 1885).

***) Cf. Lagrange *„Solution de différentes problèmes de calcul intégral"*, Abhandl. der Berlin. Akad. von 1775. Siehe auch die Darstellungen bei Schlesinger, l. c. Bd. 1 pg. 76. Übrigens findet sich der fragliche Gegenstand auch in den meisten einführenden Büchern über Integralrechnung behandelt.

(3) $$\frac{d^n Z}{dz^n} = P_1(z)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + P_2(z)\frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}(z)\frac{dZ}{dz} + P_n(z)Z,$$

welche wir je nach Umständen der Gestalt (2) vorziehen werden.

Möge z_0 eine im Endlichen gelegene Stelle sein, in deren Umgebung die n Coefficienten $P_k(z)$ der Gleichung (3) sämtlich regulär sind. Wir haben dann n ebenda convergente Entwicklungen:

(4) $$P_k(z) = p_0^{(k)} + p_1^{(k)}(z - z_0) + p_2^{(k)}(z - z_0)^2 + p_3^{(k)}(z - z_0)^3 + \cdots$$

nach ansteigenden Potenzen von $(z - z_0)$. Alle von hier durch analytische Fortsetzung erreichbaren endlichen Stellen z, für welche die sämtlichen $P_k(z)$ der Gleichung (3) regulär bleiben, setzen den *„Regularitätsbereich der Coefficienten"* unserer Differentialgleichung (3) zusammen. Nach den Theoremen von pg. 128 ff. über die Convergenzkreise der Potenzreihen werden die n Entwicklungen (4) sämtlich innerhalb eines Kreises um z_0 convergent sein, der bis an den nächsten Randpunkt des Regularitätsbereiches gerade heranreicht; ausserhalb dieses Kreises ist aber mindestens eine dieser Reihen divergent. Der gedachte Kreis heisse der zur Stelle z_0 gehörige *„Convergenzkreis der Coefficienten"* $P_k(z)$.

Der Regularitätsbereich darf sich natürlich mehrfach über sich selbst hinüberziehen; wir werden gleich auf den Fall aufmerksam machen, dass dieser Bereich eine mehrblättrige Riemann'sche Fläche darstellt. Die Randpunkte des Bereiches können sich zu geschlossenen Linien zusammensetzen, die dann überall dicht von wesentlich singulären Punkten der $P_k(z)$ besetzt sein würden. Aber wir werden im folgenden ausschliesslich mit *isoliert liegenden Randpunkten* zu thun haben*). Hierher gehören zunächst die *Stellen* ∞ *in allen Blättern* des Bereiches, sodann die *Verzweigungspunkte*, in denen diese Blätter zusammenhängen, die *Pole* der Functionen $P_k(z)$, sowie endlich etwaige *isoliert liegende wesentlich singuläre Stellen* der letzteren. Einige von diesen irregulären Stellen werden sich leicht durch Einführung geeigneter neuer unabhängiger Variabelen auf reguläre Stellen reducieren lassen.

Zu einer einfachsten Classe von Differentialgleichungen unserer Art gelangen wir, falls wir alle n Coefficienten der Gleichung (3) als *rationale Functionen* wählen. In diesem Falle wird der Regularitätsbereich von der ganzen z-Ebene, jedoch abgesehen von den Polen der

---

*) Die Benennung „Randpunkt" ist in diesem Falle natürlich so zu verstehen, dass die gesamte Umgebung des fraglichen Punktes, abgesehen von diesem selbst, dem Bereiche angehört.

Coefficienten und der Stelle ∞, gebildet. Als nächst höheren Fall wird man den einordnen, dass die Coefficienten *algebraische Functionen einer gewissen endlich-blättrigen Riemann'schen Fläche* sind. Nach den Angaben von pg. 170ff. werden sich in diesem Falle die $P_k(z)$ als rationale Functionen $R_k(w, z)$ von z und einer geeignet gewählten Function w jener Riemann'schen Fläche darstellen lassen, wobei dann w und z durch eine algebraische Relation verknüpft sind. Der Regularitätsbereich wird jetzt von der Riemann'schen Fläche geliefert, wenn wir absehen von den Polen der $P_k(z)$, den unendlich fernen Stellen der einzelnen Blätter und den Verzweigungspunkten.

Das Problem, das wir in jedem Falle an die Angabe einer homogenen Differentialgleichung unserer Art knüpfen, soll aber dies sein, dass wir die *Existenz, Mannigfaltigkeit und Eigenart aller der einzelnen Gleichung genügenden, d. i. dieselbe in z identisch befriedigenden Functionen Z* erforschen sollen.

§ 2. Existenztheorem der Integrale Z.

Wir verstehen jetzt unter z_0 einen beliebigen Punkt im Innern des Regularitätsbereichs der Coefficienten $P_k(z)$ einer vorgelegten Differentialgleichung:

$$(1)\quad \frac{d^n Z}{dz^n} = P_1(z)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + P_2(z)\frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}(z)\frac{dZ}{dz} + P_n(z)Z.$$

Giebt es alsdann überhaupt ein in der Umgebung von z_0 reguläres Integral Z der Gleichung (1), so wird sich dieses in eine daselbst convergente Potenzreihe:

$$(2)\qquad Z = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

entwickeln lassen. Trägt man diesen Ausdruck für Z in (1) ein, so muss eine in z identisch bestehende Gleichung entspringen. Wenn man also unter Benutzung der Ansätze (4) pg. 341 jede der beiden Seiten der Gleichung (1) nach Potenzen von $(z - z_0)$ anordnet, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen beider Entwicklungen übereinstimmen. Andrerseits wird auch jede in der Umgebung von z_0 convergente Entwicklung (2), für welche die eben genannte Übereinstimmung der Entwicklungscoefficienten rechts und links in (1) zutrifft, ein Integral Z unserer Differentialgleichung (1) liefern.

Bei dieser Sachlage wird sich unsere Überlegung in zwei Abschnitte gliedern. Wir fragen erstlich, wie sich die Coefficienten a_0, a_1, $a_2, \cdots$ in der allgemeinsten Weise derart bestimmen lassen, dass die Potenzreihe (2) die Differentialgleichung (1) „formal befriedigt", d. h.

dass bei Anordnung beider Seiten von (1) nach Potenzen von $(z - z_0)$ entsprechende Coefficienten übereinstimmen. Wir werden uns zweitens mit der Frage nach der Convergenz solcher formal befriedigender Reihen beschäftigen müssen; denn nur eine „convergente“ Reihe dieser Art liefert uns ein gesuchtes Integral Z.

I. Bestimmung der Coefficienten $a_0, a_1, \cdots$.

Zum Zwecke der Abkürzung setzen wir bei den folgenden Rechnungen $z - z_0 = \zeta$. In der Umgebung von z_0 haben wir alsdann folgende Reihen:

$$P_k(z) = p_0^{(k)} + p_1^{(k)}\zeta + p_2^{(k)}\zeta^2 + p_3^{(k)}\zeta^3 + \cdots,$$

$$\frac{d^l Z}{dz^l} = l!\, a_l + (l+1)!\, a_{l+1}\zeta + \frac{(l+2)!}{2!} a_{l+2}\zeta^2 + \frac{(l+3)!}{3!} a_{l+3}\zeta^3 + \cdots {}^{*)}.$$

Man entwickele daraufhin $P_k(z)\dfrac{d^{n-k}Z}{dz^{n-k}}$ durch Multiplication der beiden zugehörigen Reihen nach ansteigenden Potenzen von ζ und wird den Coefficienten von ζ^m als $(m+1)$-gliedrige Summe mit Hilfe der Binomialcoefficienten $\binom{\mu}{\nu}$ leicht darstellen. Durch Summation nach k von 1 bis n entspringt von hieraus der Coefficient von ζ^m in der Entwicklung der rechten Seite von (1).

Dieser Coefficient muss aber nach dem, was voraufgesandt wurde, gleich dem Coefficienten $\dfrac{(n+m)!}{m!} a_{n+m}$ von ζ^m in der Entwicklung von $\dfrac{d^n Z}{dz^n}$ sein. Die für Z in Ansatz gebrachte Reihe wird demnach die Differentialgleichung formal befriedigen, falls für die sämtlichen Zahlen $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ die Relation gilt:

$$(3)\quad a_{n+m} = \frac{m!}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{n}(n-k)!\left[a_{n-k}p_m^{(k)} + \binom{n-k+1}{1}a_{n-k+1}p_{m-1}^{(k)} + \binom{n-k+2}{2}a_{n-k+2}p_{m-2}^{(k)} + \cdots + \binom{n-k+m}{m}a_{n-k+m}p_0^{(k)}\right].$$

Durch diese Gleichung ist a_{n+m} linear und homogen in den voraufgehenden Coefficienten $a_0, a_1, \cdots, a_{n+m-1}$ dargestellt. Wir haben damit eine Recursionsformel gewonnen, welche uns gestattet, die Coefficienten $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$ nach und nach aus $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ zu berechnen, während diese n ersten Coefficienten unbestimmt bleiben: *In der allgemeinsten unsere Differentialgleichung formal befriedigenden Reihe*

*) In üblicher Weise setzen wir hierbei $l! = 1$, falls $l = 0$ ist.

(2) *bleiben die n ersten Coefficienten als complexe Grössen willkürlich wählbar, während alle weiteren Coefficienten in jenen vermöge der $p_i^{(k)}$ eindeutig darstellbar sind.*

Die Coefficienten der a auf der rechten Seite von (3) sind ganze rationale Verbindungen der $p_i^{(k)}$ mit lauter *positiven* rationalen Brüchen als Coefficienten. Man kann nun rechts für den höchsten Coefficienten a_{n+m-1} seinen Ausdruck in $a_0, \cdots, a_{n+m-2}$ eintragen, sodann a_{n+m-2} überall durch $a_0, \cdots, a_{n+m-3}$ ausdrücken und in gleicher Weise fortfahren, bis rechts nur noch $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$ auftreten. Wir kommen solchergestalt zu einer Formel:

$$(4) \qquad a_{n+m} = a_0 G_0^{(m)}(p) + a_1 G_1^{(m)}(p) + \cdots + a_{n-1} G_{n-1}^{(m)}(p),$$

deren rechte Seite linear und homogen in $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ aufgebaut ist. Von besonderer Wichtigkeit aber ist das Bildungsgesetz der Coefficienten $G_k^{(m)}(p)$. *Nach den soeben vorausgeschickten Bemerkungen werden die $G(p)$ ganze rationale Functionen $(m+1)^{ten}$ Grades der $(m+1)n$ Anfangscoefficienten $p_0^{(k)}, p_1^{(k)}, \cdots, p_m^{(k)}$ darstellen; und es wird die einzelne dieser Functionen ausschliesslich positive Glieder aufweisen mit numerischen, d. i. von den besonderen Werten der p unabhängigen, positiven Coefficienten.*

II. Convergenzbeweis.

Setzt man eine unter den n Grössen $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, etwa a_i, gleich 1, die übrigen gleich 0, so entspringt die Reihe:

$$(5) \qquad \zeta^i + G_i^{(0)}\zeta^n + G_i^{(1)}\zeta^{n+1} + G_i^{(2)}\zeta^{n+2} + \cdots.$$

Nehmen wir hier nach einander $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, so gewinnen wir n „particuläre Reihen“, aus denen umgekehrt die allgemeinste Reihe unserer Art durch lineare Combination wieder erhalten werden kann. Hiernach ist ersichtlich, dass jede dieser Reihen convergent sein wird, falls die n particulären Reihen (5) convergieren.

Man wähle nun z im Innern des zur Stelle z_0 gehörenden Convergenzkreises der $P_k(z)$, welcher den Radius R habe. Man kann alsdann eine positive Zahl r in Übereinstimmung mit:

$$|\zeta| = |z - z_0| < r < R$$

bestimmen. Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius r um z_0 sind alle n Functionen $P_k(z)$ endlich. Man kann hiernach eine bestimmte endliche Zahl M fixieren, so dass die absoluten Beträge $|P_k|$ unserer n Functionen auf jener Peripherie überall $< M$ sind:

$$(6) \qquad |P_k(z)| < M \quad \text{für} \quad |z - z_0| = r, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Ausserdem soll:

(7) $$M > \frac{n}{r}$$

gelten, was nötigenfalls durch eine weitere Vergrösserung von M erreichbar ist. Aus (6) folgt für die Entwicklungscoefficienten $p_l^{(k)}$ nach dem Cauchy'schen Satze (pg. 119) durch eine pg. 127 ausgeführten Rechnung:

(8) $$|p_l^{(k)}| < \frac{M}{r^l}.$$

Nach dem oben erkannten Bildungsgesetze der $G_i^{(0)}, G_i^{(1)}, \cdots$ wird der absolute Betrag der einzelnen dieser Grössen nicht verkleinert, falls wir die $p_l^{(k)}$ durch ihre absoluten Beträge ersetzen; und es findet eine Vergrösserung der absoluten Beträge der G statt, falls demnächst $|p_l^{(k)}|$ durch $\frac{M}{r^l}$ ersetzt wird.

Dieser soeben bezeichnete Ersatz aller Coefficienten p läuft nun einfach darauf hinaus, dass wir an Stelle der n Functionen $P_k(z)$ eine und dieselbe Function $M\left(1 - \frac{\zeta}{r}\right)^{-1}$ treten lassen.

Das gewonnene Ergebnis können wir demnach dahin fassen, *dass die Reihen* (5) *für den in Rede stehenden Wert z sicher convergent sind, falls ebenda die n particulären Reihen der besonderen Differentialgleichung:*

$$\left(1 - \frac{\zeta}{r}\right)\frac{d^n Z}{dz^n} = M\left(\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + \frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}} + \cdots + \frac{dZ}{dz} + Z\right)$$

convergieren.

Möge nun eine einzelne dieser Reihen die Coefficienten $b_0, b_1, b_2, \cdots$ haben, wobei also unter den n ersten Coefficienten nur einer von 0 verschieden und gleich 1 ist. Alsdann folgt aus (3):

$$(m+n)!\, b_{n+m} = m!\, M \sum_{k=1}^{n} (n-k)! \left[\frac{b_{n-k}}{r^m} + \binom{n-k+1}{1}\frac{b_{n-k+1}}{r^{m-1}} + \binom{n-k+2}{2}\frac{b_{n-k+2}}{r^{m-2}} + \cdots + \binom{n-k+m}{m} b_{n-k+m}\right].$$

Man setze die entsprechende Relation für b_{n+m-1} an und gewinnt durch Combination beider ohne Mühe:

(9) $$(m+n)!\, r b_{n+m} - (n+m-1)!\, m b_{n+m-1} = Mr \sum_{k=1}^{n} (n+m-k)!\, b_{n+m-k}.$$

Für $m = 0$ ergiebt sich insbesondere:

$$n!\, b_n = M \sum_{k=1}^{n} (n-k)!\, b_{n-k},$$

wo die rechts stehende Summe nur ein einziges von 0 verschiedenes und zwar positives Glied enthält; es ist somit b_n reell und > 0. Die Gleichung (9) kann man nunmehr auch so schreiben:

$$(10) \qquad b_{n+m} = \frac{m + Mr}{m+n} \cdot \frac{b_{n+m-1}}{r} + M \sum_{k=2}^{n} \frac{(n+m-k)!}{(m+n)!} b_{n+m-k}.$$

Da unter den Zahlen $b_0, b_1, \cdots, b_n$ keine negative und zwei von 0 verschiedene sind, so ergiebt sich aus (10) durch den Schluss der vollständigen Induction, dass sämtliche Coefficienten $b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots$ reell und > 0 sind. Dieserhalb aber liefert die Gleichung (10) mit Rücksicht auf (7) die weitere Ungleichung $b_{n+m}\, r > b_{n+m-1}$. Da dieselbe für alle Zahlen $m = 1, 2, 3, \cdots$ gelten wird, so schliessen wir auf:

$$b_{n+m} > \frac{b_{n+m-1}}{r} > \frac{b_{n+m-2}}{r^2} > \cdots > \frac{b_{n+m-\nu}}{r^\nu}.$$

$$(11) \qquad r^\nu > \frac{b_{n+m-\nu}}{b_{n+m}} \quad \text{für} \quad \nu \leqq m.$$

Unter der Voraussetzung $m \geqq n$ ist $b_{n+m-1} > 0$. Dividiert man somit Gleichung (10) durch b_{n+m-1}, so folgt:

$$\frac{b_{n+m}}{b_{n+m-1}} < \frac{m+Mr}{m+n} \cdot \frac{1}{r} + M \frac{1}{(m+n)(m+n-1)} \left[\frac{b_{n+m-2}}{b_{n+m-1}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(m+n-2)} \frac{b_{n+m-3}}{b_{n+m-1}} + \cdots + \frac{1}{(m+n-2)\cdots(m+1)} \frac{b_m}{b_{n+m-1}} \right]$$

und also mit Rücksicht auf (11):

$$\frac{b_{n+m}}{b_{n+m-1}} < \frac{m+Mr}{m+n} \cdot \frac{1}{r}$$
$$+ M \left[\frac{r}{(m+n)(m+n-1)} + \cdots + \frac{r^{n-1}}{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)} \right].$$

Für $\lim. m = \infty$ ist die Grenze der rechten Seite $\frac{1}{r}$:

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{b_m r^m}{b_{m-1} r^{m-1}} \right) < 1;$$

die vorgelegte Reihe ist sonach für den ausgewählten Wert z mit $|z - z_0| < r$ absolut convergent, und damit ist auch die Convergenz unserer n particulären Reihen (5) an der gleichen Stelle bewiesen.

Nach den Sätzen über Darstellung analytischer Functionen durch convergente Potenzreihen ist aber damit folgendes grundlegende Theorem gewonnen: *Die Differentialgleichung* (1) *besitzt in der Umgebung jeder Stelle* z_0 *innerhalb des Regularitätsbereiches der* $P_k(z)$ n *ebenda reguläre particuläre Integrale, dargestellt durch* n *Potenzreihen, die convergent sind innerhalb eines um* z_0 *zu legenden und an den nächsten Randpunkt des Regularitätsbereiches gerade heranreichenden Kreises. Jede lineare homogene Combination dieser* n *Integrale mit beliebigen constanten Coefficienten ist wieder ein Integral von* (1), *und in dieser Gestalt ist jedes in der Umgebung von* z_0 *existierende und ebenda reguläre Integral unserer Differentialgleichung darstellbar.*

§ 3. Begriff des Fundamentalsystems.

Man verstehe wie soeben unter z_0 irgend eine Stelle im Innern des Regularitätsbereiches der $P_k(z)$ und nenne die n particulären Integrale, welche durch die Reihen (5) pg. 344 für die Umgebung von z_0 geliefert werden, kurz $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, so dass die Darstellungen gelten:

$$(1)\quad Z_k = (z - z_0)^{k-1} + G_{k-1}^{(0)}(z - z_0)^n + G_{k-1}^{(1)}(z - z_0)^{n+1} + G_{k-1}^{(2)}(z - z_0)^{n+2} + \cdots.$$

In der Umgebung von z_0 ist alsdann das „allgemeine Integral“ unserer Differentialgleichung nach dem eben bewiesenen Theoreme dargestellt durch:

$$(2)\quad Z = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \cdots + c_n Z_n,$$

wo $c_1, c_2, \cdots, c_n$ willkürliche Constante sind. Insofern es möglich ist, *jedes* in der Umgebung von z_0 reguläre Integral der Differentialgleichung in der Gestalt (2) linear-homogen durch die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ darzustellen, wollen wir sagen: *Die* $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ *bilden ein „Fundamentalsystem“ von Integralen für die Stelle* z_0*). Wir bezeichnen dieses Fundamentalsystem symbolisch kurz durch $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$.

Es giebt nun für ein und dieselbe Stelle z_0 unendlich viele derartige Fundamentalsysteme. Ist $(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n')$ irgend ein zweites, so können wir erstlich jedes Z_k' linear-homogen in $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ darstellen, d. h. wir haben n Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} Z_1' = c_{11} Z_1 + c_{12} Z_2 + \cdots + c_{1n} Z_n, \\ Z_2' = c_{21} Z_1 + c_{22} Z_2 + \cdots + c_{2n} Z_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot, \\ Z_n' = c_{n1} Z_1 + c_{n2} Z_2 + \cdots + c_{nn} Z_n. \end{cases}$$

*) Vergl. die pg. 339 genannte Abhandlung von L. Fuchs im Journ. f. Math., Bd. 66.

Da aber umgekehrt auch jedes Z_k im System $(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n')$ darstellbar ist, so muss die Determinante des Gleichungssystems (3) von 0 verschieden sein: $\sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn} \neq 0$. Ist umgekehrt letztere Bedingung erfüllt, so lässt sich das einzelne Z_k und damit jedes Integral in der Umgebung von z_0 in den $Z_1', Z_2', \cdots, Z_n'$ darstellen, d. h. also $(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n')$ ist ein Fundamentalsystem. *Es giebt für die Stelle z_0 hiernach unendlich viele Fundamentalsysteme; ein beliebiges unter ihnen $(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n')$ gewinnt man aus einem speciellen $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ vermöge der Gleichungen* (3), *wenn man in letzteren die Coefficienten c_{ik} als beliebige complexe Constante nicht-verschwindender Determinante auswählt.* Das durch die Gleichungen (1) gelieferte besondere System möge das *„canonische Fundamentalsystem“* der Stelle z_0 heissen.

Als *„Determinante $\Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ eines Fundamentalsystems $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$“* bezeichnet man die folgende Determinante mit n^2 Elementen:

$$(4)\qquad \Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} Z_1}{dz^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} Z_1}{dz^{n-2}}, & \cdots, & Z_1 \\ \frac{d^{n-1} Z_2}{dz^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} Z_2}{dz^{n-2}}, & \cdots, & Z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-1} Z_n}{dz^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} Z_n}{dz^{n-2}}, & \cdots, & Z_n \end{vmatrix}.$$

Für jedes specielle Fundamentalsystem stellt die Determinante eine innerhalb des um z_0 zu legenden Convergenzkreises der $P_k(z)$ reguläre und deshalb auch stetige analytische Function von z dar. Die Determinante des canonischen Systems $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ nimmt, wie man aus (1) leicht ausrechnet, für $z = z_0$ den Wert an:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, 2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \cdot 4^{n-4} \cdots (n-2)^2 (n-1).$$

Gehen wir vom canonischen System vermöge der Formeln (3) zu einem beliebigen Fundamentalsystem der Stelle z_0, so berechnet man als Wert der Determinante des letzteren für $z = z_0$:

$$(5)\qquad 2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \cdots (n-2)^2 (n-1) \cdot \sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn}.$$

Da dieser Wert von 0 verschieden ist, so entspringt das Theorem: *Die Determinante jedes zur Stelle z_0 gehörenden Fundamentalsystems stellt ebenda eine reguläre Function dar, welche für z_0 und deshalb wegen der Stetigkeit auch in der nächsten Umgebung von z_0 nicht verschwindet.*

Definiert man nach (4) die Determinante eines beliebigen Systems von n Integralen, *so ist auch umgekehrt das Nichtverschwinden dieser Deter-*

minante für $z = z_0$ ein ausreichendes Kennzeichen dafür, dass jene n Integrale ein Fundamentalsystem bilden. Wenn man nämlich die fraglichen n Integrale im canonischen Fundamentalsystem darstellt, so werden die n^2 hierbei zur Geltung kommenden Coefficienten in der That eine nicht-verschwindende Determinante besitzen müssen; denn nur unter dieser Bedingung würde die eben durchgeführte Rechnung thatsächlich einen von null verschiedenen Wert für die Determinante des vorgelegten Integralsystems bei z_0 liefern.

Sind zunächst wieder $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ die Integrale des canonischen Systems, so kann die Gleichung:

$$(6) \qquad C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + C_3 Z_3 + \cdots + C_n Z_n = 0$$

mit constanten Coefficienten $C_1, C_2, \cdots, C_n$ nur dann in z identisch bestehen, wenn die sämtlichen C verschwinden. Wäre nämlich wenigstens ein Coefficient C von 0 verschieden, so würde die linke Seite der Gleichung (6) in der Umgebung von z_0 durch eine convergente Reihe darstellbar sein, von deren n ersten Gliedern wenigstens eines nicht ausfällt, d. h. nicht-verschwindenden Coefficienten hat; die Reihe kann also nicht eine mit 0 identische Function darstellen. Insofern hiernach zwischen den $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ keine Relation (6) mit nicht durchgängig verschwindenden Coefficienten besteht, sollen die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ als von einander „*linear-unabhängig*" bezeichnet werden.

Wir können jetzt sogleich allgemein das folgende Theorem zeigen: *Die Integrale irgend eines Fundamentalsystems stellen immer n linear-unabhängige Functionen dar.* Ist nämlich $(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n')$ irgend ein neues Fundamentalsystem und bedeutet $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ das canonische Fundamentalsystem, so gilt zufolge (3) identisch:

$$(7) \qquad C_1' Z_1' + C_2' Z_2' + \cdots + C_n' Z_n' = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + \cdots + C_n Z_n,$$

falls die $2n$ Constanten C verbunden sind durch:

$$\begin{aligned} C_1 &= c_{11} C_1' + c_{21} C_2' + \cdots + c_{n1} C_n', \\ C_2 &= c_{12} C_1' + c_{22} C_2' + \cdots + c_{n2} C_n', \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_n &= c_{1n} C_1' + c_{2n} C_2' + \cdots + c_{nn} C_n'. \end{aligned}$$

Soll nun die linke Seite der Gleichung (7) mit 0 identisch sein, so verschwinden alle Coefficienten C_k. Die Auflösung des letzten Gleichungssystems ergiebt demnach wegen $\sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn} \neq 0$ das Verschwinden sämtlicher C_k'.

Auch der umgekehrte Satz ist gültig: *Hat man irgend ein System von n linear-unabhängigen Integralen $Z_1', Z_2', \cdots, Z_n'$ für die Umgebung von z_0 gefunden, so bilden diese ein Fundamentalsystem.* Stellen wir

nämlich die Z_k' etwa im canonischen System in der Gestalt der Formeln (3) dar, so ist die zugehörige Determinante $\sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn} \neq 0$. Wäre nämlich diese Determinante gleich 0, so liessen sich nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie n nicht durchgängig verschwindende Grössen $C_1, C_2, \cdots, C_n$ finden, so dass:

$$c_{1k} C_1 + c_{2k} C_2 + \cdots + c_{nk} C_n = 0$$

für alle $k = 1, 2, \cdots, n$ gelten würde. Dann aber wären die Z_1', $Z_2', \cdots, Z_n'$ linear abhängig, insofern die Gleichung:

$$C_1 Z_1' + C_2 Z_2' + \cdots + C_n Z_n' = 0$$

identisch bestehen würde.

Als Folgerung aus den bisherigen Ergebnissen merken wir noch an: *Zwischen je* $(n+1)$ *Integralen* $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n+1}$ *besteht immer identisch eine Relation:*

$$(8) \qquad C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + \cdots + C_{n+1} Z_{n+1} = 0,$$

deren Coefficienten nicht sämtlich verschwinden. Wenn nämlich eine solche Relation zwischen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ noch nicht besteht, so bilden diese Integrale ein Fundamentalsystem. Dann aber lässt sich Z_{n+1} linear-homogen in $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ darstellen, womit die Existenz einer Relation (8) festgestellt ist.

§ 4. Darstellung der $P_k(z)$ durch die Integrale. Analytische Fortsetzung.

Wir verstehen wie bisher unter z_0 eine Stelle innerhalb des Regularitätsbereichs der $P_k(z)$ und unter $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ ein für die Umgebung von z_0 berechnetes Fundamentalsystem. Dann gelten ebenda die n Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{d^n Z_k}{dz^n} = P_1(z) \frac{d^{n-1} Z_k}{dz^{n-1}} + P_2(z) \frac{d^{n-2} Z_k}{dz^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}(z) \frac{d Z_k}{dz} + P_n(z) Z_k$$

für $k = 1, 2, \cdots, n$ in z identisch. Fassen wir diese Gleichungen als solche für die n linear vorkommenden Unbekannten $P_1(z), P_2(z), \cdots, P_n(z)$ auf, so berechnen sich dieselben eindeutig aus den Z_k und deren Ableitungen; denn die Determinante $\Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ des Gleichungssystems (1) ist in der Umgebung von z_0 von 0 verschieden. Verstehen wir unter $\Delta_k(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ diejenige Determinante, welche aus der in (4) § 3 explicit gegebenen Determinante Δ hervorgeht, falls man die Elemente der k^{ten} Verticalreihe durch $\frac{d^n Z_1}{dz^n}, \frac{d^n Z_2}{dz^n}, \cdots$ ersetzt, so ent-

springt als *eine in der Umgebung von z_0 gültige Darstellung der $P_k(z)$ in den Integralen des Fundamentalsystems* $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$:

$$(2) \qquad P_k(z) = \frac{\Delta_k(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)}{\Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)}.$$

Hieran schliesst sich die folgende Betrachtung. Ist in der Umgebung von z_0 ein beliebiges Integral Z vorgelegt, so gilt eine Darstellung desselben durch das Fundamentalsystem $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$:

$$Z = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + \cdots + C_n Z_n$$

identisch in z. Durch Differentiation stellen wir die $(n+1)$ identischen Gleichungen:

$$\frac{d^k Z}{dz^k} = C_1 \frac{d^k Z_1}{dz^k} + C_2 \frac{d^k Z_2}{dz^k} + \cdots + C_n \frac{d^k Z_n}{dz^k}$$

für $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ her. Durch Elimination der C folgt:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d^n Z}{dz^n}, & \frac{d^{n-1} Z}{dz^{n-1}}, & \cdots, & \frac{dZ}{dz}, & Z \\ \frac{d^n Z_1}{dz^n}, & \frac{d^{n-1} Z_1}{dz^{n-1}}, & \cdots, & \frac{dZ_1}{dz}, & Z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^n Z_n}{dz^n}, & \frac{d^{n-1} Z_n}{dz^{n-1}}, & \cdots, & \frac{dZ_n}{dz}, & Z_n \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die hier links stehende Determinante nach den Elementen der ersten Horizontalreihe, so entspringt (cf. *Formel* (2)) *unsere Differentialgleichung wieder.* Von hieraus ist direct ersichtlich, dass letztere durch jede lineare homogene Combination der $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ befriedigt wird.

Da wir von einem beliebigen Fundamentalsystem $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ ausgingen, *so bleiben die in* (2) *rechts stehenden Quotienten der Determinanten $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ unverändert, falls man die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ durch die Integrale irgend eines anderen Fundamentalsystems $(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n')$ ersetzt,* welche mit den Z_k vermöge der Gleichungen (3) pg. 347 zusammenhängen mögen. Die einzelne Determinante Δ_k bleibt bei diesem Ersatz nicht unverändert; man folgert vielmehr aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten leicht, *dass Δ_k beim Übergang zu den $Z_1', \cdots, Z_n'$ die Determinante der c_{ik} als Factor annimmt:*

$$(4) \qquad \Delta_k(Z_1', \cdots, Z_n') = \Delta_k(Z_1, \cdots, Z_n) \cdot \sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{nn}.$$

Hiermit im Zusammenhang steht noch folgende wichtige Überlegung. Aus der Differentiationsregel der Determinanten folgt, dass

die nach z genommene Ableitung von Δ nichts anderes als die Determinante Δ_1 darstellt. Mit Benutzung von (2) folgt hieraus:

$$\frac{d\Delta}{dz} = \Delta_1 = \Delta P_1, \qquad \frac{d \log \Delta}{dz} = P_1(z).$$

Durch Integration gewinnen wir folgende Darstellung von Δ:

$$\Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) = C \cdot e^{\int P_1(z)\, dz}, \tag{5}$$

wo C eine Constante ist. —

Wir sind jetzt im Stande, mit Hilfe des *Princips der analytischen Fortsetzung* eine weit allgemeinere Auffassung unserer bisherigen Ergebnisse zu gewinnen. Die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ sind bisher nur erst innerhalb des um z_0 zu legenden Convergenzkreises der $P_k(z)$ definiert. Da sie für jeden Punkt z_1 innerhalb dieses Kreises Integrale der Differentialgleichung darstellen, so werden sie sich nach dem Grundtheorem von pg. 347 nach Potenzen von $(z - z_1)$ in Reihen entwickeln lassen, die jedenfalls innerhalb des zu z_1 gehörigen Convergenzkreises der $P_k(z)$ convergent sind. Zugleich befriedigen sie innerhalb dieses Kreises überall die Differentialgleichung. Durch Fortsetzung der Überlegung entspringt das Theorem: *Die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ gestatten innerhalb des Regularitätsbereiches der $P_k(z)$ unbeschränkte analytische Fortsetzung, zeigen daselbst überall reguläres Verhalten und befriedigen beständig die Differentialgleichung.*

Hieraus folgt, dass auch $\Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ im ganzen Regularitätsbereich der $P_k(z)$ eine reguläre Function darstellt; und da dieselbe in der Umgebung von z_0 mit der auf der rechten Seite der Gleichung (5) stehenden Function identisch ist, so gilt diese „Identität" (5) im ganzen Regularitätsbereich. Damit aber erkennen wir, dass Δ innerhalb dieses Bereiches überall von 0 verschieden ist; die pg. 349 ausgesprochenen Sätze ergeben also das Resultat: *Die Integrale $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ bewahren bei beliebiger Fortsetzung innerhalb des Regularitätsbereiches der $P_k(z)$ ihre Eigenschaft, ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung darzustellen.*

Merken wir endlich noch an, *dass offenbar auch die Gleichungen* (2) *bei allen innerhalb des Regularitätsbereiches der $P_k(z)$ zu vollziehenden analytischen Fortsetzungen erhalten bleiben werden.* —

Von den Randstellen des oft genannten Regularitätsbereiches bieten zunächst *die Punkte* ∞ und *die endlichblättrigen Verzweigungspunkte* keine besondere Schwierigkeit.

Ist die Differentialgleichung in der Umgebung einer Stelle $z = \infty$ zu untersuchen, so führen wir an Stelle von z nach einer schon häufig

befolgten Methode die unabhängige Variabele $z' = \frac{1}{z}$ ein. Wir schreiben:

$$Z(z) = Z\left(\frac{1}{z'}\right) = Z'(z')$$

und finden durch Differentiation:

$$Z = Z', \quad \frac{dZ}{dz} = -z'^2 \frac{dZ'}{dz'},$$
$$\frac{d^2Z}{dz^2} = z'^4 \frac{d^2Z'}{dz'^2} + 2z'^3 \frac{dZ'}{dz'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Differentialgleichung transformiert sich hierbei auf die Gestalt:

$$(6)\quad \frac{d^nZ'}{dz'^n} = P_1'(z')\frac{d^{n-1}Z'}{dz'^{n-1}} + P_2'(z')\frac{d^{n-2}Z'}{dz'^{n-2}} + \cdots + P_n'(z')Z';$$

wir haben also *wiederum eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung,* welche letztere in der Umgebung des Punktes $z' = 0$ zu untersuchen sein würde.

Besitzt andererseits der Regularitätsbereich bei z_0 einen Verzweigungspunkt mit einer endlichen Anzahl von ν zusammenhängenden Blättern, so schreiben wir (cf. pg. 139):

$$\sqrt[\nu]{z - z_0} = z', \qquad z = z_0 + z'^\nu$$

und bilden solcherweise die ν-fach gewundene Umgebung dieses Punktes z_0 auf die *einfach* bedeckte Umgebung des Nullpunktes der z'-Ebene ab. Dabei setzen wir:

$$Z(z) = Z(z_0 + z'^\nu) = Z'(z')$$

und finden durch Differentiation ohne Mühe:

$$Z = Z', \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{\nu z'^{\nu-1}} \cdot \frac{dZ'}{dz'},$$
$$\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{\nu^2 z'^{2\nu-2}} \frac{d^2Z'}{dz'^2} - \frac{\nu-1}{\nu z'^{\nu-2}} \frac{dZ'}{dz'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man erkennt, *dass die transformierte Differentialgleichung auch jetzt wieder eine lineare homogene sein wird.* Die der Discussion zu unterwerfende Stelle hat aber ihren Charakter als Verzweigungspunkt verloren.

Wir besprechen demnächst die *Pole* der $P_k(z)$. Hierbei gilt folgendes Theorem: *In solchen isoliert liegenden Randpunkten des Regu-*

laritätsbereiches der $P_k(z)$, in welchen diese Functionen teilweise oder sämtlich Pole besitzen, können die Integrale sowohl sämtlich regulär sein oder teilweise, ja durchgängig irreguläres Verhalten darbieten. Was hier im Einzelfalle zutrifft, muss durch besondere Untersuchung festgestellt werden. Doch lässt sich allgemein noch unmittelbar aussagen, *dass im Falle des regulären Verhaltens sämtlicher Integrale die Determinante des einzelnen Fundamentalsystems an der fraglichen Stelle verschwinden muss.*

Wesentlich singuläre Stellen der $P_k(z)$, zu denen wir auch die Verzweigungspunkte mit unendlicher Blätterzahl zu rechnen haben (cf. pg. 140), *können niemals reguläre Stellen sämtlicher Integrale sein.* Die Gleichungen (2) lehren nämlich, dass an einer Stelle, in deren Umgebung sich sämtliche Integrale regulär verhalten, die $P_k(z)$ sich entweder selbst regulär verhalten oder doch nur polar unstetig sein können.

Indem wir zusammenfassen und in sofort verständlichem Sinne von einem *„Regularitätsbereiche der Integrale"* sprechen, können wir dem Satze Ausdruck verleihen: *Der Regularitätsbereich der Integrale unserer Differentialgleichung ist im wesentlichen mit demjenigen der Coefficienten $P_k(z)$ identisch, insofern er nur um einzelne isoliert liegende Punkte reicher sein kann, in denen einige oder alle $P_k(z)$ polar unstetig sind.*

§ 5. Geschlossene Umläufe und Fundamentalgleichungen.

Von irgend einer Stelle z im Innern des Regularitätsbereiches soll ein innerhalb dieses Bereiches geschlossener Umlauf beschrieben werden, der natürlich, sofern der Bereich mehrblättrig ist, an der Stelle z des Ausgangsblattes endigen muss. Über diese geschlossene Curve, die wir C nennen, mögen die Integrale irgend eines Fundamentalsystems $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ analytisch fortgesetzt werden. Die einzelne Function Z_k möge am Schlusse des Umlaufs in Z_k' übergegangen sein, wo alsdann Z_k' entweder mit Z_k identisch ist oder einen neuen Zweig dieser Function darstellt. Nach einem Satze des vorigen Paragraphen werden die n Functionen $Z_1', Z_2', Z_3', \cdots, Z_n'$ wieder ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung liefern. Indem wir dieses System nach pg. 347 in $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ darstellen, gelangen wir zu dem höchst wichtigen und folgenreichen Satze: *Die Integrale $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ irgend eines Fundamentalsystems gehen bei analytischer Fortsetzung längs einer innerhalb des Regularitätsbereiches geschlossenen Curve C in Zweige $Z_1', Z_2', \cdots, Z_n'$ über, welche mit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ vermöge einer linearen homogenen Substitution:*

$$(1)\quad \begin{cases} Z_1' = \alpha_{11} Z_1 + \alpha_{12} Z_2 + \cdots + \alpha_{1n} Z_n, \\ Z_2' = \alpha_{21} Z_1 + \alpha_{22} Z_2 + \cdots + \alpha_{2n} Z_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_n' = \alpha_{n1} Z_1 + \alpha_{n2} Z_2 + \cdots + \alpha_{nn} Z_n \end{cases}$$

mit constanten Coefficienten α_{ik} *einer nicht-verschwindenden Determinante:*

$$(2)\qquad \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} \neq 0$$

zusammenhängen.

Kann man die Curve C auf einen regulären Punkt zusammenziehen, ohne sie über andere irreguläre Punkte der $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ als Pole hinwegzuschieben, so wird $Z_1' = Z_1, \cdots, Z_n' = Z_n$ sein. In diesem Falle sind die Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{nn}$ alle $= 1$, die übrigen $= 0$; man sagt alsdann, es liege in (1) die „*identische Substitution*“ vor.

Über die Determinanten der Substitutionen (1) merken wir den Satz an: *Ist die Function* $P_1(z)$ *mit* 0 *identisch, so ist für jede geschlossene Curve* C *die Determinante* (2) *gleich* 1. In diesem Falle ist nämlich zufolge (5) pg. 352 die Determinante Δ des Systems $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ mit einer Constanten identisch, so dass man hat:

$$\Delta(Z_1', Z_2', \cdots, Z_n') = \Delta(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n),$$

da die Constante bei der analytischen Fortsetzung ihren Wert bewahrt. Für die Substitution (1) folgt aber aus der letzten Gleichung mit Rücksicht auf (4) pg. 351 in der That:

$$(3)\qquad \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} = 1.$$

Dieses Ergebnis ist um so bemerkenswerter, als wir jede Differentialgleichung (1) pg. 350 durch Einführung von:

$$(4)\qquad Z' = Z \cdot e^{-\frac{1}{n}\int P_1(z)\,dz}$$

an Stelle von Z in eine Gestalt überführen können, in welcher das Glied mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von Z' ausfällt. —

Das in den Formeln (1) und (2) zum Ausdruck kommende Theorem findet eine erste wichtige Verwendung bei Beantwortung der Frage nach der Existenz solcher *Integrale, welche bei Fortsetzung über die geschlossene Curve* C *in sich selbst, multipliciert mit einem constanten Factor* μ, *übergehen.* Es möge Z ein derartiges Integral sein, welches bei der fraglichen Fortsetzung übergeht in $Z' = \mu Z$. Diese Formel nimmt, wenn man Z nach (2) pg. 347 im Fundamentalsystem $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ darstellt, die Gestalt an:

$$c_1 Z_1' + c_2 Z_2' + \cdots + c_n Z_n' = \mu c_1 Z_1 + \mu c_2 Z_2 + \cdots + \mu c_n Z_n.$$

Hier trage man für die Z_k' ihre Ausdrücke (1) ein und findet so:

$$\begin{aligned} &[c_1(\alpha_{11} - \mu) + c_2\alpha_{21} + \cdots + c_n\alpha_{n1}] Z_1 \\ + &[c_1\alpha_{12} + c_2(\alpha_{22} - \mu) + \cdots + c_n\alpha_{n2}] Z_2 \\ + &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + &[c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \cdots + c_n(\alpha_{nn} - \mu)] Z_n = 0. \end{aligned}$$

Da aber die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ linear unabhängig sind, so entspringen die n Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} c_1(\alpha_{11} - \mu) + c_2\alpha_{21} + c_3\alpha_{31} + \cdots + c_n\alpha_{n1} = 0, \\ c_1\alpha_{12} + c_2(\alpha_{22} - \mu) + c_3\alpha_{32} + \cdots + c_n\alpha_{n2} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + c_3\alpha_{3n} + \cdots + c_n(\alpha_{nn} - \mu) = 0. \end{cases}$$

Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass dieselben durch ein System nicht durchgängig verschwindender Grössen $c_1, \cdots, c_n$ befriedigt werden können, ist das Verschwinden ihrer Determinante:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \mu, & \alpha_{21}, & \alpha_{31}, \cdots, & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22} - \mu, & \alpha_{32}, \cdots, & \alpha_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{1n}, & \alpha_{2n}, & \alpha_{3n}, \cdots, & \alpha_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus entspringt durch Entwicklung eine Gleichung n^{ten} Grades für μ:

$$(7) \qquad \mu^n + A_1\mu^{n-1} + A_2\mu^{n-2} + \cdots + A_n = 0,$$

welche nach Fuchs als *die zum geschlossenen Wege C gehörende „Fundamentalgleichung“* bezeichnet wird. Für das Absolutglied dieser Gleichung gilt:

$$A_n = (-1)^n \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \cdots \alpha_{nn},$$

dasselbe ist also stets von 0 verschieden. Nennen wir die hier in Frage kommenden μ kurz „die zum geschlossenen Wege C gehörenden Multiplicatoren“, und berücksichtigen wir andererseits, dass für jedes die Gleichung (6) befriedigende μ ein System nicht durchgängig verschwindender c aus (5) berechnet werden kann, welches in:

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \cdots + c_n Z_n$$

ein zum Multiplicator μ gehöriges Integral liefert, so haben wir den wichtigen Satz gewonnen: *Für jeden innerhalb des Regularitätsbereiches*

*geschlossenen Umlauf giebt es sicher von 0 verschiedene Multiplicatoren μ; und für jeden Multiplicator existiert wenigstens ein zugehöriges Integral**).

Zum Zwecke der weiteren Verwertung der Fundamentalgleichung müssen wir jetzt zunächst eine wichtige Zwischenentwicklung einschalten.

§ 6. Reduction der Differentialgleichung bei Kenntnis eines Integrals.

Es möge ein einzelnes particuläres Integral Z_1 unserer Differentialgleichung bekannt sein, das wir etwa als erstes Integral eines Fundamentalsystems $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ gewählt denken. Man setze sodann, unter Z irgend ein Integral der Differentialgleichung verstanden:

$$(1) \qquad \overline{Z} = \frac{d}{dz}\left(\frac{Z}{Z_1}\right), \qquad Z = Z_1 \int \overline{Z}\, dz.$$

Die so definierte Function $\overline{Z}$ genügt einer linearen homogenen Diffential-gleichung $(n-1)^{ter}$ Ordnung, deren Coefficienten sich rational aus den $P_k(z)$, Z_1 und den Ableitungen von Z_1 aufbauen.

In der That folgern wir aus (1) durch wiederholte Differentiation:

$$Z = Z_1 \int \overline{Z}\, dz,$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ_1}{dz} \int \overline{Z}\, dz + Z_1 \overline{Z},$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{d^2Z_1}{dz^2} \int \overline{Z}\, dz + 2\frac{dZ_1}{dz}\overline{Z} + Z_1 \frac{d\overline{Z}}{dz},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^nZ}{dz^n} = \frac{d^nZ_1}{dz^n} \int \overline{Z}\, dz + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}Z_1}{dz^{n-1}}\overline{Z} + \cdots + Z_1 \frac{d^{n-1}\overline{Z}}{dz^{n-1}}.$$

Multipliciert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $P_n(z)$, $P_{n-1}(z)$, $P_{n-2}(z), \cdots, -1$ und addiert, so verschwindet die linke Seite der entspringenden Gleichung und rechter Hand heben sich die mit $\int \overline{Z}\, dz$ multiplicierten Glieder fort, da Z_1 ein Integral der gegebenen Gleichung ist. Die übrigen Glieder liefern, zweckmässig angeordnet, die folgende Gleichung:

$$(2) \qquad Z_1 \frac{d^{n-1}\overline{Z}}{dz^{n-1}} = \left[P_1(z)Z_1 - \binom{n}{n-1}\frac{dZ_1}{dz}\right]\frac{d^{n-2}\overline{Z}}{dz^{n-2}} + \cdots +$$

$$\left[P_{n-1}(z)Z_1 + \binom{2}{1}P_{n-2}(z)\frac{dZ_1}{dz} + \binom{3}{1}P_{n-3}(z)\frac{d^2Z_1}{dz^2} + \cdots - \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}Z_1}{dz^{n-1}}\right]\overline{Z},$$

*) Cf. Fuchs, a. a. O. Journ. f. Math. Bd. 66.

welche wir nach Division mit Z_1 in die Gestalt setzen:

$$(3) \qquad \frac{d^{n-1}\overline{Z}}{dz^{n-1}} = \overline{P}_1(z)\frac{d^{n-2}\overline{Z}}{dz^{n-2}} + \overline{P}_2(z)\frac{d^{n-3}\overline{Z}}{dz^{n-3}} + \cdots + \overline{P}_{n-1}(z)\overline{Z}.$$

Dies ist die Differentialgleichung, deren Existenz oben behauptet wurde.

Setzen wir in (1) für Z der Reihe nach die Integrale $Z_2, Z_3, \cdots, Z_n$ des Fundamentalsystems $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ ein, so möge Z_k:

$$(4) \qquad \overline{Z}_{k-1} = \frac{d}{dz}\left(\frac{Z_k}{Z_1}\right)$$

liefern. Es werden alsdann $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \cdots, \overline{Z}_{n-1}$ particuläre Integrale der Differentialgleichung (3) sein, die sich als von einander linear unabhängig erweisen. Bestände nämlich eine Relation:

$$c_1\overline{Z}_1 + c_2\overline{Z}_2 + \cdots + c_{n-1}\overline{Z}_{n-1} = 0$$

identisch, so würde nach Eintragung der Ausdrücke (4) für die $\overline{Z}_k$ und Integration eine Identität:

$$c_0 Z_1 + c_1 Z_2 + c_2 Z_3 + \cdots + c_{n-1} Z_n = 0$$

entspringen, welche $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$ zur Folge haben würde. Man erkennt somit, *dass die durch* (4) *gegebenen particulären Integrale* $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \cdots, \overline{Z}_{n-1}$ *ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung* (3) *liefern, und dass umgekehrt von diesen Integralen aus in:*

$$(5) \qquad Z_1, \quad Z_1\int\overline{Z}_1 dz, \quad Z_1\int\overline{Z}_2 dz, \cdots, Z_1\int\overline{Z}_{n-1}dz$$

ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Differentialgleichung gewonnen wird. Wir merken endlich noch den unmittelbar evidenten Satz an, dass der Regularitätsbereich der Integrale von (3) mit demjenigen der Integrale der ursprünglichen Gleichung identisch ist, falls man nur von vereinzelten Punkten absieht, die zu den Nullpunkten und Polen von Z_1 gehören. —

Die vorstehenden Ansätze gestalten wir gleich noch dadurch etwas weiter aus, dass wir wieder auf den im vorigen Paragraphen betrachteten geschlossenen Umlauf C zurückgehen und unter Z_1 ein Integral verstehen, das bei Fortsetzung über C in $Z_1' = \mu_1 Z_1$ übergeht.

Die Substitution (1) pg. 355 nimmt unter diesen Umständen die nachfolgende Gestalt an:

$$(6) \qquad \begin{cases} Z_1' = \mu_1 Z_1, \\ Z_2' = \alpha_{21}Z_1 + \alpha_{22}Z_2 + \cdots + \alpha_{2n}Z_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_n' = \alpha_{n1}Z_1 + \alpha_{n2}Z_2 + \cdots + \alpha_{nn}Z_n \end{cases}$$

und die zugehörige Fundamentalgleichung wird daraufhin:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 - \mu, & \alpha_{21} & , \alpha_{31}, \cdots, & \alpha_{n1} \\ 0 & , \alpha_{22} - \mu, & \alpha_{32}, \cdots, & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & , \alpha_{2n} & , \alpha_{3n}, \cdots, & \alpha_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

oder in entwickelter Gestalt:

(7) $$(\mu - \mu_1)(\mu^{n-1} + A_1'\mu^{n-2} + \cdots + A_{n-1}') = 0.$$

Teilt man jetzt mit der ersten Gleichung (6) in die $(n-1)$ übrigen und differenziert die so entspringenden Gleichungen je einmal nach z, so ergiebt sich:

(8) $$\begin{cases} \bar{Z}_1' = \frac{\alpha_{22}}{\mu_1}\bar{Z}_1 + \frac{\alpha_{23}}{\mu_1}\bar{Z}_2 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}}{\mu_1}\bar{Z}_{n-1}, \\ \bar{Z}_2' = \frac{\alpha_{32}}{\mu_1}\bar{Z}_1 + \frac{\alpha_{33}}{\mu_1}\bar{Z}_2 + \cdots + \frac{\alpha_{3n}}{\mu_1}\bar{Z}_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{Z}_{n-1}' = \frac{\alpha_{n2}}{\mu_1}\bar{Z}_1 + \frac{\alpha_{n3}}{\mu_1}\bar{Z}_2 + \cdots + \frac{\alpha_{nn}}{\mu_1}\bar{Z}_{n-1}. \end{cases}$$

Damit haben wir die dem geschlossenen Umlaufe C correspondierende Substitution des Fundamentalsystems $(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \cdots, \bar{Z}_{n-1})$ der Differentialgleichung (3) gewonnen. Die zugehörigen Multiplicatoren $\bar{\mu}$ sind die Lösungen der Fundamentalgleichung:

(9) $$\begin{vmatrix} \frac{\alpha_{22}}{\mu_1} - \bar{\mu}, & \frac{\alpha_{23}}{\mu_1}, & \cdots, & \frac{\alpha_{2n}}{\mu_1} \\ \frac{\alpha_{32}}{\mu_1}, & \frac{\alpha_{33}}{\mu_1} - \bar{\mu}, & \cdots, & \frac{\alpha_{3n}}{\mu_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\alpha_{n2}}{\mu_1}, & \frac{\alpha_{n3}}{\mu_1}, & \cdots, & \frac{\alpha_{nn}}{\mu_1} - \bar{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir merken den Satz an, *dass die Lösungen* $\bar{\mu}$ *dieser Fundamentalgleichung die durch* μ_1 *geteilten Lösungen derjenigen Gleichung* $(n-1)^{ten}$ *Grades sind, welche aus der Fundamentalgleichung* (7) *nach Fortlassung des Linearfactors* $(\mu - \mu_1)$ *hervorgeht.*

§ 7. Canonische Fundamentalsysteme für geschlossene Umläufe.

Wir sind jetzt im Stande, die Entwicklungen des vorletzten Paragraphen mit Erfolg weiterzuführen. Es wird dabei einen wesentlichen Unterschied ausmachen, ob die Fundamentalgleichung n verschiedene Wurzeln hat oder nicht.

I. Fall lauter einfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung.

Unter den n Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ der Fundamentalgleichung, von denen keine einzige verschwindet (cf. pg. 356), sollen zunächst keine zwei identisch sein. Nach dem am Schlusse von § 5 (pg. 357) ausgesprochenen Theoreme gehört zu jeder Wurzel μ_k wenigstens ein Integral Z_k. Die n Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ liefern uns solchergestalt ein System von n Integralen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$. *Dieselben werden bei Durchlaufung der zu Grunde liegenden geschlossenen Curve C übergehen in:*

$$Z_1' = \mu_1 Z_1, \quad Z_2' = \mu_2 Z_2, \cdots, \quad Z_n' = \mu_n Z_n. \tag{1}$$

Wir prüfen, ob für diese Z_k eine Relation:

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \cdots + c_n Z_n = 0$$

mit nicht durchgängig verschwindenden c besteht. Indem wir den Umlauf C mehrfach wiederholt beschreiben, gelangen wir zu den identischen Gleichungen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \cdots + c_n Z_n = 0, \\ \mu_1 c_1 Z_1 + \mu_2 c_2 Z_2 + \cdots + \mu_n c_n Z_n = 0, \\ \mu_1^2 c_1 Z_1 + \mu_2^2 c_2 Z_2 + \cdots + \mu_n^2 c_n Z_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_1^{n-1} c_1 Z_1 + \mu_2^{n-1} c_2 Z_2 + \cdots + \mu_n^{n-1} c_n Z_n = 0. \end{array} \right.$$

Da denselben durch die n nicht durchgängig verschwindenden Grössen $c_k Z_k$ genügt wird, so müsste die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \mu_1, & \mu_2, & \cdots, & \mu_n \\ \mu_1^2, & \mu_2^2, & \cdots, & \mu_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{n-1}, & \mu_2^{n-1}, & \cdots, & \mu_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Dies ist aber nicht der Fall; denn diese Determinante ist nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie mit dem Differenzenproduct $\prod_{i>k}(\mu_i - \mu_k)$ der μ identisch, welches nach Voraussetzung nicht verschwindet. *Die $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ sind hiernach linear-unabhängig und bilden somit ein Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung.*

Sei Z irgend ein (nicht identisch verschwindendes) Integral, das bei Fortsetzung über C in $Z' = \mu Z$ übergeht. Die Darstellung von Z in dem eben gewonnenen Fundamentalsysteme $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ sei:

(3) $$Z = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_n Z_n,$$

wo wenigstens ein a nicht $= 0$ ist. Es ist dann:

$$Z' = a_1 \mu_1 Z_1 + a_2 \mu_2 Z_2 + \cdots + a_n \mu_n Z_n$$

mit μZ, d. h. mit:

$$a_1 \mu Z_1 + a_2 \mu Z_2 + \cdots + a_n \mu Z_n$$

identisch, so dass:

$$a_1(\mu - \mu_1) Z_1 + a_2(\mu - \mu_2) Z_2 + \cdots + a_n(\mu - \mu_n) Z_n = 0$$

identisch besteht. Dieserhalb müssen sämtliche Coefficienten der letzten Gleichung verschwinden. Somit wird μ mit einer der Grössen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, etwa mit μ_k, gleich sein, und die a müssen bis auf a_k verschwinden. Die Formel (3) reduciert sich so auf $Z = a_k Z_k$. *Für den geschlossenen Umlauf C kommen keine anderen Multiplicatoren als $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ vor; das allgemeinste zum Multiplicator μ_k gehörende Integral stellt sich durch das oben gewählte Integral Z_k in der Gestalt $a_k Z_k$ dar, wo a_k eine willkürliche Constante ist.* Die Unabhängigkeit der Fundamentalgleichung (7) pg. 356 von dem besonderen zu ihrer Herstellung benutzten Fundamentalsystem kann im Falle lauter verschiedener μ_k auch sehr leicht direct eingesehen werden.

Wir wollen fortan das hier benutzte mit den Formeln (1) in Übereinstimmung gewählte System $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ als *ein zum Umlauf C gehörendes canonisches Fundamentalsystem* bezeichnen. Dasselbe ist nach den vorausgesandten Entwicklungen insoweit unbestimmt, dass wir das einzelne Integral noch mit einem beliebigen constanten Factor versehen können. Das pg. 347 durch die Reihen (1) gelieferte System bezeichnen wir zum Unterschied des genaueren als „das zum regulären Punkt z_0 gehörende canonische Fundamentalsystem“. —

II. Fall mehrfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung.

Es habe jetzt die Fundamentalgleichung die m Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$, und zwar möge es sich bei μ_k um eine l_k-fache Wurzel handeln, wobei also $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = n$ ist. Eine einzelne unter den Wurzeln nennen wir zunächst kurz μ, und l sei der Grad ihrer Vielfachheit. Bei der Untersuchung der zu μ gehörigen Integrale kommen die Entwicklungen von § 6 ausführlich zur Anwendung.

Auf Grund des Theorems am Schlusse von § 5 pg. 357 folgern wir zunächst die Existenz eines Integrals Z_1, welches nach Fortsetzung über C in $Z_1' = \mu Z_1$ übergegangen ist. Man reduciere jetzt nach § 6 pg. 357 die Differentialgleichung auf eine solche der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und gewinnt aus einem Fundamentalsystem $\overline{Z}_1, \cdots, Z_{n-1}$ der letzteren nach dem Schema (5) pg. 358 ein solches der ursprünglichen Diffe-

rentialgleichung. Die zum Umlauf C gehörende Fundamentalgleichung der reducierten Differentialgleichung hat die $(l-1)$-fache Wurzel 1 (cf. pg. 359). Es giebt also, $l > 1$ vorausgesetzt, ein Integral $\bar{Z}$, welches bei Durchlaufung von C unverändert bleibt. Wir nennen dies Integral im besonderen $Z^{(1)}$ und haben in:

$$(4) \qquad Z_1, \quad Z_2 = Z_1 \int Z^{(1)} dz$$

zwei Integrale unseres zu bildenden Fundamentalsystems. Nehmen wir $Z^{(1)}$ mit dem ersten Integral des Fundamentalsystems $(\bar{Z}_1, \cdots, \bar{Z}_{n-1})$ identisch, so wird in der zugehörigen Substitution (8) pg. 359 die erste Gleichung $\bar{Z}_1' = \bar{Z}_1$ lauten, d. h. man hat $\alpha_{22} = \mu_1$, $\alpha_{23} = 0, \cdots$, $\alpha_{2n} = 0$, und also lauten die beiden ersten Gleichungen der Substitution (6) pg 358:

$$(5) \qquad Z_1' = \mu Z_1, \quad Z_2' = \alpha_{21} Z_1 + \mu Z_2.$$

Ist $l > 2$, so wenden wir dies für die ursprüngliche Differentialgleichung abgeleitete Resultat auf die reducierte Gleichung an, deren Fundamentalgleichung die mehrfache Wurzel 1 hat. Nach Vorschrift von (4) haben wir somit in:

$$\bar{Z}_1 = Z^{(1)}, \quad \bar{Z}_2 = Z^{(1)} \int Z^{(2)} dz$$

zwei Integrale eines zugehörigen Fundamentalsystems, und zufolge (5) nehmen die beiden ersten Gleichungen der correspondierenden Substitution (8) pg. 359 die Form an:

$$\bar{Z}_1' = \bar{Z}_1, \quad \bar{Z}_2' = \alpha_{32}' \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2.$$

Dabei ist $Z^{(2)}$ ein zum Multiplicator 1 gehöriges Integral einer reducierten Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Durch Vergleich der beiden letzten Gleichungen mit dem Schema (8) pg. 359 folgt weiter $\alpha_{33} = \mu$, $\alpha_{34} = 0, \cdots, \alpha_{3n} = 0$. Wählt man:

$$Z_1, \quad Z_2 = Z_1 \int Z^{(1)} dz, \quad Z_3 = Z_1 \int \left(Z^{(1)} \int Z^{(2)} dz \right) dz$$

als die drei ersten Integrale eines Fundamentalsystems für unsere ursprüngliche Differentialgleichung, so lauten die ersten drei Gleichungen der Substitution (6) pg. 358:

$$\begin{aligned} Z_1' &= \mu Z_1, \\ Z_2' &= \alpha_{21} Z_1 + \mu Z_2, \\ Z_3' &= \alpha_{31} Z_1 + \alpha_{32} Z_2 + \mu Z_3. \end{aligned}$$

Ist $l > 3$, so kann man dieses Ergebnis auf die reducierte Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung anwenden und eine der voraufgehenden genau analoge Überlegung durchführen. Man gelangt so schliesslich zu dem folgenden Satze: *Ist μ eine l-fache Wurzel der Fundamentalgleichung, so existieren als zu μ gehörig l linear-unabhängige Integrale:*

$$(6) \qquad Z_1, \quad Z_2 = Z_1 \int Z^{(1)} dz, \quad Z_3 = Z_1 \int \left(Z^{(1)} \int Z^{(2)} dz \right) dz, \cdots,$$

$$Z_l = Z_1 \int \left(Z^{(1)} \int \left(Z^{(2)} \cdots \int \left(Z^{(l-2)} \int Z^{(l-1)} dz \right) dz \cdots \right) dz \right) dz,$$

welche bei Fortsetzung über den geschlossenen Umlauf C übergehen in:

$$(7) \qquad \begin{cases} Z_1' = \mu Z_1, \\ Z_2' = \alpha_{21} Z_1 + \mu Z_2, \\ Z_3' = \alpha_{31} Z_1 + \alpha_{32} Z_2 + \mu Z_3, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ Z_l' = \alpha_{l1} Z_1 + \alpha_{l2} Z_2 + \cdots + \alpha_{l,l-1} Z_{l-1} + \mu Z_l. \end{cases}$$

Man bilde jetzt für jede der unterschiedenen m Wurzeln μ_k ein solches System von l_k Integralen; die zu μ_k gehörenden Integrale mögen des genaueren $Z_{k1}, Z_{k2}, \cdots Z_{k,l_k}$ heissen, wobei die dem Schema (7) zu Grunde liegende Anordnung der Integrale bewahrt bleiben soll. Wir sprechen kurz von einem „Teilsystem" der zu μ_k gehörenden Integrale; dabei betonen wir nochmals, dass die Integrale des einzelnen Teilsystems sicher linear-unabhängig von einander sind.

Es tritt nun die Frage ein, ob die n Integrale aller m Teilsysteme ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung liefern oder nicht. Nehmen wir somit zunächst an, es bestände eine identische Relation:

$$(8) \qquad \begin{aligned} c_{11} Z_{11} + \cdots + c_{1,l_1} Z_{1,l_1} + c_{21} Z_{21} + \cdots \\ + c_{2,l_2} Z_{2,l_2} + \cdots + c_{m1} Z_{m1} + \cdots + c_{m,l_m} Z_{m,l_m} = 0 \end{aligned}$$

mit nicht durchgängig ausfallenden Gliedern. Da die Integrale des einzelnen Theilsystems linear-unabhängig sind, so sind in (8) wenigstens zwei Teilsysteme wirklich vertreten. Es finde sich etwa das i^{te} und das k^{te} Teilsystem, und zwar möge Z_{i,λ_i} als Integral mit höchstem zweiten Index aus dem i^{ten} System auftreten und aus dem k^{ten} System entsprechend Z_{k,λ_k}. Schreiben wir demnach die Relation (8):

$$\cdots + c_{i,\lambda_i} Z_{i,\lambda_i} + \cdots + c_{k,\lambda_k} Z_{k,\lambda_k} + \cdots,$$

so sind die beiden hier angegebenen Coefficienten c von 0 verschieden

Führen wir jetzt den Umlauf über C aus, so gelangen wir zu einer neuen identischen Relation, in welcher zufolge (7) keine neuen als die bisher vertretenen Teilsysteme auftreten. Auch kann sich von keinem Teilsystem ein Integral mit höherem zweiten Index einstellen; endlich bekommt das Glied, welches das Integral mit höchstem zweiten Index aus dem einzelnen Teilsystem enthält, den zugehörigen Multiplicator μ als Factor. Die neue Relation hat also die Gestalt:

$$\cdots + c_{i,\lambda_i}\mu_i Z_{i,\lambda_i} + \cdots + c_{k,\lambda_k}\mu_k Z_{k,\lambda_k} + \cdots.$$

Ziehen wir jetzt die mit μ_i multiplicierte voraufgehende Gleichung von dieser letzteren ab, so folgt als identische Relation:

$$(9) \qquad \cdots + c_{k,\lambda_k}(\mu_k - \mu_i)Z_{k,\lambda_k} + \cdots,$$

in welcher wegen $\mu_i \neq \mu_k$ nicht alle Glieder ausfallen. Diese Relation enthält aus keinem Teilsystem ein Integral mit höherem zweiten Index als die Relation (8); aber im i^{ten} Teilsystem ist das bisher höchste Integral Z_{i,λ_i} ausgefallen.

Durch Wiederholung der gleichen Reductionsmethode würden wir schliesslich zu einer Gleichung mit nicht durchgängig verschwindenden Coefficienten gelangen, welche für die Integrale eines einzelnen Teilsystemes identisch bestände. Da dies unmöglich ist, so ist die Annahme der Existenz einer Relation (8) unzulässig. Also gilt das Resultat: *Die $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = n$ Integrale unserer m Teilsysteme bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.* Wir wollen dasselbe als *ein „canonisches" Fundamentalsystem für den geschlossenen Umlauf C* benennen.

§ 8. Ansatz zur Entwicklung der Integrale im Kreisring.

Um zu analytischen Darstellungen der zuletzt gewonnenen canonischen Fundamentalsysteme zu gelangen, machen wir die beschränkende Voraussetzung, dass die geschlossene Curve C die Gestalt eines Kreises habe, der dem Rande des Regularitätsbereiches unserer Differentialgleichung nirgends unendlich nahe kommt. Es soll unmöglich sein, diesen Kreis ohne Hinwegschiebung über irreguläre Punkte auf einen Punkt zusammenzuziehen. Diese Voraussetzung wird im besonderen zutreffen, falls der Kreis einen einzelnen, isoliert liegenden irregulären Punkt umgiebt; und wir bezeichnen es gleich als wesentliches Ziel der folgenden Entwicklungen, Darstellungen der Integrale in der Umgebung solcher irregulärer Stellen zu gewinnen.

Wir wollen jetzt den fraglichen Kreis durch zwei mit ihm concentrische Kreise einschliessen, die wir einander so nahe gelegen an-

nehmen, dass der durch sie eingegrenzte Kreisring gänzlich innerhalb des Regularitätsbereiches gelegen ist. Der Mittelpunkt unserer concentrischen Kreise werde z_0 genannt. Es soll sich hier für die Integrale des zum Kreise C gehörenden canonischen Fundamentalsystems um analytische Darstellungen handeln, welche innerhalb des gedachten Kreisrings gültig sind.

Falls das Integral Z bei einem für das Innere des Kreisrings positiven Umlauf (cf. pg. 111) über den Kreis C hin in μZ übergeht, so können wir in folgender Weise zu einer Darstellung von Z gelangen. Die Function $(z - z_0)^\varrho$ nimmt beim fraglichen Umlauf den Factor $e^{2i\pi\varrho}$ an. Setzen wir also:

$$(1) \qquad e^{2i\pi\varrho} = \mu, \qquad \varrho = \frac{\log \mu}{2i\pi},$$

so ist ϱ hierdurch nur erst bis auf eine beliebige additive ganze Zahl bestimmt. Wir wählen einstweilen irgend einen hiernach zulässigen Wert von ϱ und gewinnen alsdann in $(z - z_0)^{-\varrho}Z$ eine Function, welche beim genannten Umlauf unverändert bleibt, und welche demnach im Kreisringe eindeutig sowie daselbst überall regulär ist. Nach einem pg. 146 ausgesprochenen Theoreme gestattet $(z - z_0)^{-\varrho}Z$ demnach die Darstellung durch eine im Kreisringe convergente Laurent'sche Reihe:

$$(2) \quad \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Wir wollen Reihen dieser Art, welche im folgenden vielfach zu nennen sind, durch $L(z - z_0)$ oder kurz L bezeichnen. Merken wir noch ausdrücklich den Satz an: *Ein Integral Z, welches bei Fortsetzung über den Kreis C in μZ übergeht, gestattet die Darstellung:*

$$(3) \qquad Z = (z - z_0)^\varrho L(z - z_0),$$

wo ϱ irgend eine der durch die zweite Gleichung (1) *bestimmten Grössen ist und $L(z - z_0)$ eine im Kreisring convergente Laurent'sche Reihe bedeutet.*

Hiernach sind wir für den Fall lauter einfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung schon am Ziele: *Für das Multiplicatorensystem $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ bestimmen wir in der oben bezeichneten Weise ein System zugehöriger Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ und haben dann für die n Integrale des canonischen Fundamentalsystems die Darstellungen:*

$$(4) \qquad \begin{aligned} Z_1 &= (z - z_0)^{\varrho_1} L_1(z - z_0), \\ Z_2 &= (z - z_0)^{\varrho_2} L_2(z - z_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_n &= (z - z_0)^{\varrho_n} L_n(z - z_0), \end{aligned}$$

wo die $L_1, L_2, \cdots, L_n$ n im Kreisring convergente Laurent'sche Reihen sind.

Ist zweitens μ eine l-fache Wurzel der Fundamentalgleichung, so gehören zu diesem Multiplicator μ die l in (6) pg. 363 dargestellten Integrale, welche bei Fortsetzung über den Kreis C die Substitution (7) pg. 363 erfahren. Nach dem Ansatze (3) haben wir demnach nur erst für das erste dieser l Integrale Z_1 eine etwa durch:

$$Z_1 = (z - z_0)^\varrho L_{11}(z - z_0)$$

zu bezeichnende Darstellung. Um eine entsprechende Darstellung für das Integral Z_2 zu gewinnen, müssen wir an die Darstellung (4) pg. 362 dieses Integrals anknüpfen. Das daselbst benutzte Integral $Z^{(1)}$ gestattet, insofern es zum Multiplicator $\mu = 1$ gehört, eine Darstellung $L(z - z_0)$. Aus der unbedingten und gleichmässigen Convergenz dieser Reihe im Kreisring ergiebt sich dann, dass $Z^{(1)}$ integriert wird, indem jedes Glied der Reihe $L(z - z_0)$ einzeln integriert wird. Dabei liefert $a_{-1}(z - z_0)^{-1}$, sofern a_{-1} nicht verschwindet, ein logarithmisches Glied. Indem wir sonach nicht ausschliessen, dass eine einzelne Reihe $L(z - z_0)$ durch Ausfallen sämtlicher Glieder mit 0 identisch ist, bekommen wir zufolge (4) pg. 362 für Z_2 die Darstellung:

$$Z_2 = (z - z_0)^\varrho [L_{21}(z - z_0) + L_{22}(z - z_0) \cdot \log(z - z_0)].$$

Eine Darstellung der gleichen Gestalt haben wir nun mit $\varrho = 1$ für $Z^{(1)}\int Z^{(2)} dz$ einzutragen, um nach Vorschrift von pg. 362 das Integral Z_3 zu entwickeln. Man hat hier und weiterhin immer wieder Integrale der folgenden Gestalt:

$$\int (\log(z - z_0))^\lambda L(z - z_0) dz$$

zu berechnen. Vermöge der partiellen Integration kann man dies Integral auf die Form reducieren:

$$\int (\log(z - z_0))^\lambda L dz = a(\log(z - z_0))^{\lambda+1}$$
$$+ (\log(z - z_0))^\lambda L' + \int (\log(z - z_0))^{\lambda-1} L'' dz,$$

wo a einen constanten Coefficienten bedeutet und L', L'' wieder Laurent'sche Reihen sind. Durch wiederholte Anwendung dieser Recursionsformel gelangt man zu einer Darstellung:

$$\int (\log(z - z_0))^\lambda L dz = a(\log(z - z_0))^{\lambda+1} + L_1 \cdot (\log(z - z_0))^\lambda$$
$$+ L_2 \cdot (\log(z - z_0))^{\lambda-1} + \cdots + L_\lambda \cdot \log(z - z_0) + L_{\lambda+1}$$

des links stehenden Integrals.

Hiermit besitzen wir die Mittel, um auch die weiter folgenden Integrale $Z_3, Z_4, \cdots, Z_l$ darzustellen. Es entspringt offenbar das folgende Theorem: *Im Falle beliebig vielfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung gelten für die l Integrale des einzelnen der m Teilsysteme die folgenden Ansätze:*

$$(5)\begin{cases} Z_1 = (z-z_0)^\varrho L_{11}, \\ Z_2 = (z-z_0)^\varrho [L_{21} + \log(z-z_0) L_{22}], \\ Z_3 = (z-z_0)^\varrho [L_{31} + \log(z-z_0) L_{32} + (\log(z-z_0))^2 L_{33}], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_l = (z-z_0)^\varrho [L_{l1} + \log(z-z_0) L_{l2} + \cdots + (\log(z-z_0))^{l-1} L_{ll}], \end{cases}$$

wo ϱ irgend eine mit dem zugehörigen Multiplicator μ durch die Gleichung (1) *verknüpfte Grösse ist und die L_{ik} lauter Laurent'sche Reihen bedeuten, die im Kreisring convergieren, sowie vorkommendenfalls auch mit null identisch sein können.*

§ 9. Irreguläre Punkte z_0 ohne wesentlich singulären Charakter der $L(z-z_0)$.

Wir gehen jetzt von der Annahme aus, dass z_0 ein isoliert liegender irregulärer Punkt ist, und dass im Innern des Kreisringes um z_0 ausser diesem Punkte kein weiterer irregulärer Punkt vorkommt. Man darf unter diesen Umständen den inneren unseren Kreisring begrenzenden Kreis mit beliebig kleinem, jedoch von 0 verschiedenen Radius um z_0 legen, ohne dass die im vorigen Paragraphen benutzten Laurent'schen Reihen aufhören, im Innern des Kreisrings zu convergieren. Hat eine einzelne dieser Reihen unendlich viele Glieder mit negativen Exponenten von $(z-z_0)$, so stellt dieselbe eine Function dar, welche im Punkte z_0 eine wesentlich singuläre Stelle besitzt. Um so wichtiger ist es die Vorbedingungen festzustellen, *unter denen bei den Darstellungen* (4) *bez.* (5) § 8 *unseres canonischen Fundamentalsystems* $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ *die sämtlichen zur Verwendung kommenden Reihen $L(z-z_0)$ nur endlich viele Glieder mit negativen Exponenten darbieten und also Functionen vorstellen, die bei z_0 höchstens polar unstetig sind*)*. In dieser Hinsicht haben wir folgendes erste Theorem: *Soll keine der in Rede stehenden Reihen $L(z-z_0)$ unendlich viele Glieder mit negativen Exponenten enthalten, so muss sich notwendig die Differentialgleichung auf die Gestalt:*

---

*) Es ist dies eine der wichtigsten Fragen, welche Fuchs in seinen wiederholt genannten Arbeiten in den Bdn. 66 und 68 des Journ. f. Math. behandelt.

$$(1)\qquad \frac{d^n Z}{dz^n} = \frac{\varphi_1(z)}{z-z_0}\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + \frac{\varphi_2(z)}{(z-z_0)^2}\frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}} + \cdots + \frac{\varphi_n(z)}{(z-z_0)^n} Z$$

bringen lassen, wo $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z)$ *lauter in der Umgebung von* z_0 *reguläre Functionen sind.*

Dieser Satz lässt sich folgendermassen durch den Schluss der vollständigen Induction beweisen.

Die vorgelegte Differentialgleichung:

$$(2)\qquad \frac{d^n Z}{dz^n} = P_1(z)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}} + P_2(z)\frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}} + \cdots + P_n(z) Z$$

hat der Annahme zufolge ein erstes Integral $Z_1 = (z-z_0)^{\varrho} L(z-z_0)$, wo L nur endlich viele Glieder mit negativen Exponenten enthält, den Fall, dass solche Glieder überhaupt nicht vorkommen, eingeschlossen. Wir benutzen, dass ϱ erst bis auf additive ganze Zahlen bestimmt war. Ist ν der niederste in L wirklich auftretende Exponent, so sondern wir $(z-z_0)^{\nu}$ aus L ab, setzen an Stelle von ϱ fortan $\varrho_1 = \varrho + \nu$ und haben also für Z_1 die Darstellung:

$$(3)\qquad Z_1 = (z-z_0)^{\varrho_1}[a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots],$$

wo $a_0 \neq 0$ ist.

Vermöge dieses Integrales nehme man nun die Reduction der vorgelegten Gleichung (2) in der pg. 357 u. f. dargelegten Weise auf eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(4)\qquad \frac{d^{n-1}\overline{Z}}{dz^{n-1}} = \overline{P}_1(z)\frac{d^{n-2}\overline{Z}}{dz^{n-2}} + P_2(z)\frac{d^{n-3}\overline{Z}}{dz^{n-3}} + \cdots + \overline{P}_{n-1}(z)\overline{Z}$$

vor, wobei für die Coefficienten $\overline{P}(z)$ die Formeln gelten:

$$(5)\qquad \begin{cases} Z_1\overline{P}_1 = P_1 Z_1 - \binom{n}{n-1}\dfrac{dZ_1}{dz}, \\ Z_1\overline{P}_2 = P_2 Z_1 + \binom{n-1}{n-2} P_1 \dfrac{dZ_1}{dz} - \binom{n}{n-2}\dfrac{d^2Z_1}{dz^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_1\overline{P}_k = P_k Z_1 + \binom{n-k+1}{n-k} P_{k-1}\dfrac{dZ_1}{dz} + \binom{n-k+2}{n-k} P_{k-2}\dfrac{d^2Z_1}{dz^2} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \binom{n-1}{n-k} P_1 \dfrac{d^{k-1}Z_1}{dz^{k-1}} - \binom{n}{n-k}\dfrac{d^kZ_1}{dz^k}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_1\overline{P}_{n-1} = P_{n-1}Z_1 + 2P_{n-2}\dfrac{dZ_1}{dz} + 3P_{n-3}\dfrac{d^2Z_2}{dz^2} + \cdots - n\dfrac{d^{n-1}Z_1}{dz^{n-1}}. \end{cases}$$

Aus der zwischen beiden Differentialgleichungen gültigen Beziehung:

$$\overline{Z} = \frac{d}{dz}\left(\frac{Z}{Z_1}\right)$$

geht nun hervor, dass auch die bei der Differentialgleichung (4) eintretenden Reihen $L(z-z_0)$ überall nicht unendlich viele negative Exponenten darbieten, falls alle bei den Integralen der ursprünglichen Gleichung (2) vorkommenden $L(z-z_0)$ nur endlich viele negative Exponenten besitzen. Machen wir somit die Annahme, dass unser Theorem bereits für die Differentialgleichungen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bewiesen sei, so wird $\overline{P}_k \cdot (z-z_0)^k$ in der Umgebung von z_0 regulär sein. Die erste Gleichung (5) liefert dann:

$$(z-z_0)\,P_1 = (z-z_0)\,\overline{P}_1 + \binom{n}{n-1}\frac{dZ_1}{dz}\cdot\frac{z-z_0}{Z_1},$$

so dass mit Rücksicht auf (3) die Regularität von $(z-z_0)\cdot P_1$ folgt. Weiter liefert die zweite Gleichung (5):

$$(z-z_0)^2 P_2 = (z-z_0)^2\,\overline{P}_2 - \binom{n-1}{n-2}(z-z_0)\,P_1\cdot\frac{dZ_1}{dz}\cdot\frac{z-z_0}{Z_1} + \binom{n}{n-2}\frac{d^2 Z_1}{dz^2}\cdot\frac{(z-z_0)^2}{Z_1},$$

woraus die Regularität von $(z-z_0)^2 P_2$ folgt. Indem wir die Gleichungen (5) successive weiter heranziehen, gelangen wir bis zur Erkenntnis der Regularität von $(z-z_0)^{n-1} P_{n-1}$. Um auch $(z-z_0)^n P_n$ als regulär zu erkennen, setzen wir Z_1 in die Differentialgleichung (2) ein und gewinnen als identische Gleichung:

$$(z-z_0)^n P_n = \frac{d^n Z_1}{dz^n}\cdot\frac{(z-z_0)^n}{Z_1} - (z-z_0)\,P_1\cdot\frac{d^{n-1}Z_1}{dz^{n-1}}\cdot\frac{(z-z_0)^{n-1}}{Z_1} - \cdots$$
$$\cdots - (z-z_0)^{n-1} P_{n-1}\cdot\frac{dZ_1}{dz}\cdot\frac{z-z_0}{Z_1}.$$

Da jedes rechts auftretende Glied bei z_0 regulär ist, so gilt dasselbe von $(z-z_0)^n P_n$.

Nach diesem Ergebnis wird unser Theorem allgemein gültig sein, falls es für jede Differentialgleichung erster Ordnung gilt. Soll aber die Differentialgleichung:

$$\frac{dZ}{dz} = P_1(z)\,Z$$

ein Integral von der Gestalt (3) besitzen, so folgt:

$$P_1(z) = \frac{d\log Z_1}{dz} = \frac{\varrho_1}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots,$$

und also ist $(z-z_0)\,P_1(z)$ bei z_0 regulär. Unser Satz gilt also allgemein.

Die durch die Gleichung (1) zum Ausdruck kommende Bedingung ist nun aber nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende dafür, dass alle zur Benutzung kommenden $L(z-z_0)$ bei z_0 frei von wesentlichen Singularitäten sind. Indessen erfordert der Nachweis dieser weiteren Behauptung erst noch einige Vorbereitungen.

§ 10. Determinierende Gleichung eines irregulären Punktes z_0.

In (2) pg. 340 war die Gestalt der Differentialgleichung so angenommen:

$$P_0(z)\frac{d^nZ}{dz^n}+P_1(z)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}}+\cdots+P_n(z)Z=0.$$

Der im Endlichen und isoliert gelegene irreguläre Punkt z_0 sei weder ein wesentlich singulärer Punkt der hier auftretenden Coefficienten $P_0, P_1, \cdots, P_n$ noch ein Verzweigungspunkt derselben. Dann bleibt nur übrig, dass die Quotienten $\frac{P_1}{P_0}, \cdots, \frac{P_n}{P_0}$ teilweise oder sämtlich bei z_0 polar unstetig werden. Für $P_k(z)$ wird eine Entwicklung nach Potenzen von $z-z_0=\zeta$ gelten, welche jedenfalls höchstens endlich viele Glieder mit negativen Exponenten von ζ enthält. Offenbar aber kann man, indem man die linke Seite der Differentialgleichung mit einer geeigneten Potenz von ζ multipliciert, alle negativen Exponenten von ζ überhaupt entfernen. Es ist sogar möglich, *unsere Differentialgleichung auf die Normalgestalt zu bringen:*

$$(1)\quad \zeta^n\mathfrak{P}_0(\zeta)\frac{d^nZ}{dz^n}+\zeta^{n-1}\mathfrak{P}_1(\zeta)\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}}+\cdots+\zeta\mathfrak{P}_{n-1}(\zeta)\frac{dZ}{dz}+\mathfrak{P}_n(\zeta)Z=0,$$

wobei die $\mathfrak{P}_k(\zeta)$ *sich sämtlich in der Gestalt:*

$$(2)\quad \mathfrak{P}_k(\zeta)=p^{(k)}+p_1^{(k)}\zeta+p_2^{(k)}\zeta^2+p_3^{(k)}\zeta^3+\cdots$$

darstellen; offenbar darf man hierbei noch weiter annehmen, *dass nicht alle Anfangscoefficienten* $p^{(k)}$ *dieser Entwicklungen verschwinden*, da man anderenfalls die Gleichung (1) ohne Aufgabe ihrer Gestalt durch ζ teilen könnte.

Auf den besonderen Fall der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen mit Functionen $\varphi_k(z)$, die bei z_0 regulär sind, kommen wir zurück, falls wir in der gegenwärtigen Normalgleichung (1) die Function $\mathfrak{P}_0(\zeta)$ als mit 1 identisch annehmen, wenn also $p^{(0)}=1$, $p_1^{(0)}=0$, $p_2^{(0)}=0, \cdots$ zutrifft. Übrigens haben wir die Annahme zu machen, *dass die Reihen* (2) *sämtlich innerhalb eines Kreises um* $\zeta=0$, *d. h. um* z_0 *convergent sind*, *welcher bis an den nächsten irregulären Punkt der Differentialgleichung gerade heranreicht.*

Im Anschluss an (3) pg. 368 versuchen wir jetzt, der Differentialgleichung (1) zunächst formal (cf. pg. 342) durch eine Reihe:

$$Z = \zeta^\varrho (a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \cdots) \tag{3}$$

zu genügen, in welcher ϱ eine bestimmte endliche Grösse bedeutet und $a_0 \neq 0$ ist. Trägt man aber:

$$\zeta^k \frac{d^k Z}{dz^k} = k!\left[\binom{\varrho}{k} a_0 \zeta^\varrho + \binom{\varrho+1}{k} a_1 \zeta^{\varrho+1} + \cdots + \binom{\varrho+m}{k} a_m \zeta^{\varrho+m} + \cdots\right]$$

sowie die Potenzreihen (2) in die Gleichung (1) ein, hebt durch ζ^ϱ und ordnet nach Potenzen von ζ an, so folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k! \Big\{ a_0 \binom{\varrho}{k} p^{(n-k)} &+ \left[a_1 \binom{\varrho+1}{k} p^{(n-k)} + a_0 \binom{\varrho}{k} p_1^{(n-k)}\right]\zeta + \cdots \\ &\cdots + \left[a_m \binom{\varrho+m}{k} p^{(n-k)} + a_{m-1} \binom{\varrho+m-1}{k} p_1^{(n-k)} + \cdots \right. \\ &\left. \cdots + a_1 \binom{\varrho+1}{k} p_{m-1}^{(n-k)} + a_0 \binom{\varrho}{k} p_m^{(n-k)}\right]\zeta^m + \cdots \Big\} = 0.\end{aligned}$$

Hier wollen wir folgende Abkürzungen einführen*):

$$G(\varrho) = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{\varrho}{k} p^{(n-k)}, \quad G_i(\varrho) = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{\varrho}{k} p_i^{(n-k)}. \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

Die letzte Gleichung nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} a_0 G(\varrho) &+ [a_1 G(\varrho+1) + a_0 G_1(\varrho)]\,\zeta + \cdots \\ \cdots &+ [a_m G(\varrho+m) + a_{m-1} G_1(\varrho+m-1) + \cdots \\ \cdots &+ a_1 G_{m-1}(\varrho+1) + a_0 G_m(\varrho)]\,\zeta^m + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Soll demnach die Reihe (3) der Differentialgleichung formal genügen, so müssen wegen $a_0 \neq 0$ folgende Gleichungen zutreffen:

$$\left\{\begin{aligned} & G(\varrho) = 0, \\ & a_1 G(\varrho+1) + a_0 G_1(\varrho) = 0, \\ & a_2 G(\varrho+2) + a_1 G_1(\varrho+1) + a_0 G_2(\varrho) = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_m G(\varrho+m) + a_{m-1} G_1(\varrho+m-1) + \cdots \\ & \qquad \cdots + a_1 G_{m-1}(\varrho+1) + a_0 G_m(\varrho) = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die erste dieser Gleichungen lautet entwickelt:

---

*) Dabei gelten $k!$ und $\binom{\varrho}{k}$ für $k = 0$ als mit 1 identisch.

$$(7)\quad \begin{aligned}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+1)p^{(0)}+\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+2)p^{(1)}+\cdots\\ \cdots+\varrho p^{(n-1)}+p^{(n)}=0.\end{aligned}$$

Da die $p^{(k)}$ nicht sämtlich verschwinden, *so liegt hier eine Bestimmungsgleichung für den Exponenten* ϱ *vor, welcher als niederster in der Entwicklung:*

$$(8)\qquad Z=a_0\zeta^\varrho+a_1\zeta^{\varrho+1}+a_2\zeta^{\varrho+2}+\cdots$$

des als existierend angenommenen Integrals eintritt. Die Gleichung (7), welche in Fuchs' Untersuchungen eine grundlegende Rolle spielt, wird nach ihm als die „*determinierende Gleichung*" des Punktes z_0 bezeichnet. Der Grad der determinierenden Gleichung für ϱ ist $\leq n$; *insbesondere ist sie wegen* $p^{(0)}=1$ *sicher vom* n^{ten} *Grade in dem Specialfalle, dass die* $L(z-z_0)$ *sämtlich ohne wesentliche Singularität in* z_0 *sind* (cf. § 9 pg. 367 ff.).

Die determinierende Gleichung (7) steht in naher Beziehung zur Fundamentalgleichung, welche zu einem Umlaufe um den Punkt z_0 gehört. Wir merken in dieser Hinsicht vorläufig den Satz an: *Giebt es für die Lösung* ϱ *der determinierenden Gleichung ein Integral* (8) *unserer Differentialgleichung, so ist* $\mu=e^{2i\pi\varrho}$ *eine Lösung der zu einem Umlauf um* z_0 *gehörenden Fundamentalgleichung.*

Um nun die weiteren Gleichungen (6) zu verwerten, setzen wir für ϱ eine Wurzel der determinierenden Gleichung ein und identificieren a_0 mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Constanten. Die Gleichungen (6) gestatten dann jedenfalls die Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \cdots$ nach einander eindeutig und endlich zu berechnen, falls keine der Grössen $G(\varrho+1)$, $G(\varrho+2), \cdots$ verschwindet. Wir merken sogleich als Ergebnis an: *Ist* ϱ *eine Lösung der determinierenden Gleichung, welche von keiner weiteren Lösung dieser Gleichung um eine von* 0 *verschiedene positive ganze Zahl übertroffen wird, so giebt es eine der Differentialgleichung formal genügende Reihe:*

$$(9)\qquad a_0\zeta^\varrho+a_1\zeta^{\varrho+1}+a_2\zeta^{\varrho+2}+\cdots,$$

in welcher a_0 *willkürlich als von* 0 *verschiedene endliche Constante gewählt werden darf, während* $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \cdots$ *als endliche Grössen eindeutig bestimmt sind.*

Ehe wir die Convergenzuntersuchung der Reihe (9) unternehmen, stellen wir erst noch das Verhalten der determinierenden Gleichung bei der pg. 368 in den Formeln (4) und (5) gegebenen Reduction unserer Differentialgleichung auf eine solche von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung fest. Wir nehmen hierbei den für die Folge wichtigsten Fall an, dass näm-

lich $\mathfrak{P}_0(\zeta)$ mit $p^{(0)}$ identisch ist und $p^{(0)} \neq 0$ zutrifft. Übrigens gehen wir von der Existenz eines Integrales Z_1 aus, welches zu einer Wurzel ϱ_1 der determinierenden Gleichung gehört. Unsere jetzige Bezeichnungsweise bringen wir mit der von pg. 368 in Einklang, indem wir setzen:

$$P_1(z) = -\frac{\mathfrak{P}_1(\zeta)}{p^{(0)}\zeta}, \quad P_2(z) = -\frac{\mathfrak{P}_2(\zeta)}{p^{(0)}\zeta^2}, \cdots, P_n(z) = -\frac{\mathfrak{P}_n(\zeta)}{p^{(0)}\zeta^n}$$

und entsprechend für die reducierte Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die in letzterer auftretenden $\overline{\mathfrak{P}}_1(\zeta), \cdots, \overline{\mathfrak{P}}_{n-1}(\zeta)$ mögen die Anfangscoefficienten $\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}, \cdots, \bar{p}^{(n-1)}$ haben, während $\overline{\mathfrak{P}}_0(\zeta)$ mit $\bar{p}^{(0)}$ identisch ist. Für die Anfangscoefficienten berechnen wir uns aus (5) pg. 368:

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{p}^{(0)} = p^{(0)}, \\ \bar{p}^{(1)} = p^{(1)} + \binom{n}{1}\varrho_1 p^{(0)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \bar{p}^{(n-k)} = p^{(n-k)} + \binom{k+1}{1}\varrho_1 p^{(n-k-1)} + \binom{k+2}{2}\varrho_1(\varrho_1-1)p^{(n-k-2)} + \cdots \\ \qquad \cdots + \binom{n-1}{n-k-1}\varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+k+2)p^{(1)} \\ \qquad + \binom{n}{n-k}\varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+k+1)p^{(0)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \bar{p}^{(n-1)} = p^{(n-1)} + \binom{2}{1}\varrho_1 p^{(n-2)} + \binom{3}{2}\varrho_1(\varrho_1-1)p^{(n-3)} + \cdots \\ \qquad \cdots + \binom{n}{n-1}\varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+2)p^{(0)}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Coefficienten stellt sich die determinierende Gleichung der reducierten Differentialgleichung so dar:

$$(11) \quad \bar{\varrho}(\bar{\varrho}-1)\cdots(\bar{\varrho}-n+2)\bar{p}^{(0)} + \bar{\varrho}(\bar{\varrho}-1)\cdots(\bar{\varrho}-n+3)\bar{p}^{(1)} + \cdots \\ \cdots + \bar{\varrho}\,\bar{p}^{(n-2)} + \bar{p}^{(n-1)} = 0.$$

Die determinierende Gleichung (7) hat wegen $p^{(0)} \neq 0$ gegenwärtig n Wurzeln, die $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ heissen mögen. Man wolle von (7) aus die Gleichung n^{ten} Grades bilden, welche die n Wurzeln:

$$\sigma_k = \varrho_k - \varrho_1 - 1 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

hat, und trage zu diesem Zwecke $\varrho = \sigma + \varrho_1 + 1$ in (7) ein:

$$(12) \quad p^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}(\sigma+1+\varrho_1)(\sigma+1+\varrho_1-1) \\ \cdots(\sigma+1+\varrho_1-k+1)p^{(n-k)} = 0.$$

Es besteht nun für irgend zwei Grössen x, y die Identität:

$$(x+y)(x+y-1)\cdots(x+y-k+1) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$$
$$+\binom{k}{1}x(x-1)\cdots(x-k+2)y$$
$$+\binom{k}{2}x(x-1)\cdots(x-k+3)y(y-1)+\cdots$$
$$\cdots+\binom{k}{k-1}xy(y-1)\cdots(y-k+2)+y(y-1)\cdots(y-k+1).$$

Für $k=1$ und 2 bestätigt man diese Gleichung sofort; ihre allgemeine Gültigkeit ergiebt sich durch den Schluss der vollständigen Induction.

Man nehme nun speciell $x=\sigma+1$, $y=\varrho_1$ und benutze die letzte Gleichung zur Entwicklung des Productes unter dem Summenzeichen der Gleichung (12). Diese Gleichung (12) geht hierbei anders angeordnet über in die Gestalt:

$$\left[p^{(n)}+\varrho_1 p^{(n-1)}+\varrho_1(\varrho_1-1)p^{(n-2)}+\cdots+\varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+1)p^{(0)}\right]$$
$$+\Big[p^{(n-1)}+\binom{2}{1}\varrho_1 p^{(n-2)}+\binom{3}{2}\varrho_1(\varrho_1-1)p^{(n-3)}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{n}{n-1}\varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+2)p^{(0)}\Big](\sigma+1)$$
$$+\Big[p^{(n-2)}+\binom{3}{1}\varrho_1 p^{(n-3)}+\binom{4}{2}\varrho_1(\varrho_1-1)p^{(n-4)}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{n}{n-2}\varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+3)p^{(0)}\Big](\sigma+1)\sigma$$
$$+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\left[p^{(1)}+\binom{n}{1}\varrho_1 p^{(0)}\right](\sigma+1)\,\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+3)$$
$$+p^{(0)}(\sigma+1)\sigma\cdots(\sigma-n+2)=0.$$

Der hier in der ersten grossen Klammer stehende Ausdruck verschwindet, da ϱ_1 der Gleichung (7) genügt. Die in den folgenden grossen Klammern stehenden Summen sind zufolge (10) der Reihe nach gleich $\bar{p}^{(n-1)}, \bar{p}^{(n-2)}, \ldots, \bar{p}^{(0)}$. Nach Forthebung des Factors $(\sigma+1)$ geht somit unsere Gleichung über in:

$$\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+2)\bar{p}^{(0)}+\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+3)\bar{p}^{(1)}+\cdots$$
$$\cdots+\sigma\,\bar{p}^{(n-2)}+\bar{p}^{(n-1)}=0.$$

Der Vergleich mit Gleichung (11) ergiebt unmittelbar das Theorem: *Die zur reducierten Differentialgleichung* $(n-1)^{ter}$ *Ordnung gehörende determinierende Gleichung* (11) *hat die* $(n-1)$ *Wurzeln:*

$$(13) \qquad \varrho_2 - \varrho_1 - 1, \ \varrho_3 - \varrho_1 - 1, \cdots, \ \varrho_n - \varrho_1 - 1,$$

unter $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ *die Wurzeln der ursprünglichen determinierenden Gleichung* (7) *verstanden.*

§ 11. Convergenztheorem für die Umgebung eines irregulären Punktes z_0.

Soll die determinierende Gleichung, welche zu einem isoliert liegenden irregulären Punkte z_0 gehört, vom n^{ten} Grade sein, so muss der Anfangscoefficient $p^{(0)}$ von $\mathfrak{P}_0(\zeta)$ in unserer Differentialgleichung (1) pg. 370 von 0 verschieden sein. Trifft letzteres zu, so können wir die Differentialgleichung auch durch $\mathfrak{P}_0(\zeta)$ teilen, ohne dass sie ihre durch (1) pg. 370 charakterisierte Gestalt einbüsst; denn in diesem Falle sind die $\frac{\mathfrak{P}_k(\zeta)}{\mathfrak{P}_0(\zeta)}$ in der Umgebung von $\zeta = 0$, d. i. von $z = z_0$ sämtlich regulär. In der so zu gewinnenden Gleichung ist alsdann $\mathfrak{P}_0(\zeta)$ mit 1 identisch; doch dürfen wir der bequemern Schreibweise halber auch annehmen, $\mathfrak{P}_0(\zeta)$ sei mit der *von 0 verschiedenen Constanten* $p^{(0)}$ identisch. Trifft dies zu, so ist die determinierende Gleichung auch stets vom n^{ten} Grade.

Das im Anschluss an die Gleichung (1) pg. 368 ausgesprochene Theorem des § 9 können wir bei dieser Sachlage auch dahin formulieren, dass, falls alle Functionen $L(z - z_0)$ in den Darstellungen (4) pg. 365 bez. (5) pg. 367 unserer n Integrale bei $z = z_0$ frei von wesentlichen Singularitäten sein sollen, die determinierende Gleichung notwendig vom n^{ten} Grade sein muss. Wir sind jetzt im Stande auch die Umkehrung dieses Lehrsatzes zu beweisen.

Bereits im voraufgehenden Paragraphen bildeten wir unter (9) eine Reihe:

$$(1) \qquad \zeta^{\varrho_1}(a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots),$$

welche der Differentialgleichung formal genügte; dabei war unter ϱ_1 irgend eine Lösung der determinierenden Gleichung verstanden, welche von keiner anderen Wurzel dieser Gleichung um eine von 0 verschiedene positive ganze Zahl übertroffen werden sollte. Wir werden jetzt die Convergenz dieser Reihe (1) vermöge einer Entwicklung zeigen können, welche sich im Gedankengang sehr eng an die Convergenzuntersuchung von pg. 344 ff. anschliesst. Des besseren Überblicks halber gliedern wir die Betrachtung in mehrere Abschnitte.

I. Reduction auf den Fall $\varrho_1 = 0$.

Um die weiterhin anzustellenden Rechnungen zu vereinfachen,

setzen wir $Z = \zeta^{\varrho_1} \cdot Z'$ und rechnen unsere Differentialgleichung auf eine solche für Z' um, welche letztere dann durch:

(2) $$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots$$

formal befriedigt wird. Hierbei haben wir:

$$\frac{d^k Z}{dz^k} = \zeta^{\varrho_1}\frac{d^k Z'}{dz^k} + \binom{k}{1}\varrho_1\zeta^{\varrho_1-1}\frac{d^{k-1}Z'}{dz^{k-1}} + \cdots + \varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-k+1)\zeta^{\varrho_1-k}Z'$$

für $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ zu bilden, diese Gleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{P}_n(\zeta)$, $\zeta\mathfrak{P}_{n-1}(\zeta), \cdots, \zeta^{n-1}\mathfrak{P}_1(\zeta)$, $\zeta^n p^{(0)}$ zu multiplicieren und zu addieren. Es entspringt nach Forthebung des gemeinsamen Factors ζ^{ϱ_1} für Z' die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\zeta^n p^{(0)}\frac{d^n Z'}{dz^n} + \zeta^{n-1}\left[\mathfrak{P}_1 + \binom{n}{1}\varrho_1 p^{(0)}\right]\frac{d^{n-1}Z'}{dz^{n-1}}$$
$$+ \zeta^{n-2}\left[\mathfrak{P}_2 + \binom{n-1}{1}\varrho_1\mathfrak{P}_1 + \binom{n}{2}\varrho_1(\varrho_1-1)p^{(0)}\right]\frac{d^{n-2}Z'}{dz^{n-2}} + \cdots$$
$$+ [\mathfrak{P}_n + \varrho_1\mathfrak{P}_{n-1} + \cdots + \varrho_1(\varrho_1-1)\cdots(\varrho_1-n+1)p^{(0)}]\, Z' = 0.$$

Dieselbe ist wieder eine Gleichung vom Typus (1) pg. 370, und die in ihr auftretenden Potenzreihen $\mathfrak{P}_k'$ haben genau die schon in (10) pg. 373 berechneten Anfangscoefficienten $\bar{p}^{(0)}, \bar{p}^{(1)}, \cdots, \bar{p}^{(n-1)}$, während $\bar{p}^{(n)} = 0$ zutrifft.. Die zugehörige determinierende Gleichung ist:

$$\bar{p}^{(0)}\varrho'(\varrho'-1)\cdots(\varrho'-n+1)$$
$$+ \bar{p}^{(1)}\varrho'(\varrho'-1)\cdots(\varrho'-n+2) + \cdots + \varrho'\bar{p}^{(n-1)} = 0.$$

Nach dem Schlusstheorem des vorigen Paragraphen hat dieselbe die Lösungen $0, \varrho_2-\varrho_1, \varrho_3-\varrho_1, \cdots, \varrho_n-\varrho_1$, von denen zufolge der vorhin über ϱ_1 gemachten Annahme keine mit einer ganzen Zahl > 0 identisch ist.

Wir können nun unsere Convergenzbetrachtung auch an die Differentialgleichung für Z' und die Reihe (2) knüpfen, die ja von der Reihe (1) nur um einen Factor abweicht. Unter diesen Umständen können wir offenbar auch annehmen, dass die ursprüngliche determinierende Gleichung $\varrho_1 = 0$ zur Wurzel und also verschwindenden Coefficienten $p^{(n)}$ habe, während sie durch irgend eine ganze Zahl > 0 nicht befriedigt sein darf. Es ist nach den gegebenen Darlegungen ausreichend, für diesen Fall die Convergenz der formal befriedigenden Reihe (2) darzuthun.

II. Angaben über die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots$ und die Differentialgleichung.

Von den Coefficienten $a_0, a_1, \cdots$ ist der erste a_0 als eine beliebige von 0 verschiedene endliche Grösse wählbar; nach Auswahl von a_0

sind aber die $a_1, a_2, \cdots$ als endliche Grössen eindeutig bestimmt durch die Recursionsformel:

$$(3)\quad a_m G(m) + a_{m-1} G_1(m-1) \\ + a_{m-2} G_2(m-2) + \cdots + a_1 G_{m-1}(1) + a_0 G_m(0) = 0.$$

Da die Coefficienten $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, \cdots$ sämtlich verschwinden, und da auch das Absolutglied $p^{(n)}$ der determinierenden Gleichung gleich null ist, so hat man nach (4) pg. 371 als Definition der G:

$$(4)\quad G(m) = m(m-1)\cdots(m-n+1)\,p^{(0)} \\ + m(m-1)\cdots(m-n+2)\,p^{(1)} + \cdots + m p^{(n-1)},$$

$$(5)\quad G_i(m) = m(m-1)\cdots(m-n+2)\,p_i^{(1)} \\ + m(m-1)\cdots(m-n+3)\,p_i^{(2)} + \cdots + m\,p_i^{(n-1)} + p_i^{(n)}.$$

Die Differentialgleichung selbst ordnen wir jetzt so an:

$$(6)\quad \zeta^{n-1} p^{(0)} \frac{d^n Z}{dz^n} + \zeta^{n-2} p^{(1)} \frac{d^{n-1} Z}{dz^{n-1}} + \cdots + p^{(n-1)} \frac{dZ}{dz} \\ = \zeta^{n-1} \frac{p^{(1)} - \mathfrak{P}_1(\zeta)}{\zeta} \frac{d^{n-1} Z}{dz^{n-1}} + \cdots + \zeta \frac{p^{(n-1)} - \mathfrak{P}_{n-1}(\zeta)}{\zeta} \frac{dZ}{dz} - \frac{\mathfrak{P}_n(\zeta)}{\zeta} Z.$$

Bei dieser Anordnung sind links diejenigen Coefficienten p untergebracht, welche in $G(m)$ enthalten sind; die an den $G_1(m), G_2(m), \cdots$ beteiligten Coefficienten p stehen sämtlich rechts. Die Ausdrücke $\zeta^{-1}(p^{(k)} - \mathfrak{P}_k(\zeta))$ sind für alle $k = 1, 2, \cdots, n$ bei $\zeta = 0$ regulär und stellen Potenzreihen in ζ dar, welche sämtlich innerhalb eines Kreises um $\zeta = 0$ convergieren, der bis an den nächsten irregulären Punkt der Differentialgleichung gerade heranreicht.

Wir wählen jetzt irgend einen speciellen Punkt ζ innerhalb dieses Kreises, um für dieses ζ die Convergenz der Reihe (2) zu prüfen.

III. Betrachtung einer Hilfsdifferentialgleichung.

Wie pg. 345 beruht die Weiterführung der Untersuchung auf der Betrachtung einer speciellen Differentialgleichung, welche sich dem Ansatze (6) unterordnet, und für welche sich die Convergenz der formal befriedigenden Reihe leicht nachweisen lässt.

Für die Auswahl dieser Hilfsdifferentialgleichung soll erstlich massgeblich sein, dass ihre determinierende Gleichung n Wurzeln 0 haben soll. An Stelle von $p^{(0)}$ lassen wir irgend eine positive Zahl q treten, die wir jedoch mit Rücksicht auf einen weiter unten zu ziehenden Schluss dem Intervall $0 < q < |p^{(0)}|$ entnehmen. Die $p^{(1)}, \cdots, p^{(n-1)}$ werden ersetzt durch $(n-1)$ Zahlen $q_1, \cdots, q_{n-1}$, die wir so wählen, dass die Gleichung:

$$(7)\quad q\sigma^n = q\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1) \\ + q_1\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+2)+\cdots+q_{n-1}\sigma$$

in σ identisch erfüllt ist. Die dieser Forderung entsprechenden $q_1, \cdots, q_{n-1}$ sind endlich und eindeutig bestimmt. Setzt man nämlich der Reihe nach $\sigma = 1, 2, \cdots, n-1$ ein, so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & q_{n-1} = q, \\ & 2q_{n-1} + 2\cdot 1\, q_{n-2} = 2^n q, \\ & 3q_{n-1} + 3\cdot 2\, q_{n-2} + 3\cdot 2\cdot 1\, q_{n-3} = 3^n q, \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ & (n-1)\,q_{n-1} + (n-1)(n-2)\,q_{n-2} + \cdots \\ & \qquad + (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\, q_1 = (n-1)^n q. \end{aligned}$$

Hieraus bestimmen sich die $q_{n-1}, q_{n-2}, \cdots, q_1$ als eindeutige endliche Zahlen. Setzen wir dieselben in (7) ein, so hat die Gleichung, die nach Fortnahme der beiden rechts und links auftretenden Glieder $q\sigma^n$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, die n Wurzeln $\sigma = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$; dieselbe gilt also identisch.

Die auf der rechten Seite der Differentialgleichung (6) stehenden Glieder sollen in folgender Art ersetzt werden. Da der ausgewählte Wert ζ im Innern des genannten Convergenzkreises liegt, so lässt sich eine positive Zahl r der Art auswählen, dass $|\zeta| < r$ und r kleiner als der Convergenzradius des fraglichen Kreises ist. Alsdann lässt sich eine endliche bestimmte Constante M in der Weise bestimmen, dass für sämtliche Punkte ζ auf dem Kreise des Radius r um $\zeta = 0$ die Ungleichungen:

$$\left|\frac{p^{(k)} - \mathfrak{P}_k(\zeta)}{\zeta}\right| < M \qquad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

gültig sind. Die Folge ist (cf. pg. 127), dass für die Coefficienten $p_i^{(k)}$ die Ungleichungen zutreffen:

$$(8)\qquad \left|p_i^{(k)}\right| < \frac{M}{r^{i-1}}, \qquad (i=1,2,3,\cdots);$$

somit werden die sämtlichen Coefficienten von $\zeta^{-1}(p^{(k)} - \mathfrak{P}_k(\zeta))$ absolut kleiner sein als die correspondierenden Coefficienten von:

$$\frac{M}{1-\frac{\zeta}{r}} = M + \frac{M}{r}\zeta + \frac{M}{r^2}\zeta^2 + \frac{M}{r^3}\zeta^3 + \cdots.$$

Wir bauen daraufhin unsere Hilfsdifferentialgleichung so auf:

$$(9)\qquad q\zeta^{n-1}\frac{d^nZ}{dz^n}+q_1\zeta^{n-2}\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}}+\cdots+q_{n-1}\frac{dZ}{dz}$$
$$=\frac{M}{1-\frac{\zeta}{r}}\left[\zeta^{n-1}\frac{d^{n-1}Z}{dz^{n-1}}+\zeta^{n-2}\frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}}+\cdots+Z\right].$$

Zufolge der identischen Relation (7) ist $q\sigma^n=0$ die determinierende Gleichung dieser Differentialgleichung. Es giebt demnach eine die letztere formal befriedigende Reihe:

$$(10)\qquad b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\cdots$$

mit $b_0 \neq 0$, die an Stelle der Reihe (2) tritt. Für die Coefficienten b haben wir zufolge (3), (4) und (5) die Recursionsformel:

$$b_mH(m)+b_{m-1}H_1(m-1)+b_{m-2}H_2(m-2)+\cdots+b_0H_m(0)=0,$$

wobei die H folgende Bedeutung haben:

$$H(m)=m(m-1)\cdots(m-n+1)\,q$$
$$+m(m-1)\cdots(m-n+2)\,q_1+\cdots+mq_{n-1},$$
$$H_i(m)=-\frac{M}{r^{i-1}}[m(m-1)\cdots(m-n+2)$$
$$+m(m-1)\cdots(m-n+3)+\cdots+m+1].$$

Mit Rücksicht auf die Identität (7) folgt $H(m)=qm^n$; weiter aber setzen wir:

$$-r^{i-1}H_i(m)=h_m,\quad h_m=M[m(m-1)\cdots(m-n+2)+\cdots+m+1],$$

wo die $h_0, h_1, h_2,\cdots$ offenbar lauter positive reelle Zahlen sind. Die Recursionsformel der b geht damit über in:

$$(11)\qquad b_mqm^nr^{m-1}=b_{m-1}h_{m-1}r^{m-1}$$
$$+b_{m-2}h_{m-2}r^{m-2}+\cdots+b_1h_1r+b_0h_0;$$

wählen wir b_0 reell und >0, so sind hiernach offenbar alle b reell und >0.

Die Convergenz der Reihe $(b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots)$ für den ausgewählten Wert ζ ist nun leicht beweisbar. Bilden wir die Recursionsformel (11), indem wir m durch $(m-1)$ ersetzen:

$$b_{m-1}q(m-1)^nr^{m-2}=b_{m-2}h_{m-2}r^{m-2}+\cdots+b_1h_1r+b_0h_0$$

und bringen diese Gleichung von (11) in Abzug, so folgt:

$$b_mqm^nr^{m-1}=b_{m-1}q(m-1)^nr^{m-2}+b_{m-1}h_{m-1}r^{m-1}$$

oder, da die b sämtlich >0 sind,

$$\frac{b_mr}{b_{m-1}}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^n+\frac{r}{q}\,\frac{h_{m-1}}{m^n}.$$

Nun ist h_{m-1} eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von m mit constanten, d. i. von m unabhängigen Coefficienten; es folgt

$$\lim_{m=\infty}.\left(\frac{h_{m-1}}{m^n}\right)=0 \quad \text{und also} \quad \lim_{m=\infty}.\left(\frac{b_m r}{b_{m-1}}\right)=1.$$

Für unser ζ, dessen absoluter Betrag $|\zeta|<r$ ist, wird demnach die Reihe (10) convergent sein.

IV. Convergenz der Reihe $(a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots)$.

Wir vergleichen jetzt unsere Reihe (2) mit der als convergent erkannten Reihe (10). Lässt sich zeigen, dass die Ungleichungen $|a_0|<b_0, |a_1|<b_1, |a_2|<b_2, \cdots$ ohne Ausnahme gültig sind, so ist die Reihe (2) sicher auch convergent.

Nun können wir jedenfalls, wenn m ein endlicher, übrigens aber beliebig gewählter Index ist, die m Ungleichungen:

$$(12) \qquad |a_0|<b_0,\ |a_1|<b_1, \cdots,\ |a_{m-1}|<b_{m-1}$$

bereits als erfüllt ansehen. Es sind nämlich die Quotienten $\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \cdots, \frac{b_{m-1}}{b_0}$ reelle Zahlen >0, die bei Angabe der Differentialgleichung (9) eindeutig bestimmt sind. Die $(m-1)$ Zahlen $b_1, b_2, \cdots, b_{m-1}$ sind dieserhalb als mit b_0 proportional zu bezeichnen, und wir können b_0 als positive Zahl ohne Mühe so gross wählen, dass die $b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}$ bez. die m Beträge $|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{m-1}|$ übertreffen.

Bei zweckmässig gewähltem m gelingt von hieraus der Beweis der nächstfolgenden Ungleichung $|a_m|<b_m$.

Da nämlich die Coefficienten $-p_i^{(k)}$ der auf der rechten Seite von (6) stehenden Potenzreihen bei der Hilfsdifferentialgleichung (9) durch positive, die Beträge $|p_i^{(k)}|$ bez. übertreffende Zahlen ersetzt sind, so gilt:

$$|G_i(m)|<-H_i(m).$$

Die Gleichung:

$$|a_m G(m)|=|a_{m-1}G_1(m-1)+a_{m-2}G_2(m-2)+\cdots+a_0 G_m(0)|,$$

liefert demgemäss mit Rücksicht auf (12) und die Recursionsformel der b:

$$|a_m G(m)|<-b_{m-1}H_1(m-1)-b_{m-2}H_2(m-2)-\cdots-b_0 H_m(0),$$

$$|a_m|\cdot|G(m)|<b_m H(m),$$

$$(13) \qquad |a_m|\cdot|G(m)|<b_m q m^n.$$

Aus Gleichung (4) ergiebt sich nun:

$$\lim_{m=\infty}.\left(\frac{G(m)}{m^n}\right)=p^{(0)}.$$

Da andrerseits $|p^{(0)}| > q$ zutrifft, so lässt sich eine hinreichend grosse, aber endliche Zahl m derart wählen, dass:

$$|G(m)| > qm^n, \quad |G(m+1)| > q(m+1)^n, \quad |G(m+2)| > q(m+2)^n, \cdots$$

gilt. Die erste dieser Ungleichungen gestattet aus (13) die Folgerung zu ziehen, dass auch $|a_m| < b_m$ ist. Die weiter folgenden Ungleichungen erlauben, indem man die vorstehende Überlegung inductiv auf immer höhere Werte m ausdehnt, entsprechend den Schluss auf:

$$|a_{m+1}| < b_{m+1}, \quad |a_{m+2}| < b_{m+2}, \cdots.$$

Indem hiermit die Convergenz der Reihe (2) sicher gestellt ist, haben wir folgendes fundamentale Convergenztheorem bewiesen: *Ist die determinierende Gleichung, die zum irregulären Punkte z_0 gehört, vom n^{ten} Grade, so correspondiert jeder Wurzel ϱ_1 dieser Gleichung, die von keiner weiteren Wurzel $\varrho_2, \cdots$ der letzteren um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, ein Integral:*

$$(14) \qquad Z_1 = (z - z_0)^{\varrho_1}[a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots],$$

wobei a_0 als endliche, nicht-verschwindende Grösse willkürlich wählbar ist, während $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots$ eindeutig bestimmt sind; die in (14) rechter Hand stehende Reihe ist aber convergent innerhalb eines Kreises um z_0, der bis an den nächsten irregulären Punkt heranreicht.

V. Vollständige Integration der Differentialgleichung für die Umgebung des irregulären Punktes z_0.

Giebt es eine Lösung ϱ_2 der determinierenden Gleichung, für welche $(\varrho_2 - \varrho_1)$ eine ganze (nicht-positive) Zahl ist, so reduciere man nach pg. 357 die gegebene Differentialgleichung auf eine solche der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die zugehörige in (11) pg. 373 dargestellte determinierende Gleichung ist vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade; dieselbe besitzt eine grösste ganzzahlige Lösung $\bar{\varrho}_1$, die jedoch $\leqq -1$ ist. Aus dem eben gewonnenen Theorem entspringt die Existenz eines zugehörigen Integrals:

$$\bar{Z}_1 = (z - z_0)^{\bar{\varrho}_1}[\bar{a}_0 + \bar{a}_1(z - z_0) + \bar{a}_2(z - z_0)^2 + \cdots],$$

und wir gelangen von hieraus vermöge der Entwicklungen von pg. 366 zu einem Integrale:

$$Z_2 = (z - z_0)^{\varrho_1}[L_{21} + \log(z - z_0) L_{22}],$$

wo L_{21} und L_{22} bei $z = z_0$ nicht wesentlich singulär, d. i. höchstens polar unstetig sind.

Hat die determinierende Gleichung der reducierten Differentialgleichung noch weitere ganzzahlige Wurzeln $\bar{\varrho}$, so fahre man nach Vorschrift von pg. 366 im Reductionsprocess fort und gelangt offenbar

schliesslich zu folgendem Theorem: *Ist die determinierende Gleichung der ursprünglichen Differentialgleichung vom n^{ten} Grade und hat dieselbe die l Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_l$, welche von ϱ_1 um ganze (nicht-positive) Zahlen differieren, so gehört zu diesen Wurzeln ein Teilsystem* (5) *pg.* 367 *von Integralen, in denen die sämtlichen $L(z-z_0)$ bei z_0 regulär sind oder höchstens polar unstetig werden.*

Da man offenbar die rückständigen Wurzeln der determinierenden Gleichung gerade so behandeln kann, *so wird der eben ausgesprochene Satz, dass nämlich die $L(z-z_0)$ bei z_0 höchstens polar unstetig werden, von allen Integralen des zum irregulären Punkte z_0 gehörenden Fundamentalsystems gelten.* Die Umkehrung des in der Gleichung (1) pg. 368 zum Ausdruck kommenden Theorems ist demnach bewiesen.

§ 12. Beispiel der Kugelfunctionen $P_n(\mu)$.

Vor weiteren Bemerkungen über diejenigen irregulären Punkte, deren determinierende Gleichungen den n^{ten} Grad nicht erreichen, sollen Beispiele und Anwendungen der bisherigen Entwicklungen eingeschaltet werden.

Die pg. 32 ff. betrachteten Kugelfunctionen $P_n(\cos\vartheta)$ oder kurz $P_n(\mu)$, deren einzelne eine gewisse rationale ganze Function n^{ten} Grades war, erwiesen sich für alle $n = 1, 2, 3, \cdots$ als Integrale der in (3) pg. 34 dargestellten linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Schreiben wir im Anschluss an unsere gegenwärtige Bezeichnung $\mu = z$ und $P_n = Z$, so wird für das einzelne n die fragliche Differentialgleichung die Gestalt annehmen:

$$(1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2Z}{dz^2} - 2z\frac{dZ}{dz} + n(n+1)Z = 0.$$

Wollen wir die voraufgehend entworfene Theorie auf dieses Beispiel in Anwendung bringen, so entspringt als erster Satz der, *dass der Regularitätsbereich aus der einfach bedeckten z-Ebene, abgesehen von den drei irregulären Punkten $z = +1$, $z = -1$, $z = \infty$ besteht.*

Der Punkt $z = 0$ ist hiernach ein regulärer. Um ein canonisches Fundamentalsystem für die Umgebung dieses Punktes zu gewinnen (cf. pg. 348), bringen wir Gleichung (1) auf die Form:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = 2(z + z^3 + z^5 + \cdots)\frac{dZ}{dz} - n(n+1)(1 + z^2 + z^4 + \cdots)Z$$

und verfahren nach Vorschrift von § 2 pg. 343 ff. *Als canonisches Fundamentalsystem für die Umgebung des regulären Punktes $z = 0$ gewinnt man:*

$$(2)\quad \begin{cases} Z_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} z^2 + \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{4!} z^4 \\ \qquad - \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)(n-4)(n+5)}{6!} z^6 + \cdots, \\ Z_2 = z - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} z^3 + \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{5!} z^5 \\ \qquad - \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)(n-5)(n+6)}{7!} z^7 + \cdots. \end{cases}$$

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, bricht die erste oder zweite dieser Reihen beim Gliede mit z^n ab und stellt somit eine rationale ganze Function n^{ten} Grades dar, die dann bis auf einen constanten Factor mit der aus (5) pg. 35 zu entnehmenden Function $P_n(z)$ identisch ist. Die andere Reihe (1) ist indessen jedesmal, d. i. bei jedem n, eine unendliche, deren Convergenzkreis der Kreis vom Radius 1 um $z = 0$ ist.

Um die Integrale unserer Differentialgleichung bei $z = \infty$ zu untersuchen, setzen wir $\zeta = \frac{1}{z}$ und transformieren die Differentialgleichung nach pg. 353 auf ζ als unabhängige Variabele. Dabei nimmt sie die Gestalt an:

$$(3)\qquad \zeta^2(1-\zeta^2)\frac{d^2Z}{d\zeta^2} - 2\zeta^3\frac{dZ}{d\zeta} - n(n+1)Z = 0.$$

Hiernach ist der dem Werte $z = \infty$ correspondierende Punkt $\zeta = 0$ ein irregulärer, und die ihm zugehörige determinierende Gleichung:

$$\varrho(\varrho - 1) - n(n+1) = 0$$

hat die beiden Wurzeln:

$$\varrho_1 = n + 1, \quad \varrho_2 = -n.$$

Da diese Wurzeln eine ganzzahlige Differenz liefern, so können wir zunächst nur erst für die grössere unter ihnen $\varrho_1 = n + 1$ ein Integral von der Gestalt (1) pg. 375 ansetzen. Die Recursionsformel für die Coefficienten führt auf die Reihe:

$$(4)\quad \zeta^{n+1}\left[1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^2 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\zeta^4 + \cdots\right].$$

*Diese Reihe ist für alle Werte ζ mit $|\zeta| < 1$ convergent und stellt bis auf einen constanten Factor als Function von z die sogen. Kugelfunction „zweiter Art“ der Ordnung n dar**). Neben dieses Integral tritt als von demselben linear unabhängig das zu $\varrho_2 = -n$ gehörende *rationale* Integral:

---

*) Siehe z. B. das pg. 26 genannte Handbuch der Kugelfunctionen von Heine, Bd. 1 pg. 125.

$$(5) \quad = \zeta^{-n}\left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\zeta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\zeta^4 - \cdots\right],$$

welches wieder bis auf einen constanten Factor unsere Kugelfunction „erster Art“ P_n liefert. Bei Durchführung des Integrationsprocesses nach den pg. 381 gegebenen Vorschriften wird somit das logarithmische Glied ausfallen.

Wir führen endlich noch die Untersuchung für den irregulären Punkt $z = 1$ durch. Setzen wir demnach jetzt $\zeta = z - 1$, so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an:

$$(6) \qquad \zeta^2(2+\zeta)\frac{d^2Z}{dz^2} + \zeta(2+2\zeta)\frac{dZ}{dz} - n(n+1)\zeta Z = 0,$$

während die determinierende Gleichung $\varrho^2 = 0$ wird. Wir gewinnen aus den Recursionsformeln von pg. 371 demnach nur erst ein Integral:

$$(7) \quad 1 + \frac{n(n+1)}{2}\zeta + \frac{n(n+2)}{2^2}\cdot\frac{n^2-1^2}{(2!)^2}\zeta^2 + \frac{n(n+3)}{2^3}\cdot\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{(3!)^2}\zeta^3 + \cdots,$$

eine Reihe, die bei ζ^n aufhört und demnach wieder unser *rationales* Integral liefert. Die Gewinnung eines zweiten hiervon unabhängigen Integrales nach pg. 381 würde bereits etwas umständliche Rechnungen nötig machen.

Aufgabe 1. Man discutiere die Entwicklungen des vorliegenden Paragraphen für den Fall negativer ganzzahliger Werte n.

Aufgabe 2. Es soll die Differentialgleichung der Cylinderfunctionen (cf. (5) pg. 63):

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2} + z\frac{dZ}{dz} + (z^2 - n^2)Z = 0$$

einer entsprechenden Discussion unterzogen werden, wie die obige Differentialgleichung (1) der Kugelfunctionen P_n.

§ 13. Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung durch Reihen.

Ein besonders interessantes und beziehungsreiches Beispiel zu der entwickelten Theorie der linearen Differentialgleichungen liefert die sogen. „*hypergeometrische Differentialgleichung*“:

$$(1) \qquad z(z-1)\frac{d^2Z}{dz^2} + [(\alpha+\beta+1)z - \gamma]\frac{dZ}{dz} + \alpha\beta Z = 0.$$

Die Differentialgleichung trägt diesen Namen, weil sie durch die hypergeometrische Reihe:

$$(2) \quad Z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \cdots$$

befriedigt wird. Für diese Reihe hat Gauss die Bezeichnung $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ eingeführt, die weiterhin benutzt werden soll. Die Convergenz der

Reihe (2) hat Gauss in seiner classischen Arbeit „*Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.*“ *) untersucht; diese Untersuchung ist fortgesetzt in der nachgelassenen Abhandlung „*Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis*“ **).

Von späteren Untersuchungen, welche unseren Gegenstand betreffen, sind vor allem diejenigen Kummer's „*Über die hypergeometrische Reihe*“ ***) sowie Riemann's „*Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ darstellbaren Functionen*“ zu nennen †). Kummer knüpft an die Differentialgleichung (1) an, während Riemann, seinen allgemeinen functionentheoretischen Principien getreu, bei beliebigem complexen z die Integralfunctionen von (1) aus ihren wesentlichen Eigenschaften erklärt und an die Spitze der Betrachtung stellt.

Die Grössen α, β, γ in (1) und (2) mögen als reell angenommen werden und sollen späterhin in noch speciellerer Weise fixiert werden. Den Fall aber, dass γ gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist, bringen wir gleich anfangs zum Ausschluss, da in diesem Falle die Reihe (2) offenbar ihre Brauchbarkeit verlieren würde.

Um jetzt sogleich allgemeine Sätze über die Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung aufzustellen, bemerken wir, *dass der zugehörige Regularitätsbereich aus der ganzen z-Ebene abgesehen von den drei irregulären Punkten $z = 0, 1, \infty$ besteht.*

Ist demnach erstlich z_0 irgend ein von $0, 1, \infty$ verschiedener Wert des Argumentes, so haben wir *für die Umgebung von z_0 ein Fundamentalsystem von Integralen* (cf. (1) pg. 347):

$$(3)\quad \begin{cases} Z_1 = 1 + G_0^{(0)}(z-z_0)^2 + G_0^{(1)}(z-z_0)^3 + G_0^{(2)}(z-z_0)^4 + \cdots, \\ Z_2 = (z-z_0) + G_1^{(0)}(z-z_0)^2 + G_1^{(1)}(z-z_0)^3 + G_1^{(2)}(z-z_0)^4 + \cdots, \end{cases}$$

wo sich die rechts auftretenden Coefficienten G nach pg. 344 berechnen. Die rechts in (3) stehenden Reihen sind jedenfalls beide innerhalb eines Kreises um z_0 convergent, der bis an den nächsten unter den Punkten 0, 1 gerade heranreicht.

Der irreguläre Punkt $z = 0$ hat die determinierende Gleichung:

$$\varrho(\varrho - 1) + \gamma\varrho = 0$$

mit den beiden Wurzeln $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 1 - \gamma$. Ist γ nicht ganzzahlig, so gehören zu diesen Wurzeln zwei linear unabhängige Integrale der

*) Abhandlungen der Göttinger Gesellsch. der Wiss. von 1813, ges. Werke, Bd. 3 pg. 123.

**) Ges. Werke, Bd. 3 pg. 207.

***) Crelle's Journ. f. Math. Bd. 15 (1836).

†) Abhandl. der Göttinger Gesellsch. der Wiss. von 1857, ges. Werke, pg. 62.

Gestalt (14) pg. 381. Für $\varrho_1 = 0$ kommen wir hierbei direct zu der in (2) gegebenen hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ zurück. Zur Gewinnung des zweiten Integrales tragen wir $Z = z^{1-\gamma} \cdot Z'$ in die Differentialgleichung ein, welche sich daraufhin in folgende Gestalt umrechnet:

$$z(z-1)\frac{d^2Z'}{dz^2} + [(\alpha+\beta-2\gamma+3)z-(2-\gamma)]\frac{dZ'}{dz} + (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)Z' = 0.$$

Dies ist wieder eine hypergeometrische Differentialgleichung, in welcher an Stelle der bisherigen α, β, γ getreten sind:

$$\alpha' = \alpha - \gamma + 1, \quad \beta' = \beta - \gamma + 1, \quad \gamma' = 2 - \gamma.$$

Demnach befriedigt $Z' = F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z)$ die transformierte Gleichung. *Ist γ nicht ganzzahlig, so wird für den irregulären Punkt $z = 0$ ein canonisches Fundamentalsystem durch:*

$$(4) \qquad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ Z_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z) \end{cases}$$

geliefert, wo die rechts gegebenen Reihen innerhalb des Kreises vom Radius 1 um $z = 0$ beide convergieren.

Ist γ ganzzahlig (positiv), so wird $(\varrho_1 - \varrho_2)$ ganzzahlig und ≥ 0. Demnach bleibt das Integral $Z_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ bestehen (cf. pg. 381).

Aber es wird für $\gamma = 1$ offenbar Z_2 mit Z_1 identisch, während für $\gamma = 2, 3, 4, \cdots$ die in (4) auf der rechten Seite der zweiten Formel gegebene Reihe wegen des verschwindenden bez. negativen ganzzahligen Wertes von $\gamma' = 2 - \gamma$ unbrauchbar wird. Jetzt wird man somit nach den allgemeinen Regeln von pg. 381 ein zweites von Z_1 unabhängiges Integral herstellen müssen.

Im Falle $\gamma = 1$, der unten besonders zur Verwendung kommt, gelangt man nach Borchardt*) durch folgenden Grenzübergang zur Kenntnis eines zweiten Integrals Z_2. Ist $1 - \gamma = \delta$ und δ zunächst von 0 verschieden, so hat man zufolge (4) in:

$$\frac{1}{\delta}[z^\delta F(\alpha+\delta, \beta+\delta, 1+\delta; z) - F(\alpha, \beta, 1-\delta; z)]$$

ein von Z_1 unabhängiges Integral. Hier wolle man jetzt den Grenzübergang lim. $\delta = 0$ vollziehen; man gelangt offenbar zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}[z^t F(\alpha+t, \beta+t, 1+t; z)] + \frac{\partial}{\partial t} F(\alpha, \beta, 1+t; z),$$

wo nach Ausführung der Differentiation $t = 0$ zu setzen ist. Wir erhalten auf diese Weise den Ausdruck:

*) Im Journal für Mathem. Bd. 57, pg. 81.

$$\log z \cdot F(\alpha, \beta, 1; z) + F_1(\alpha, \beta; z),$$

wobei $F_1(\alpha, \beta; z)$ folgende Reihe bedeutet:

$$(5)\quad F_1(\alpha, \beta; z) = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot 1}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2\right) z$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) z^2$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) z^3 + \cdots.$$

In der That gewinnt man diese Reihenentwicklung auch vermöge der allgemeinen unter V pg. 381 entwickelten Methoden. Merken wir somit an: *Ist $\gamma = 1$, so hat man für die Umgebung des irregulären Punktes $z = 0$ ein canonisches Fundamentalsystem in:*

$$(6)\quad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, 1; z), \\ Z_2 = \log z \cdot F(\alpha, \beta, 1; z) + F_1(\alpha, \beta; z). \end{cases}$$

Um die beiden anderen irregulären Punkte entsprechend zu behandeln, schicken wir einige Bemerkungen über die *„lineare Transformation der hypergeometrischen Functionen“* voraus, verweisen jedoch wegen einer ausführlicheren Behandlung dieses Gegenstandes auf die pg. 385 genannte Abhandlung Kummer's. Es giebt insgesamt sechs lineare Substitutionen von z, nämlich:

$$(7)\quad z' = z,\ z' = 1 - z,\ z' = \frac{1}{z},\ z' = \frac{1}{1-z},\ z' = \frac{z-1}{z},\ z' = \frac{z}{z-1},$$

deren jede einzelne die Eigenschaft hat, das System der drei irregulären Punkte $0, 1, \infty$ in sich zu transformieren. Es besteht nun der wichtige Satz: *Für jede einzelne dieser sechs Substitutionen können wir (und zwar noch in zwei Weisen) ein Exponentenpaar m, n derart bestimmen, dass:*

$$Z' = z^m (1 - z)^n Z$$

in Abhängigkeit von z' wieder einer hypergeometrischen Differentialgleichung genügt.

Wir entnehmen hieraus für spätere Folgerungen vor allem die Erkenntnis, *dass die drei irregulären Punkte als coordiniert anzusehen sind.* Das aufgestellte Transformationstheorem soll hier nicht allgemein bewiesen werden; doch wird es sich bei den weiterhin zur Untersuchung kommenden Fällen unmittelbar bewähren. Eine ausführliche Betrachtung widmen wir an dieser Stelle nur erst der zweiten und dritten Substitution (7).

Erstlich transformiert sich unsere Differentialgleichung durch die Substitution $z' = 1 - z$, $Z' = Z$ in:

$$z'(z'-1)\frac{d^2Z'}{dz'^2} + [(\alpha+\beta+1)z' - (\alpha+\beta-\gamma+1)]\frac{dZ'}{dz'} + \alpha\beta Z' = 0,$$

so dass man hat:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \alpha + \beta - \gamma + 1.$$

Hier würden also die im obigen Theoreme genannten Exponenten m, n in einfachster Weise übereinstimmend den Wert null haben.

Verfolgen wir jetzt etwa allein den Fall, dass die Wurzeln der zum Punkte $z = 1$ gehörenden determinierenden Gleichung keine ganzzahlige Differenz besitzen, so entspringt mit Rücksicht auf (4) unmittelbar als Ergebnis: *Für den irregulären Punkt $z = 1$ hat man als canonisches Fundamentalsystem:*

$$(8) \quad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z), \\ Z_2 = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z). \end{cases}$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die hier definierten Functionen Z_1, Z_2 keineswegs mit den in (4) bez. (6) so bezeichneten Functionen identisch zu sein brauchen. Vielmehr werden sich nach den allgemeinen Regeln von pg. 354 ff. die Integralsysteme (8) und (4) bez. (6) gegenseitig linear und homogen in einander darstellen lassen. Wir kommen hierauf weiter unten zurück.

Zur Erledigung des irregulären Punktes ∞ bedienen wir uns der dritten Substitution (7), indem wir setzen: $z' = z^{-1}$, $Z' = z^{\alpha} Z$. Es ergiebt sich als transformierte Differentialgleichung:

$$z'(z'-1)\frac{d^2Z'}{dz'^2} + [(2\alpha-\gamma+2)z - (\alpha-\beta+1)]\frac{dZ'}{dz'} + \alpha(\alpha-\gamma+1)Z' = 0$$

mit:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \alpha - \gamma + 1, \quad \gamma' = \alpha - \beta + 1.$$

Indem wir wieder den Fall, dass die Wurzeln der determinierenden Gleichung um eine ganze Zahl differieren, abseits lassen, haben wir als Ergebnis: *Für die Umgebung des irregulären Punktes ∞ haben wir als canonisches Fundamentalsystem der ursprünglichen Differentialgleichung:*

$$(9) \quad \begin{cases} Z_1 = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; \frac{1}{z}\right), \\ Z_2 = z^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1; \frac{1}{z}\right). \end{cases}$$

§ 14. Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale.

Die Functionen Z_1, Z_2, welche wir im vorigen Paragraphen als Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung gewannen, spielen in der neueren Functionentheorie eine so hervorragende Rolle, dass wir hier beiläufig noch eine Reihe weiterer Eigenschaften derselben entwickeln wollen.

Erstlich wollen wir nach Euler*) die Lösungen unserer Differentialgleichung *in Gestalt von bestimmten Integralen* angeben. Wir behaupten, *dass die unter der Voraussetzung* $\beta > 0$, $\gamma > \beta$ *durch das bestimmte Integral:*

$$(1) \qquad f(z) = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-zu)^{-\alpha}\,du$$

gegebene Function $f(z)$ *von* z *eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung* (1) *pg.* 384 *darstellt.* Dieses Integral möge etwa geradlinig von $u = 0$ bis $u = 1$ erstreckt sein, während der „Parameter“ z des Integrals einen beliebigen complexen Wert haben mag. Die Forderungen $\beta > 0$, $\gamma > \beta$ müssen einstweilen gestellt werden, weil sonst das Integral nicht bis an die Grenzen 0 und 1, ohne unstetig zu werden, erstreckt werden darf.

Wir beweisen die aufgestellte Behauptung zunächst in der Weise, dass wir obige Function $f(z)$ nach Potenzen von z in eine Reihe entwickeln, und setzen zu diesem Zwecke $|z| < 1$ voraus. Unter diesen Umständen dürfen wir nämlich schreiben:

$$(1-zu)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}zu + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}(zu)^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(zu)^3 + \cdots;$$

denn die rechts stehende Reihe ist im ganzen Integrationsintervall $0 \leqq u \leqq 1$ wegen $|z| < 1$ convergent. Tragen wir diese Reihe in (1) rechter Hand ein, so ist es erlaubt, gliedweise zu integrieren (cf. pg. 124). Es ergiebt sich unter Benutzung der Abkürzung:

$$(2) \qquad \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = B(p, q)$$

für $f(z)$ die Reihe:

---

*) Siehe die „*Institutiones calculi integralis*“ Bd. 2, Abschn. 1, Kapitel 10 und 11 (Petersburg, 1769).

$$(3)\quad f(z) = B(\beta, \gamma - \beta) + \frac{\alpha}{1} B(\beta + 1, \gamma - \beta)\, z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} B(\beta + 2, \gamma - \beta)\, z^2 + \cdots,$$

welche wieder für $|z| < 1$ convergent sein wird.

In (2) haben wir nun das sogen. *„Euler'sche Integral erster Art"* $B(p, q)$ vor uns, welches für $p > 0$, $q > 0$ einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Für die Weiterentwicklung von (3) haben wir eine Relation zwischen $B(p+1, q)$ und $B(p, q)$ nötig, welche zunächst abgeleitet werden soll. Durch partielle Integration findet man:

$$\int u^p (1-u)^{q-1}\, du = -\frac{1}{q} u^p (1-u)^q + \frac{p}{q} \int u^{p-1} (1-u)^q du$$

oder, wenn man im zweiten Gliede rechts $(1-u)^q$ in $(1-u)^{q-1} \cdot (1-u)$ spaltet und die ganze Gleichung mit q multipliciert:

$$(p+q) \int u^p (1-u)^{q-1} du = -u^p (1-u)^q + p \int u^{p-1} (1-u)^{q-1} du.$$

Trägt man die Grenzen 0 und 1 ein, so folgt die Recursionsformel:

$$(4)\qquad B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q),$$

welche für die Coefficienten der Reihe (3) die Regel ergiebt:

$$B(\beta + \nu + 1, \gamma - \beta) = \frac{\beta + \nu}{\gamma + \nu} B(\beta + \nu, \gamma - \beta).$$

Hiernach können wir der Formel (3) die Gestalt verleihen:

$$(5)\qquad f(z) = B(\beta, \gamma - \beta) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma; z).$$

Die Function $f(z)$ ist demgemäss bis auf einen constanten Factor mit $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ identisch, womit unsere obige Behauptung, die Function $f(z)$ sei eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung, ihre Bestätigung gefunden hat.

Durch Differentiation des Integrales (1) nach dem Parameter z können wir das in Rede stehende Theorem noch directer bestätigen. Wir finden hierbei:

$$f(z) = \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-zu)^{-\alpha} du,$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \alpha \int_0^1 u^{\beta} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-zu)^{-\alpha-1} du,$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \alpha(\alpha+1) \int_0^1 u^{\beta+1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-zu)^{-\alpha-2} du.$$

Multiplicieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha\beta$, $(\alpha+\beta+1)z-\gamma$, $z(z-1)$ und addieren, so kommt rechter Hand bei zweckmässiger Neuanordnung der unter dem Integral stehenden Glieder:

$$\alpha\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-zu)^{-\alpha-2}[\beta(1-u)(1-zu) + (\beta-\gamma)u(1-zu)+(\alpha+1)zu(1-u)]\,du$$

Dieses Integral lässt sich leicht weiter zusammenziehen und liefert:

$$z(z-1)\frac{d^2f(z)}{dz^2}+[(\alpha+\beta+1)z-\gamma]\frac{df(z)}{dz}+\alpha\beta f(z) = \alpha\int_0^1 d[u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta}(1-zu)^{-\alpha-1}].$$

Da aber $u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta}(1-zu)^{-\alpha-1}$ wegen $\gamma>\beta>0$ sowohl für $u=0$ als $u=1$ verschwindet, so ist die rechte Seite der letzten Gleichung mit 0 gleich, d. h. $f(z)$ befriedigt thatsächlich die hypergeometrische Differentialgleichung.

Diese letztere Beweismethode unseres Satzes ist wegen ihrer Verallgemeinerungsfähigkeit höchst wichtig. Wir setzen an Stelle des bisherigen reellen u die complexe Variabele $w=u+iv$ und bilden die Function:

(6) $$\Phi(w)=w^\beta(1-w)^{\gamma-\beta}(1-zw)^{-\alpha-1},$$

indem wir unter α, β, γ jetzt wieder *beliebige reelle Constante* verstehen. Diese Function kann irreguläre Stellen höchstens an den vier Punkten $w=0, 1, z^{-1}, \infty$ haben; sie wird des näheren bei $w=0$ verzweigt sein, wenn β keine ganze Zahl ist, und entsprechendes wird für $w=1, z^{-1}, \infty$ gelten. Wir denken etwa sogleich die Riemann'sche Fläche über der w-Ebene gebildet, auf welcher $\Phi(w)$ eine eindeutige Function ist. Dieselbe wird insbesondere eine *endlich-blättrige Riemann-sche Fläche* sein, wenn α, β, γ *rationale* Brüche sind; ist aber z. B. die Zahl β irrational, so ist bei $w=0$ jedes einzelne Blatt mit unendlich vielen weiteren verzweigt.

Wir bilden jetzt vermöge einer *Integrationscurve C, welche auf der gedachten Riemann'schen Fläche geschlossen ist, und welche die irregulären Punkte von $\Phi(w)$ meidet,* das Integral:

(7) $$f(z)=\int_{(C)} w^{\beta-1}(1-w)^{\gamma-\beta-1}(1-zw)^{-\alpha}\,dw$$

und behaupten, *dass die hierdurch dargestellte Function $f(z)$ von z ein Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung ist.* Der Vorteil

dieser Auffassungsweise gegenüber der Gleichung (1) ist in der freien Beweglichkeit von w in der Ebene bez. der Riemann'schen Fläche begründet. Wir können solcher Art die irregulären Stellen der unter dem Integral stehenden Function von w bei der Integration vermeiden; und wir haben vor allem wegen der Willkür in der Auswahl der Integrationscurve C nicht nur eine einzelne Function $f(z)$, wie in (1), sondern eine ganze Mannigfaltigkeit solcher Functionen in (7) definiert.

Der Beweis, dass $f(z)$ der hypergeometrischen Differentialgleichung genügt, wird ganz wie oben geführt, indem man das in (7) rechts stehende Integral nach dem Parameter z differenziert. Man findet wieder:

$$z(z-1)\frac{d^2f(z)}{dz^2}+[(\alpha+\beta+1)z-\gamma]\frac{df(z)}{dz}+\alpha\beta f(z)=\alpha\int\limits_{(C)}d\Phi(w).$$

Das rechts stehende Integral aber verschwindet, da die Curve C auf der Riemann'schen Fläche geschlossen ist.

Wie man die Curve C im einzelnen Falle wählen darf, hängt natürlich von der Gestalt der Riemann'schen Fläche der Function $\Phi(w)$ ab. Es verdient aber bemerkt zu werden, *dass der in Figur 88 skizzierte sog. „Doppelumlauf“ um die irregulären Stellen $w=0$ und $w=1$ stets einen auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Weg darstellt.* In der That besteht dieser Weg aus je zwei einfachen Umläufen um $w=0$ und $w=1$, und zwar wird dabei der einzelne diese Punkte das eine Mal im positiven Umlaufssinn (cf. pg. 111), das andere Mal im negativen umgangen. Indem wir aber z. B. $w=0$ im positiven Sinne umlaufen, werden wir von $\Phi(w)$ zu $e^{2i\pi\beta}\Phi(w)$ geführt; der Umlauf im negativen Sinne hebt den Factor $e^{2i\pi\beta}$ gerade wieder fort. Durch Ausdehnung der Überlegung auf den Punkt $w=1$ findet man, dass der „Doppelumlauf“ in der That immer zum Anfangswerte $\Phi(w)$ zurückführt*). Ist übrigens der Punkt $w=z^{-1}$ ein Verzweigungspunkt, d. h. ist α irrational, so hat man Sorge zu tragen, dass der Doppelumlauf den irregulären Punkt $w=z^{-1}$ nicht umschliesst.

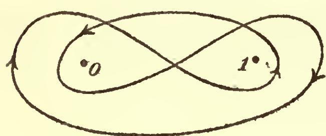


Fig. 88.

Aufgabe 1. Man specialisiere die Formel (1) pg. 389 sowie die sich anschliessenden Entwicklungen für die folgenden Werte $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$.

Aufgabe 2. Man verfolge entsprechend für Formel (1) pg. 389 den Fall $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}$, indem man zugleich z^2 an Stelle von z setzt.

*) Vergl. wegen des im Texte betrachteten Integrationsweges C. Jordan, *„Cours d'analyse“* t. 3 (1887), sowie die Abhandlungen von L. Pochhammer in den Bänden 35 ff. der Mathem. Annalen (1889—1890).

§ 15. Die Perioden des Legendre'schen Integrals erster Gattung als hypergeometrische Functionen.

Nehmen wir in den allgemeinen Formeln des vorigen Paragraphen für α, β, γ die Werte:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1,$$

so gelangen wir zu einem Specialfall, der wegen seiner Beziehung zur Theorie der elliptischen Functionen höchst interessant ist. Die Formel (7) pg. 391 nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(1) \qquad f(z) = \int_{(C)} \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)(1-zw)}},$$

und die zugehörige Riemann'sche Fläche wird zweiblättrig mit vier Verzweigungspunkten bei $w = 0, 1, z^{-1}, \infty$.

In (1) rechter Hand haben wir nun mit einem *elliptischen Integral erster Gattung* zu thun; und da die Curve C einen beliebigen geschlossenen Umlauf auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche darstellt, so liefert uns die Formel (1) nach dem pg. 207 ff. entwickelten Begriffe der Perioden *irgend eine Periode des gedachten Integrals.*

Des näheren gelangen wir zur Formel (1) sehr leicht vom Weierstrass'schen Normalintegral:

$$(2) \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}$$

aus. Setzen wir nämlich hier $t = e_1 + (e_3 - e_1)w$, so folgt, wenn wir wie pg. 235 für den Legendre'schen Integralmodul k^2 die Darstellung $k^2 = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}$ benutzen:

$$(3) \qquad \sqrt{e_2 - e_1} \int \frac{dt}{\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}} = \int \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)(1-k^2w)}}.$$

Die Perioden ω_1, ω_2 des Weierstrass'schen Integrals (2) liefern nun nach pg. 237 in:

$$2\omega_2 \sqrt{e_2 - e_1} = 4K, \quad \omega_1 \sqrt{e_2 - e_1} = 2iK'$$

die Perioden des Legendre'schen Normalintegrals. Durch Vergleich der Formeln (1) und (3) erkennen wir unmittelbar: *Die Perioden*

$$Z = 4mK + 2inK'$$

des Legendre'schen Normalintegrals erster Gattung genügen, in ihrer Abhängigkeit vom Integralmodul $z = k^2$ aufgefasst, der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$(4) \qquad z(z-1)\frac{d^2Z}{dz^2}+(2z-1)\frac{dZ}{dz}+\frac{1}{4}Z=0.$$

Die beiden Grössen K und K' stellen in Abhängigkeit von $z=k^2$ particuläre Integrale dar, die von einander linear unabhängig sind; anderenfalls hätte nämlich der Periodenquotient für alle Werte k^2 einen und denselben Wert, was doch nicht der Fall ist (cf. pg. 235). Durch das „Fundamentalsystem" (K, K') stellt sich daraufhin jedes Integral von (4) in der Gestalt (c_1K+c_2K') mit irgend welchen complexen Constanten c_1, c_2 dar. Man sieht, wie sich hier im speciellen die „Perioden" $(4mK+2inK')$ mit ganzzahligen m, n einordnen.

Unsere Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den pg. 269 gewonnenen Darstellungen von K und K':

$$(5) \qquad \begin{cases} K=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right], \\ K'=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k'^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k'^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k'^6+\cdots\right], \end{cases}$$

wo $k'^2=1-k^2$ der complementäre Modul ist. In der That haben wir ja hier direct die hypergeometrischen Reihen vor uns:

$$(6) \qquad K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right),\quad K'=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-k^2\right).$$

Die drei „irregulären" Stellen $z=0, 1, \infty$ liefern diejenigen drei Werte k^2, für welche eine „Ausartung" des elliptischen Integrals eintritt (cf. pg. 254). Übrigens hat für jeden dieser drei irregulären Punkte die zugehörige determinierende Gleichung zusammenfallende Wurzeln. Ein canonisches Fundamentalsystem für den einzelnen irregulären Punkt wird somit das Bildungsgesetz (6) pg. 387 befolgen. Wir können daraufhin anmerken: *K ist das „logarithmenfreie" Integral des canonischen Fundamentalsystems für die Umgebung von $z=0$; K' stellt das entsprechende Integral für die Umgebung von $z=1$ vor.*

Um K' in der Umgebung von $z=0$ darzustellen, bilden wir uns nach pg. 387 das Fundamentalsystem:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;z\right),\quad \log z\cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;z\right)+F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};z\right),$$

wobei F_1 explicite gegeben ist durch:

$$(7) \qquad F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};z\right)=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2z+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(1+\frac{1}{6}\right)z^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)z^3+\cdots\right].$$

Es gilt alsdann eine Darstellung:

$$K' = c_1 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z\right) + c_2 F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) + c_2 \log z \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z\right),$$

wo c_1 und c_2 zwei Constante sind. Hierfür können wir auch schreiben:

$$\pi K' = 2c_1 K + 2c_2 K \log k^2 + \pi c_2 F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2\right).$$

Für verschwindend kleines k können wir nun den sehr kleinen Wert $\pi F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2\right)$ neben dem sehr grossen Betrage $2K \log k^2$ vernachlässigen und bekommen als Näherungsformel:

$$\frac{\pi K'}{K} = 2c_1 + 2c_2 \log k^2.$$

Nun aber geht aus der Darstellung (9) pg. 235 von k^2 durch die Entwicklungsgrösse q für kleine Werte von k und q hervor:

$$k^2 = 16q + \cdots = 16e^{\pi i \omega} + \cdots = 16e^{-\frac{\pi K'}{K}} + \cdots.$$

Wir gewinnen so explicite als Näherungsformel:

$$\frac{\pi K'}{K} = 4 \log 2 - \log k^2,$$

woraus hervorgeht, dass $c_1 = 2 \log 2$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ ist. *Die Periode K' stellt sich als Function des Integralmoduls in der Umgebung von $k^2 = 0$ hiernach folgendermassen dar:*

$$(8)\quad K' = \left(2 \log 2 - \frac{1}{2} \log k^2\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right) - \frac{1}{2} F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2\right).$$

Aufgabe. Man führe eine entsprechende Untersuchung für die Perioden E, E' des elliptischen Integrals zweiter Gattung durch (cf. (8) pg. 252 sowie (4) pg. 271). Man hat hierbei $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ zu nehmen.

§ 16. Vieldeutigkeit der Integrale Z_1, Z_2 der hypergeometrischen Differentialgleichung.

Indem wir zur allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung (1) pg. 384 zurückkehren, wollen wir für ein beliebiges Fundamentalsystem (Z_1, Z_2) derselben die Regeln von pg. 354 ff. über analytische Fortsetzung specialisieren. Die unabhängige Variabele z deuten wir dabei zweckmässig auf der Kugelfläche, auf welcher wir uns sogleich die drei irregulären Stellen $z = 0, 1, \infty$ markieren.

Beschreibt man unter Vermeidung von $0, 1, \infty$ von irgend einem Ausgangspunkte z auf der z-Kugel einen geschlossenen Weg C zu jenem Punkte z zurück, so gehe hierbei (Z_1, Z_2) in (Z_1', Z_2') über. *Es werden*

sich alsdann die Integrale dieses neuen Fundamentalsystems (Z_1', Z_2') *nach pg.* 355 *in* (Z_1, Z_2) *vermöge einer linearen Substitution darstellen:*

$$(1) \qquad Z_1' = aZ_1 + bZ_2, \quad Z_2' = cZ_1 + dZ_2,$$

deren etwa durch D zu bezeichnende Determinante $D = ad - bc$ *von* 0 *verschieden ist.*

Die Substitution (1) ist dem Fundamentalsystem (Z_1, Z_2) und dem Umlauf C eigentümlich. Durchlaufen wir dieselbe geschlossene Curve C in entgegengesetzter Richtung, so stellt sich für das nämliche System (Z_1, Z_2) eine Substitution ein, welche wir als die zu (1) „*inverse*" Substitution bezeichnen. Um dieselbe zu bestimmen, beachte man, dass bei dem jetzt gemeinten Umlauf $(aZ_1 + bZ_2, cZ_1 + dZ_2)$ in (Z_1, Z_2) übergeht. Die Integrale Z_1, Z_2 gehen also in die aus:

$$aZ_1'' + bZ_2'' = Z_1, \quad cZ_1'' + dZ_2'' = Z_2$$

zu berechnenden Integrale Z_1'', Z_2'' über. *Die zu* (1) *inverse Substitution ist hiernach:*

$$(2) \qquad Z_1'' = \frac{dZ_1 - bZ_2}{D}, \quad Z_2'' = \frac{-cZ_1 + aZ_2}{D}.$$

Lässt sich die Curve C ohne Hinwegschiebung über eine der irregulären Stellen $0, 1, \infty$ auf einen regulären Punkt zusammenziehen, so ist $Z_1' = Z_1$, $Z_2' = Z_2$; wir haben dann in (1) die sogen. „identische Substitution" d. i. diejenige mit $a = d = 1$, $b = c = 0$.

Ein einmaliger Umlauf um $z = 0$ im positiven Sinne (cf. pg. 111) liefere für (Z_1, Z_2) eine Substitution, die wir symbolisch durch S_0 bezeichnen. Die entsprechenden Substitutionen für die irregulären Punkte $1, \infty$ mögen S_1, S_2 heissen. Explicite mögen diese Substitutionen so lauten:

$$(S_0) \qquad Z_1' = a_0Z_1 + b_0Z_2, \quad Z_2' = c_0Z_1 + d_0Z_2,$$

$$(S_1) \qquad Z_1' = a_1Z_1 + b_1Z_2, \quad Z_2' = c_1Z_1 + d_1Z_2,$$

$$(S_2) \qquad Z_1' = a_2Z_1 + b_2Z_2, \quad Z_2' = c_2Z_1 + d_2Z_2.$$

Natürlich sind hierbei die durch die einzelne Substitution entspringenden Z_1', Z_2' nicht mit den Z_1', Z_2' der anderen Substitutionen identisch.

Den in Figur 89 pg. 397 ausgezogenen Weg C wird man sofort als Combination der beiden einfachen Umläufe um 0 und 1 erkennen. Wir wollen die zugehörige Substitution berechnen. Da der Umlauf um $z = 0$ voransteht, so gelangen wir von (Z_1, Z_2) erstlich zu $(a_0Z_1 + b_0Z_2, c_0Z_1 + d_0Z_2)$. Der Umlauf um $z = 1$ bewirkt, dass die im letzteren Fundamentalsystem enthaltenen Z_1, Z_2 die Substitution S_1 erfahren,

d. h. durch $(a_1 Z_1 + b_1 Z_2, c_1 Z_1 + d_1 Z_2)$ zu ersetzen sind. Zum fraglichen Umlauf C gehört also folgende Substitution:

$$(3)\quad \begin{aligned} Z_1' &= (a_0 a_1 + b_0 c_1) Z_1 + (a_0 b_1 + b_0 d_1) Z_2, \\ Z_2' &= (c_0 a_1 + d_0 c_1) Z_1 + (c_0 b_1 + d_0 d_1) Z_2; \end{aligned}$$

wir sagen, dieselbe sei aus S_0 und S_1 zusammengesetzt, und wir bezeichnen sie symbolisch durch $S_0 \cdot S_1$. Man überlege, dass im all-

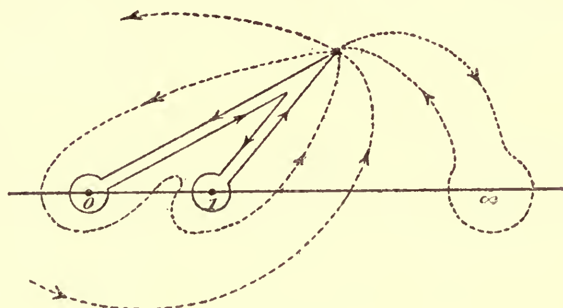


Fig. 89.

gemeinen bei einem solchen symbolischen Producte $S_0 \cdot S_1$ die Abänderung der Factorenfolge eine Änderung des Productes, d. i. der zusammengesetzten Substitution bewirkt. Üben wir auf Z_1, Z_2 in (3) irgend eine dritte Substitution aus, die wir S nennen, so werden wir die sich ergebende Substitution entsprechend durch $S_0 \cdot S_1 \cdot S$ bezeichnen und analog Producte mit beliebig hoher Factorenzahl herstellen.

Die in Figur 89 punktiert angedeuteten Umwandlungen des eben betrachteten Weges C zeigen, dass derselbe auf der z-Kugel ohne Hinwegschiebung über einen irregulären Punkt in einen einfachen Umlauf um $z = \infty$ im negativen Sinne umgestaltet werden kann. *Wir folgern ohne weiteres: Die in* (3) *angegebene Substitution* $S_0 \cdot S_1$ *ist mit der zu* S_2 *inversen Substitution identisch, und entsprechend ist offenbar* $S_1 \cdot S_2$ *invers zu* S_0, *sowie* $S_2 \cdot S_0$ *invers zu* S_1. —

Die Substitutionen S_0, S_1, S_2 haben nun noch eine weitergehende Bedeutung. Es gilt nämlich der wichtige Satz, dass jeder auf der z-Kugel geschlossene Weg in seiner Wirkung auf (Z_1, Z_2) durch eine Kette von einfachen Umläufen um die irregulären Punkte 0, 1, ∞ aufgefasst werden kann. Man wolle sich dies in der Weise klar machen, dass man einen gegebenen geschlossenen Weg zusammenzieht, ohne indessen eine Hinwegschiebung über irgend einen der drei irregulären Punkte zu gestatten. Hierbei verwandelt sich der Weg geradezu in eine Kette schleifenförmiger einfacher Umgänge um 0, 1, ∞. Ohne

dass wir hierbei ausführlich verweilen, bringen wir die in Figur 90 vollzogene Umgestaltung eines speciellen Weges als Beispiel für die auch in jedem anderen Falle vorliegenden Verhältnisse. Es kommen hier zunächst auch Umläufe im negativen Sinne um den einzelnen irregulären Punkt vor. Aber wir wissen bereits, dass der einzelne solche Umlauf als Aggregat zweier im positiven Sinne vollzogenen Umläufe um die beiden anderen irregulären Punkte angesehen werden kann. Es entspringt so der Satz: *Ein beliebiger auf der z-Kugel geschlossener Weg ergiebt für das Fundamentalsystem* (Z_1, Z_2) *eine Substitution, welche durch Zusammensetzung aus den drei Substitutionen* S_0, S_1, S_2 *gewonnen werden kann.* In diesem Sinne heissen S_0, S_1, S_2 die zum Fundamentalsystem (Z_1, Z_2) gehörenden *„erzeugenden Substitutionen"*.

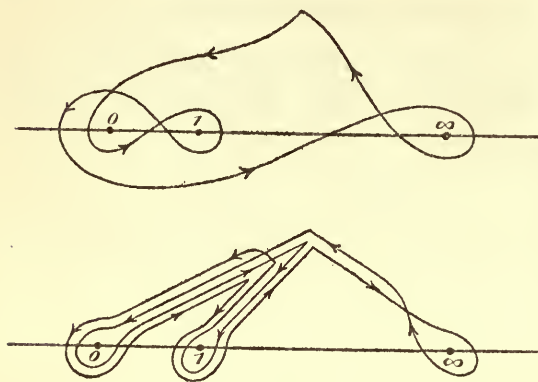


Fig. 90.

Die wirkliche Berechnung der einzelnen erzeugenden Substitution, d. i. die Angabe ihrer Coefficienten, ist zunächst für das canonische Fundamentalsystem des zugehörigen irregulären Punktes äusserst einfach. Für das System (4) pg. 386 lautet S_0:

$$(4) \qquad Z_1' = Z_1, \quad Z_2' = e^{2i\pi(1-\gamma)} Z_2,$$

während im Falle $\gamma = 1$ (cf. (6) pg. 387) sich findet:

$$(5) \qquad Z_1' = Z_1, \quad Z_2' = 2i\pi Z_1 + Z_2.$$

Ist aber $(\overline{Z}_1, \overline{Z}_2)$ ein beliebiges Fundamentalsystem, so werden wir dasselbe zunächst im canonischen System (Z_1, Z_2) darstellen:

$$(6) \qquad \overline{Z}_1 = AZ_1 + BZ_2, \quad \overline{Z}_2 = CZ_1 + DZ_2.$$

Wir berechnen dann z. B. im Falle eines nicht ganzzahligen γ als Substitution S_0 für $(\overline{Z}_1, \overline{Z}_2)$:

$$\overline{Z}_1' = \frac{AD - BCe^{2i\pi(1-\gamma)}}{\varDelta}\overline{Z}_1 + \frac{AB\left(e^{2i\pi(1-\gamma)} - 1\right)}{\varDelta}\overline{Z}_2,$$

$$\overline{Z}_2' = \frac{CD\left(1 - e^{2i\pi(1-\gamma)}\right)}{\varDelta}\overline{Z}_1 + \frac{ADe^{2i\pi(1-\gamma)} - BC}{\varDelta}\overline{Z}_2,$$

wo $\varDelta$ die Determinante $(AD - BC)$ sein soll.

Die Substitution S_1 für das zum irregulären Punkte $z = 1$ gehörende canonische System (8) pg. 388 wird man sofort wieder angeben. Wollte man jedoch die Substitution S_0 für dieses letztere System (8) pg. 388, das wir für den Augenblick durch $(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2)$ bezeichnen wollen, berechnen, so müsste man dieses System zunächst in der Gestalt (6) im canonischen System des Punktes $z = 0$ darstellen. Indessen haben wir hier einstweilen keine Mittel, die dabei auftretenden Coefficienten A, B, C, D zu bestimmen. Leider ist es unmöglich, auf die zur Berechnung der Coefficienten A, B, C, D ausgebildeten Methoden hier näher einzugehen, da diese Entwicklungen zu tief in die Einzeluntersuchung der hypergeometrischen Function hineinführen.

§ 17. **Der Integralquotient als Function** $\eta(z)$.

Zu besonders interessanten Ergebnissen gelangen wir bei der Untersuchung des *Quotienten irgend zweier linear-unabhängigen particulären Integrale* Z_1, Z_2 *der hypergeometrischen Differentialgleichung.* Wir wollen diesen Quotienten als Function von z durch:

$$\eta(z) = \frac{Z_1}{Z_2} \tag{1}$$

bezeichnen. Zu irgend einem anderen Fundamentalsystem $(AZ_1 + BZ_2, CZ_1 + DZ_2)$ gehört entsprechend ein Integralquotient $\eta'(z)$, welcher sich durch die Function $\eta(z)$ der Formel (1) in der Gestalt:

$$\eta'(z) = \frac{A\eta(z) + B}{C\eta(z) + D} \tag{2}$$

darstellt. Von den vier Coefficienten A, B, C, D kommen hierbei nur die Quotienten zur Geltung; wir können diesen Umstand durch folgenden Satz zum Ausdruck bringen: *Die durch einen Integralquotienten* $Z_1 : Z_2$ *definierte Function von* z *ist eine unter dreifach unendlich vielen Functionen; jede derselben,* $\eta'(z)$, *stellt sich in einer ersten unter ihnen,* $\eta(z)$, *in der Gestalt* (2) *mit vier complexen Constanten* A, B, C, D *nichtverschwindender Determinante* $(AD - BC)$ *dar.*

Eine einzelne particuläre Function $\eta(z)$ hat die Punkte $z = 0, 1, \infty$ zu irregulären Stellen, ist jedoch übrigens, von etwaigen Polen abgesehen, überall regulär (cf. (3) pg. 385). Aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen entspringt als Hauptsatz: *Ein particuläres* η *liefert eine mehrdeutige analytische Function des Argumentes* z, *deren sämtliche Zweige sich in einem ersten,* $\eta(z)$, *vermöge linearer Substitutionen:*

$$\eta'(z) = \frac{a\eta(z) + b}{c\eta(z) + d} \tag{3}$$

darstellen; alle diese bei der einzelnen η-Function zur Geltung kommenden linearen Substitutionen lassen sich durch Zusammensetzung aus drei, den S_0, S_1, S_2 entsprechenden, „erzeugenden“ Substitutionen herstellen.

Sehr bemerkenswert ist, *dass wir $\eta(z)$ auch unabhängig von Z_1, Z_2 als Integral einer gewissen Differentialgleichung dritter Ordnung definieren können.*

Um diese Gleichung zu gewinnen, setzen wir zur Abkürzung:

$$(4) \qquad \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(z-1)}=P_1(z), \quad -\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}=P_2(z).$$

Wir haben alsdann für irgend zwei linear-unabhängige Integrale Z_1, Z_2 der hypergeometrischen Differentialgleichung (1) pg. 384:

$$(5) \qquad \frac{d^2Z_1}{dz^2}=P_1\frac{dZ_1}{dz}+P_2Z_1, \quad \frac{d^2Z_2}{dz^2}=P_1\frac{dZ_2}{dz}+P_2Z_2.$$

Durch Combination dieser Gleichungen folgt:

$$(6) \qquad Z_2\frac{d^2Z_1}{dz^2}-Z_1\frac{d^2Z_2}{dz^2}=P_1\left(Z_2\frac{dZ_1}{dz}-Z_1\frac{dZ_2}{dz}\right).$$

Andererseits folgt aus $\eta=Z_1:Z_2$ durch Differentiation:

$$\frac{d\eta}{dz}=\frac{Z_2\frac{dZ_1}{dz}-Z_1\frac{dZ_2}{dz}}{Z_2^2},$$

sowie weiter, wenn man diese Gleichung logarithmisch differenziert:

$$\frac{\frac{d^2\eta}{dz^2}}{\frac{d\eta}{dz}}=\frac{Z_2\frac{d^2Z_1}{dz^2}-Z_1\frac{d^2Z_2}{dz^2}}{Z_2\frac{dZ_1}{dz}-Z_1\frac{dZ_2}{dz}}-2\frac{\frac{dZ_2}{dz}}{Z_2}.$$

Diese Gleichung schreibt man mit Benutzung von (6) einfacher so:

$$(7) \qquad \frac{\frac{d^2\eta}{dz^2}}{\frac{d\eta}{dz}}=P_1-2\frac{\frac{dZ_2}{dz}}{Z_2}.$$

Durch nochmalige Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{\frac{d^3\eta}{dz^3}}{\frac{d\eta}{dz}}-\left(\frac{\frac{d^2\eta}{dz^2}}{\frac{d\eta}{dz}}\right)^2=\frac{dP_1}{dz}-2\frac{\frac{d^2Z_2}{dz^2}}{Z_2}+2\left(\frac{\frac{dZ_2}{dz}}{Z_2}\right)^2.$$

Man quadriere nun die Gleichung (7), multipliciere darauf mit $\frac{1}{2}$ und subtrahiere das Resultat von der letzten Gleichung. Dabei entspringt links der folgende, symbolisch durch $[\eta]_z$ zu bezeichnende Differentialausdruck dritter Ordnung:

$$(8)\qquad [\eta]_z = \frac{\frac{d^3\eta}{dz^3}}{\frac{d\eta}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2\eta}{dz^2}}{\frac{d\eta}{dz}}\right)^2,$$

während man rechter Hand erhält:

$$\frac{dP_1}{dz} - \frac{1}{2}P_1^2 - \frac{2}{Z_2}\left(\frac{d^2 Z_2}{dz^2} - P_1\frac{dZ_2}{dz}\right).$$

Bei Benutzung der zweiten Gleichung (5) folgt damit:

$$(9)\qquad [\eta]_z = \frac{dP_1}{dz} - \frac{1}{2}P_1^2 - 2P_2.$$

Hier wolle man endlich für P_1 und P_2 ihre Ausdrücke (4) eintragen, worauf der soeben für $[\eta]_z$ berechnete Ausdruck die Gestalt einer rationalen Function von z annimmt. Um letztere kurz schreiben zu können, führen wir an Stelle von α, β, γ folgende drei Grössen ein:

$$(10)\qquad \lambda = 1 - \gamma, \quad \mu = \gamma - \alpha - \beta, \quad \nu = \beta - \alpha.$$

Eine elementare Zwischenrechnung ergiebt dann als Gestalt der gedachten rationalen Function die rechte Seite der Gleichung:

$$(11)\qquad [\eta]_z = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{1-\mu^2}{2(z-1)^2} - \frac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{2z(z-1)}.$$

Hiermit ist die Differentialgleichung dritter Ordnung für $\eta(z)$ gewonnen.

Danach ist zufolge der Betrachtungen von pg. 393 ff. der Quotient ω der Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung in Abhängigkeit vom Modul k^2 ein Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(12)\qquad [\omega]_{k^2} = \frac{1}{2k^4} + \frac{1}{2(k^2-1)^2} - \frac{1}{2k^2(k^2-1)}.$$

Da bei der entwickelten Rechnung η eine beliebige unter den ∞^3 coordinierten Functionen (2) ist, so wird mit η auch:

$$(13)\qquad \frac{A\eta + B}{C\eta + D}$$

der Differentialgleichung (11) genügen; *d. h. es ist eine Eigenschaft des Differentialausdrucks $[\eta]_z$, unverändert zu bleiben, wenn man η durch eine beliebige lineare Function seiner selbst ersetzt:*

$$(14)\qquad \left[\frac{A\eta + B}{C\eta + D}\right]_z = [\eta]_z.$$

Sind A, B, C, D willkürliche Constante, so hat man in (13) das „*all-*

gemeine Integral" der Differentialgleichung (11), falls η irgend ein particuläres Integral derselben ist*). —

Wir schreiten jetzt zur näheren Betrachtung der Vieldeutigkeit der Function $\eta(z)$. Hat zunächst keine der drei zu 0, 1, ∞ gehörenden determinierenden Gleichungen Wurzeln mit ganzzahliger Differenz, so heisst die zufolge der Formeln des § 13 pg. 385 ff. einfach, *dass keine der Grössen λ, μ, ν eine ganze Zahl sei.* Wir wollen alsdann aus (4) pg. 386 für die Umgebung von $z = 0$ den particulären Quotienten $(Z_2 : Z_1)$ bilden, den wir η_0 nennen wollen. Entsprechend sollen aus (8) und (9) pg. 388 für die Umgebungen von $z = 1$ und ∞ particuläre Functionen η_1, η_∞ hergestellt werden. Es gelten alsdann folgende Darstellungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} \eta_0 = z^\lambda[1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots], \\ \eta_1 = (z-1)^\mu[1 + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + \cdots], \\ \eta_\infty = \left(\frac{1}{z}\right)^\nu \left[1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\right]. \end{cases}$$

Darüber hinaus interessiert uns namentlich der Fall, dass die Wurzeln der determinierenden Gleichung zusammenfallen. Findet dies z. B. für den irregulären Punkt $z = 0$ statt, so ist $\lambda = 0$, und wir haben dann auf Grund von (6) pg. 387 als Darstellung von η_0:

$$(16)\qquad \eta_0 = (\log z) + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots.$$

Ist übrigens z_0 ein regulärer Punkt, so werden wir entsprechend den Quotienten $(Z_2 : Z_1)$ der beiden zugehörigen durch (3) pg. 385 gelieferten Integrale als particuläres η auswählen; für diese Function $\eta(z)$ gilt dann die Entwicklung:

$$(17)\qquad \eta = (z - z_0) + d_2(z - z_0)^2 + d_3(z - z_0)^3 + \cdots.$$

Diese Formeln enthalten einige Angaben betreffs *derjenigen Riemann'schen Fläche über der z-Ebene, auf welcher das einzelne η und damit überhaupt jede der ∞^3. η-Functionen eindeutig ist.*

Ist erstlich λ nicht ganzzahlig, so wird η_0 nach l Umläufen um den Punkt $z = 0$ übergehen in:

$$\eta_0{}' = e^{2i\pi l\lambda}\eta_0.$$

Sollen wir somit hierbei zum ursprünglichen Zweige zurückgelangt

---

*) Der Differentialausdruck $[\eta]_z$, der sich bereits in der älteren Litteratur findet, ist in seiner vollen Bedeutung von H. A. Schwarz erkannt; vergl. die Abhandlung *„Über diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes ist"*, Crelle's Journal f. Mathem. Bd. 75 (1872). Man bezeichnet $[\eta]_z$ demnach auch wohl als den Schwarz'schen Differentialausdruck.

sein, so muss $l\lambda$ eine ganze Zahl l_0 sein, d. h. die Zahl λ muss einen rationalen Bruch $\frac{l_0}{l}$ darstellen. Zugleich werden wir, wenn dieser Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht ist, nicht früher als nach l Umläufen zum ersten Zweige zurückgelangen. Diese Angaben übertragen sich sofort auf einen beliebigen Zweig unserer η-Function (wegen dessen linearer und also eindeutiger Abhängigkeit von η_0).

Ist zweitens λ irrational, so wird man nach keiner endlichen Anzahl von Umläufen um $z = 0$ zum ersten Zweige zurückgelangen. Dieselben Verhältnisse liegen wegen des in (16) auftretenden Gliedes $\log z$ für $\lambda = 0$ vor. *Ist λ mit dem auf seine kleinste Benennung gebrachten rationalen Bruche $\frac{l_0}{l}$ identisch, so hängt jedes Blatt der zu η gehörenden Riemann'schen Fläche bei $z = 0$ mit $(l - 1)$ weiteren Blättern in einem l-blättrigen Verzweigungspunkte zusammen; ist λ gleich null oder irrational, so ist jedes Blatt in der pg.* 99 *besprochenen Art mit unendlich vielen weiteren Blättern in einem Verzweigungspunkte verbunden.* Den Fall $\lambda = 0$ kann man übrigens hierbei als Grenzfall $l = \infty$ eines rationalen Bruches $\frac{l_0}{l}$ auffassen.

Für die beiden anderen irregulären Punkte 1 und ∞ gelten analoge Überlegungen; andererseits aber folgt aus (17), dass an keiner von 0, 1, ∞ verschiedenen Stelle ein Verzweigungspunkt eintreten kann. Merken wir uns demnach insbesondere folgenden Satz an: *Sind λ, μ, ν mit den folgenden, auf ihre kleinsten Benennungen gebrachten rationalen Brüchen gleich:*

$$(18) \qquad \lambda = \frac{l_0}{l}, \quad \mu = \frac{m_0}{m}, \quad \nu = \frac{n_0}{n},$$

so hängt jedes einzelne Blatt unserer Riemann'schen Fläche bei $z = 0$ mit $(l - 1)$, bei $z = 1$ mit $(m - 1)$, bei $z = \infty$ mit $(n - 1)$ weiteren Blättern in drei Verzweigungspunkten zusammen; andere Verzweigungspunkte treten aber nicht auf. Die Nenner l, m, n sollen hierbei ganze Zahlen $\geqq 2$ sein, und die Fälle $l = \infty$, $m = \infty$, $n = \infty$ sollen als Grenzfälle mit gerechnet sein.

Nach Erfahrungen, die wir bei früher untersuchten Functionen gesammelt haben, liegt die Vermutung nahe, dass wir in die Natur dieser Riemann'schen Fläche weit klareren Einblick gewinnen, *wenn wir dieselbe vermöge einer einzelnen η-Function auf die Ebene der letzteren conform abbilden.* In dieser Richtung werden wir zu ganz besonders interessanten Ergebnissen geführt, falls wir noch die beschränkende Voraussetzung machen, dass $l_0 = m_0 = n_0 = 1$ zutrifft, *d. h. dass λ, μ, ν drei positive Stammbrüche darstellen:*

(19) $$\lambda = \frac{1}{l}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \nu = \frac{1}{n}.$$

Wir wollen dann aber gleich noch die *weitere Einschränkung* eintreten lassen, dass die Ungleichung:

(20) $$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

gelten soll. Jedenfalls giebt es noch unendlich viele diesen Festsetzungen entsprechende Tripel.

Für die Gewinnung des Abbildes der Riemann'schen Fläche auf die η-Ebene sind nun einige Vorentwicklungen nötig.

Aufgabe 1. Man zeige durch dreimalige Differentiation der Gleichung:

$$B + A\eta - D\eta' - C\eta\eta' = 0$$

und nachherige Elimination von A, D, C auf directem Wege die Richtigkeit der Gleichung $[\eta']_z = [\eta]_z$.

Aufgabe 2. Zufolge der Relation (14) pg. 401 ist $[\eta]_z$ eine eindeutige Function von z. Man zeige durch Untersuchung von $[\eta]_z$ an einer beliebigen Stelle z_0, sowie an den drei irregulären Stellen $0, 1, \infty$, dass $[\eta]_z$ rational in z und speciell von der Gestalt (11) ist.

§ 18. Abbildung der z-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck der η-Ebene.

Die z-Ebene zerlegen wir durch einen Schnitt längs der reellen Axe in zwei „Halbebenen", die wir je nach dem zugehörigen Vorzeichen des imaginären Bestandteils in $z = x + iy$ als „positive" und „negative" Halbebene unterscheiden. Wir wenden uns zunächst zur positiven Halbebene, innerhalb deren eine einzelne η-Function überall regulär ist. Die Halbebene wird sich auf einen einfach zusammenhängenden Bereich der Ebene dieser Function η übertragen, und wir ziehen aus Formel (17) pg. 402 sofort den Schluss, *dass diese Abbildung abgesehen von den zu $z = 0, 1, \infty$ gehörenden Stellen allenthalben conform ist.* Wir wollen die Gestalt des Abbildes der z-Halbebene feststellen.

Wir beginnen damit, den Rand der Halbebene abzubilden, der durch die Punkte $0, 1, \infty$ in drei getrennt zu behandelnde Strecken zerlegt wird. Für die von $z = 0$ bis $z = 1$ ziehende geradlinige Strecke benutzen wir erstlich *im Falle eines endlichen* l die in (15) pg. 402 durch η_0 bezeichnete particuläre Function:

(1) $$\eta = z^{\frac{1}{l}} \frac{F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)}{F(\alpha, \beta, \gamma; z)},$$

wobei $z^{\frac{1}{l}}$ für positive reelle z gleichfalls reell und positiv gewählt

werden soll. Es stellen sich nun die $\alpha, \beta, \cdots$ in den Zahlen l, m, n so dar:

$$2\alpha = 1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}, \quad 2\beta = 1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{l},$$

$$2(\alpha - \gamma + 1) = 1 + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n},$$

$$2(\beta - \gamma + 1) = 1 + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \quad 2 - \gamma = 1 + \frac{1}{l}.$$

Aus (20) pg. 404 ergiebt sich somit, dass alle sechs Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma$ reell und > 0 sind. Die beiden in (1) rechts stehenden hypergeometrischen Reihen sind demnach für alle reellen z im Innern des Intervalls $0 < z < 1$ selber zufolge ihrer Structur reell, endlich und > 0. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass für alle Stellen im Innern des gedachten Intervalles die Abbildung conform ist, ergiebt sich als vorläufiges Resultat: Die Strecke der reellen z-Axe von $z = 0$ nach $z = 1$ überträgt sich vermöge der Function (1) eindeutig stetig auf eine der reellen positiven η-Axe angehörende Strecke, welche mit $\eta = 0$ beginnt und entweder endliche Länge hat oder gerade bis $\eta = \infty$ reicht. Die letztere Alternative müssen wir zunächst noch offen lassen, da das Verhalten der hypergeometrischen Reihen an der Convergenzgrenze bisher noch nicht festgestellt wurde.

Auch bei der Fortsetzung der Untersuchung behalten wir die η-Function (1) bei und betrachten also allein erst den Fall einer endlichen ganzen Zahl l. Alsdann wird die Conformität der Abbildung im Punkte $z = 0$ in der Art aufhören, dass sich hier die Winkel bei Übertragung auf die η-Ebene auf ihre l^{ten} Teile reducieren. Wenden wir uns demnach jetzt zur Strecke von $z = 0$ bis $z = -\infty$, so wird dieser Teil des Randes der positiven z-Halbebene, welcher gegen das eben behandelte Randstück von 0 bis 1 den Winkel $+\pi$ bildet, in der η-Ebene ein Abbild liefern, das von $\eta = 0$ unter dem Winkel $+\frac{\pi}{l}$ gegen die positive reelle η-Axe ausstrahlt.

Um genaueres über die Gestalt des fraglichen Abbildes auszusagen, machen wir nach pg. 387 von der linearen Transformation:

$$z' = \frac{z}{z-1}, \quad Z' = (1-z)^{\alpha} Z$$

Gebrauch, welche unsere hypergeometrische Differentialgleichung in die Gestalt überführt:

$$z'(z'-1)\frac{d^2 Z'}{dz'^2} + [(\alpha + \gamma - \beta + 1)z' - \gamma]\frac{dZ'}{dz'} + \alpha(\gamma - \beta)Z' = 0.$$

Wir setzen deren canonisches Fundamentalsystem sofort nach (4) pg. 386 an und gewinnen von hieraus rückwärts für die ursprüngliche Differentialgleichung bei $z = 0$ das Fundamentalsystem:

$$(1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1,\ 1-\beta,\ 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right).$$

Diese beiden Integrale werden sich in den Integralen (4) pg. 386 linear homogen darstellen. Aber eine einfache Überlegung zeigt, dass wir hier geradezu wieder dieselben Integrale wie in (4) pg. 386 vor uns haben; denn man hat nur nötig, die beiden jetzigen Integrale nach Potenzen von z zu entwickeln, um im ersten eine Potenzreihe mit gannzzahligen Exponenten zu erkennen, während das zweite das Product einer solchen Potenzreihe und des Factors $z^{1-\gamma}$ mit nicht ganzzahligem Exponenten darstellt. Wir erkennen von hieraus fast unmittelbar, dass eben dasselbe particuläre η, auf welches sich die Formel (1) bezog, auch so dargestellt werden kann:

$$(2) \qquad \eta = e^{\frac{\pi i}{l}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{1}{l}} \frac{F\left(\alpha-\gamma+1,\ 1-\beta,\ 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right)}{F\left(\alpha\ \gamma-\beta, \gamma; \frac{z}{z-1}\right)}.$$

Es muss hierbei nur hinzugesetzt werden, dass der zweite Factor rechter Hand, $(z')^{\frac{1}{l}}$, für reelle positive z' selber reell und positiv sein soll.

Diese Darstellung unseres particulären η ist für die Untersuchung der Strecke von $z = 0$ bis $z = -\infty$ der reellen z-Axe geeignet, weil diese Strecke dem Intervall von $z' = 0$ bis $z' = 1$ der reellen z'-Axe correspondiert. Indem wir auf die besonderen bei uns vorliegenden Werte α, β, γ Rücksicht nehmen, kommen wir analog wie oben zu dem Ergebnis: Die Strecke von $z = 0$ bis $z = -\infty$ der reellen z-Axe bildet sich auf einen von $\eta = 0$ ausziehenden geradlinigen Strahl ab, der unter dem Winkel $+\frac{\pi}{l}$ gegen die reelle η-Axe geneigt ist, und der entweder endliche Länge hat oder erst bei $\eta = \infty$ endigt.

Indem wir zunächst *auch noch m und n als endlich* annehmen, wollen wir die bisherigen Ergebnisse sogleich verallgemeinern, wobei wir an Stelle des eben benutzten particulären η eine beliebige unserer ∞^3 η-Functionen treten lassen. Jedes solche η' ist, wie wir pg. 399 sahen, in dem eben gemeinten speciellen η als lineare Function:

$$(3) \qquad \eta' = \frac{A\eta + B}{C\eta + D}$$

darstellbar. Diese Gleichung liefert zwischen η und η' eine Beziehung, die wir oben als „*Kreisverwandtschaft*" ausführlich behandelten. Wir haben es dabei mit einer *winkeltreuen* (conformen) Abbildung zu thun, *bei welcher Kreise stets wieder in Kreise übergehen;* hierbei sind die Geraden als Kreise durch $\eta = \infty$ mitgerechnet (cf. pg. 83).

Man nehme nun noch hinzu, dass auf Grund der pg. 387 an die Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung geknüpften Bemerkungen die drei durch $z = 0, 1, \infty$ abgeteilten Strecken der reellen z-Axe als coordiniert anzusehen sind. Es entspringt dann als Resultat: *Jede der drei Strecken der reellen z-Axe wird durch eine beliebige unserer ∞^3 Functionen η Punkt für Punkt eindeutig stetig auf einen Kreisbogen der η-Ebene abgebildet, der niemals die Grösse einer vollen Kreisperipherie erreichen kann.* Diesen letzteren Umstand stellen wir sogleich ausdrücklich fest und können denselben auch dahin aussprechen, dass die Endpunkte des einzelnen abbildenden Kreisbogens stets getrennt liegen.

Der einfach zusammenhängende Bereich, auf welchen die positive z-Halbebene vermöge $\eta(z)$ abgebildet wird, ist hiernach von drei Kreisbogen berandet, welche einander in drei getrennt liegenden Punkten unter den Winkeln $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ treffen.

Zur weiteren Ausgestaltung dieses Ergebnisses kehren wir nochmals zur particulären Function (1) zurück. Hier sind zwei unter den drei Kreisbogen Gerade, die von $\eta = 0$ ausstrahlen. Wir bemerken, dass jedenfalls nicht beide bis $\eta = \infty$ reichen; denn in diesem Falle würden die beiden Endpunkte des dritten Kreisbogens coincidieren, was unstatthaft ist. Wir schliessen sogleich weiter, dass zwei unter unseren drei Kreisbogen immer nur ihren gemeinsamen Endpunkt, aber nie einen weiteren Punkt gemein haben.

Ist nun etwa der zur Verbindungslinie von $z = 0$ und $z = 1$ gehörende Strahl endlich, so zeichnen wir uns in einem Endpunkte unter dem Winkel $\frac{\pi}{m}$ die Tangente des noch fehlenden dritten Kreisbogens. Hier lehrt dann die unmittelbare Anschauung der Figur 91, dass dieser dritte Kreisbogen durch die Forderung, den zweiten unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu erreichen, bereits eindeutig bestimmt ist. Auch der zweite von $\eta = 0$ ausziehende geradlinige Strahl erweist sich jetzt als endlich; und es wird der eben zuletzt gewonnene

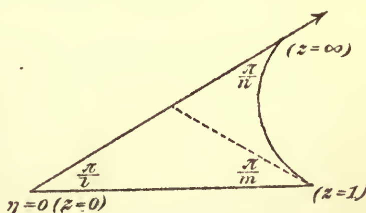


Fig. 91.

Kreisbogen dem Innern des entstandenen Dreiecks seine convexe Seite zukehren, da die Winkelsumme des Dreiecks zufolge (20) pg. 404

$$\frac{\pi}{l}+\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}<\pi \tag{4}$$

ist. Wir merken das gewonnene Resultat so an: *Sind alle drei Zahlen l, m, n endlich, so wird der Rand der positiven z-Halbebene durch irgend ein particuläres η auf eine geschlossene Kette von drei Kreisbogen abgebildet, welche die Winkel $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ mit einander bilden und solchergestalt ein mit dem Dreieck der Figur 91 kreisverwandtes Kreisbogendreieck eingrenzen.* —

Ist jetzt $l=\infty$, so ist $\gamma=1$ und die η-Function (1) ist durch:

$$\eta=\log z+\frac{F_1(\alpha,\beta;z)}{F(\alpha,\beta,1;z)} \tag{5}$$

zu ersetzen (cf. (6) pg. 387). Hier überträgt sich die gerade Linie von $z=0$ nach $z=1$ eindeutig stetig auf die reelle η-Axe von $\eta=-\infty$ beginnend. Für negative reelle z ist von 0 bis -1 die Darstellung (5) unserer η-Function noch brauchbar. Hier wird $\log z$ den imaginären Bestandteil πi bekommen, und wir gewinnen als Abbild eine zur reellen η-Axe im Abstande π parallel laufende Gerade. Diese Aussage gilt jedoch sogleich für die ganze von $z=0$ bis $z=-\infty$ ziehende Strecke; man wird dies durch die zweite Darstellung:

$$\eta=\pi i+\log\left(\frac{z}{z-1}\right)+\frac{F_1\left(\alpha,1-\beta;\frac{z}{z-1}\right)}{F\left(\alpha,1-\beta,1;\frac{z}{z-1}\right)} \tag{6}$$

unserer particulären η-Function nachweisen, welche man vermöge der oben schon benutzten Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung ableitet.

Benutzen wir an Stelle der bisherigen particulären eine beliebige η-Function, *so treten an Stelle der beiden gewonnenen parallelen Geraden zwei Kreisbogen, die sich in ihrem gemeinsamen, $z=0$ entsprechenden Endpunkte berühren.*

Kehren wir nochmals zu den beiden parallelen Geraden zurück, so ist zunächst noch nicht ausgeschlossen, dass eine von ihnen oder beide rechts bis $+\infty$ reichen. Doch erkennt man dies sofort als unmöglich, wenn man den zum dritten Abschnitt der reellen z-Axe gehörenden Kreisbogen hinzusetzt, der jene beiden Geraden unter den Winkeln $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ erreichen muss. Würden nämlich beide Gerade bis $+\infty$ reichen, so zeigt die Betrachtung auf der η-Kugel, dass der dritte

Kreisbogen sich auf einen Punkt zusammenziehen müsste, was doch nicht der Fall ist. Reicht aber eine der beiden Geraden bis zu einem endlichen Werte η, so lehrt eine der Figur 91 entsprechende Figur, dass dies auch von der anderen Geraden gilt. Von hieraus ist sofort ersichtlich, *dass das obige Theorem über Abbildung des Randes der positiven z-Halbebene auf die drei Seiten eines Kreisbogendreiecks der Winkel $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ auch gültig bleibt, falls die Zahlen l, m, n teilweise oder alle ∞ werden.* —

Gehen wir zum conformen Abbilde der positiven z-Halbebene selber voran, so stellt dasselbe einen einfach zusammenhängenden Bereich der η-Ebene dar, der in den Rand unseres gewonnenen Kreisbogendreiecks eingespannt erscheint. Es liegt die Annahme nahe, *dass dieser Bereich geradezu aus der Innenfläche unseres Dreiecks besteht.* Thatsächlich werden wir im Stande sein, dies zu zeigen.

Wir benutzen hierbei an Stelle der z-Ebene lieber die z-Kugel, auf welcher die reelle z-Axe den horizontalen grössten Kugelkreis, die positive z-Halbebene aber die obere Halbkugel liefern mag. Auf letzterer denke man das System der Parallelkreise gezogen und überlege, wie sich dieselben auf die η-Ebene übertragen. Sie werden wegen der Conformität der Abbildung überall stetig gekrümmte Curven liefern; und zwei sehr nahe benachbarte Parallelkreise werden zwei gleichfalls in ihrer ganzen Ausdehnung sehr nahe neben einander verlaufende Curven der η-Ebene ergeben, welche einander nirgends berühren oder gar schneiden können.

Indem wir die Abbilder der Parallelkreise von der reellen z-Axe beginnend verfolgen, werden wir erstlich jedenfalls in das Innere unseres Kreisbogendreiecks hineingeführt werden. Es ist nun die Frage, ob das in Figur 92 skizzierte Vorkommnis eintreten kann, dass sich die den Parallelkreisen entsprechenden Curven über sich selbst hinüberschieben und so wenigstens teilweise eine doppelte oder mehrfache Überdeckung der Dreiecksfläche bewirken. Wir behaupten, dass dies jedenfalls unmöglich ist. Bei der weiteren Fortsetzung der Abbildung werden sich nämlich die fraglichen abbildenden Curven mehr und mehr, und zwar schliesslich auf einen Punkt, zusammenziehen. Nach den vorausgesandten Bemerkungen müsste sich demnach in jeder der in Figur 92 noch vorliegenden Lücken wenigstens ein

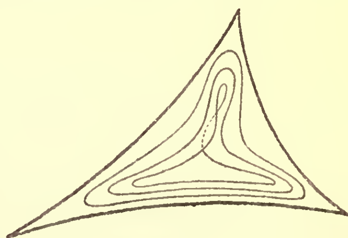


Fig. 92.

Verzweigungspunkt einfinden. Ein solcher tritt aber nicht ein, da in ihm die Conformität der Abbildung aufhören würde. Das in Figur 92 skizzierte Übereinandergreifen der Curven ist hiernach ausgeschlossen.

Man braucht jetzt nur noch einmal zu betonen, dass die den Parallelkreisen entsprechenden Curven sich schliesslich auf einen Punkt zusammenziehen, um zu erkennen, dass das gesuchte Abbild gerade die einfach und vollständig bedeckte Dreiecksfläche ist. Hiermit aber haben wir den Fundamentalsatz gewonnen: *Sind die* λ, μ, ν *die in* (19) *pg.* 404 *gegebenen positiven Stammbrüche, so bildet ein einzelner Zweig einer particulären* η*-Function die positive* z*-Halbebene auf die einfach bedeckte Fläche eines Kreisbogendreiecks der Winkel* $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ *ab**).

Als Specialsatz ergiebt sich: *Der Periodenquotient* ω *des elliptischen Integrals erster Gattung bildet die positive Halbebene des Legendre'schen Integralmoduls* k^2 *auf die Fläche eines Kreisbogendreiecks mit drei Winkeln* 0 *ab.*

§ 19. Abbildung der zu $\eta(z)$ gehörenden Riemann'schen Fläche auf ein Netz von Kreisbogendreiecken.

Der soeben gewonnene Fundamentalsatz liefert uns ein Mittel, die bereits pg. 402 ff. betrachtete Vieldeutigkeit der einzelnen Function $\eta(z)$, wenigstens in dem hier bevorzugten Falle, dass die λ, μ, ν mit Stammbrüchen einer unterhalb π gelegenen Summe gleich sind, in neuer Weise zu beleuchten. Die analytische Fortsetzung von $\eta(z)$ wollen wir in der Weise einleiten, dass wir aus der eben zur Abbildung gebrachten positiven z-Halbebene zwischen den Punkten $z = 0$ und $z = 1$ in die negative Halbebene hinüber wandern. Welches wird das conforme Abbild dieser letzteren Halbebene in der η-Ebene sein?

Man knüpfe zunächst wieder an die unter (1) pg. 404 dargestellte η-Function an, welche die für $|z| < 1$ convergente Entwicklung:

$$(1) \qquad \eta = z^{\frac{1}{l}}(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)$$

besitzt. Hierbei wird l einstweilen als endlich angenommen, und es sind die Coefficienten $a_1, a_2, \cdots$ sämtlich *reell*. Das Abbild der positiven z-Halbebene ist ein Kreisbogendreieck der in Figur 91 pg. 407 dargestellten Gestalt. Der Strecke der reellen z-Axe zwischen 0 und 1 entspricht insbesondere eine geradlinige Seite des Kreisbogendreiecks, welche sich auf der reellen η-Axe von $\eta = 0$ bis $\eta(1)$ erstreckt.

---

*) Dieser Satz stellt eines der schönsten Ergebnisse der pg. 402 genannten Untersuchung von H. A. Schwarz dar.

Es seien jetzt z_0 und $\bar{z}_0$ zwei conjugiert complexe Werte mit $|z_0| = |\bar{z}_0| < 1$. Für diese Werte ist die in (1) rechts stehende Reihe convergent und liefert wegen der Realität der Coefficienten selber conjugiert complexe Summenwerte. Gehen wir von z_0 zu $\bar{z}_0$, indem wir wie oben in Aussicht genommen die reelle Axe zwischen 0 und 1 überschreiten, so kommen wir von dem bei der Abbildung zur Verwendung gebrachten Werte $z_0^{\frac{1}{l}}$ zum conjugiert complexen Werte $\bar{z}_0^{\frac{1}{l}}$. Es werden somit auch $\eta(z_0)$ und $\eta(\bar{z}_0)$ conjugiert complex ausfallen.

Dieses zunächst für $|z_0| < 1$ gewonnene Resultat gilt nun aber allgemein: *Überschreiten wir die reelle z-Axe zwischen 0 und 1, so gelangen wir durch analytische Fortsetzung unserer particulären Function $\eta(z)$ innerhalb der negativen Halbebene zu solchen Werten, dass in je zwei conjugierten Punkten z, $\bar{z}$ conjugierte Functionswerte vorliegen.* Für die Umgebungen der beiden soeben mit z_0 und $\bar{z}_0$ bezeichneten Stellen gelten nämlich die Darstellungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta(z) = \eta_{z_0} + \left(\dfrac{d\eta}{dz}\right)_{z_0} \dfrac{z-z_0}{1} + \left(\dfrac{d^2\eta}{dz^2}\right)_{z_0} \dfrac{(z-z_0)^2}{1\cdot 2} + \cdots, \\ \eta(z) = \eta_{\bar{z}_0} + \left(\dfrac{d\eta}{dz}\right)_{\bar{z}_0} \dfrac{z-\bar{z}_0}{1} + \left(\dfrac{d^2\eta}{dz^2}\right)_{\bar{z}_0} \dfrac{(z-\bar{z}_0)^2}{1\cdot 2} + \cdots, \end{cases}$$

wo durch den Index z_0 bez. $\bar{z}_0$ an der einzelnen Ableitung angedeutet sein soll, dass der Wert derselben für z_0 bez. $\bar{z}_0$ gemeint ist. Da nun in den Umgebungen von z_0 und $\bar{z}_0$ zu conjugiert complexen z auch conjugiert complexe Functionswerte gehören, so folgert man leicht, dass für jedes k die Werte $\left(\dfrac{d^k\eta}{dz^k}\right)_{z_0}$ und $\left(\dfrac{d^k\eta}{dz^k}\right)_{\bar{z}_0}$ conjugiert sind. Für die Convergenzbereiche der Reihen (2) ist demnach erwiesen, dass $\eta(z)$ und $\eta(\bar{z})$ conjugiert sind. Durch Weiterführung der analytischen Fortsetzung erkennt man in derselben Art die Gültigkeit unserer Behauptung im vollen Umfange.

Wir formulieren den bewiesenen Satz jetzt sogleich geometrisch: *Das conforme Abbild der negativen z-Halbebene, welches wir bei Überschreiten der reellen z-Axe zwischen 0 und 1 erreichen, gewinnt man durch Spiegelung des Kreisbogendreiecks der Figur 91 längs seiner auf der reellen η-Axe gelegenen Seite.* Figur 93 liefert hiernach ein Abbild der vollen z-Ebene oder, ausführlicher gesagt, zweier

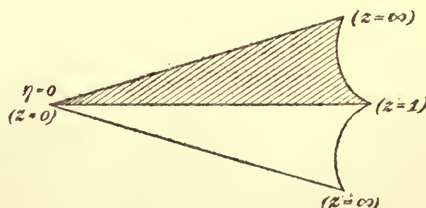


Fig. 93.

Halbblätter der z-Ebene, welche längs der zwischen $z = 0$ und $z = 1$ verlaufenden Strecke der reellen z-Axe zusammenhängen.

Es ist nun leicht, dieses Ergebnis einer wichtigen Verallgemeinerung zu unterziehen.

Erstlich bemerke man, *dass sich die Verhältnisse in dem zunächst ausgeschlossenen Falle* $l = \infty$ *ganz analog gestalten.* Man hat hier nur an Stelle der Reihe (1) die Darstellung (5) pg. 408 der particulären η-Function treten zu lassen; auf diese Darstellung gründet man dieselben Schlussfolgerungen, wie soeben auf die Gleichung (1).

Wir fassen ferner die Spiegelung an einer geradlinigen Seite des Dreiecks dahin auf, dass zwei einander hierbei correspondierende Punkte die Grundpunkte eines zu jener Seite orthogonalen Kreisbüschels sind (cf. Figur 94). Diese Auffassung besitzt den Charakter der Invarianz gegenüber einer Transformation der Kreisverwandtschaft. Lassen wir aber jetzt an Stelle der bisher benutzten particulären η-Function ein beliebiges $\eta'(z)$ aus dem System der ∞^3 zusammengehörigen Functionen treten, so gilt nach pg. 399 zwischen dieser Function η' und dem particulären $\eta(z)$ die Beziehung:

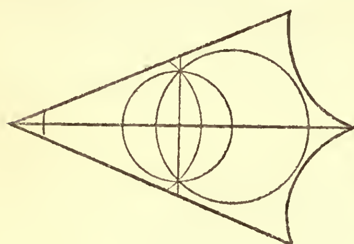


Fig. 94.

$$\eta'(z) = \frac{A\eta(z) + B}{C\eta(z) + D}.$$

Die durch $\eta'(z)$ *vermittelte Abbildung ist demnach einfach mit der oben gefundenen Abbildung durch* $\eta(z)$ *kreisverwandt.* Die beiden zusammenhängenden Kreisbogendreiecke der Figur 93 nehmen hierbei etwa die in Figur 95 gegebene Lage an. Wir sagen auch jetzt noch, dass sie durch Spiegelung an ihrer gemeinsamen Seite in einander übergehen; und in der That kommen wir nach der soeben vorausgeschickten Auffassung der Spiegelung hier zu derjenigen Operation zurück, welche wir pg. 80 u. f. als „*Transformation durch reciproke Radien*“ oder „*Inversion*“ oder „*Spiegelung*“ an einem Kreise bereits ausführlich besprachen.

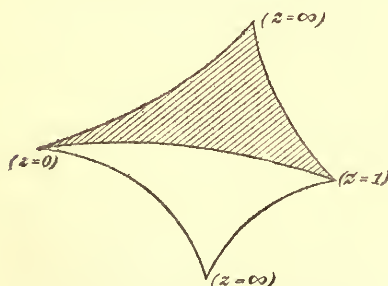


Fig. 95.

Endlich drittens machen wir von dem schon oben (pg. 407) be-

nutzten Umstande Gebrauch, dass die drei durch 0, 1, ∞ abgeteilten Strecken der reellen z-Axe mit einander coordiniert sind. Es werden also die hier für die eine dieser drei Strecken gemachten Ausführungen ohne weiteres in entsprechender Art von den beiden anderen gelten.

Wir sind solchergestalt zu einem fundamentalen Satze gelangt, der bezeichnet wird als

Princip der Symmetrie: *Hat man durch irgend eine η-Function aus dem System der ∞^3 zusammengehörigen Functionen eine der beiden z-Halbebenen auf ein Kreisbogendreieck abgebildet und nimmt die analytische Fortsetzung dieser Function über eine der drei durch 0, 1, ∞ abgeteilten Strecken der reellen z-Axe in die andere Halbebene vor, so bilden die dabei zu erreichenden Functionswerte die letztere Halbebene auf ein Kreisbogendreieck ab, welches aus jenem ersteren durch Inversion an der zur überschrittenen Strecke gehörenden Seite hervorgeht.* —

Höchst interessante Aufklärungen liefert das Princip der Symmetrie betreffs der Vieldeutigkeit unserer einzelnen Function $\eta(z)$. Wir wissen (pg. 399), dass jeder Zweig $\eta'(z)$ dieser vieldeutigen Function in einem ersten $\eta(z)$ sich so darstellt:

$$\eta'(z) = \frac{a\eta(z) + b}{c\eta(z) + d}.$$

Die verschiedenen Zweige werden hiernach die einzelne z-Halbebene auf lauter kreisverwandte Kreisbogendreiecke abbilden. Wie sind alle diese Kreisbogendreiecke in der η-Ebene gelegen, und wie hängen dieselben mit einander zusammen?

Wir wenden uns zunächst erst wieder zu der particulären η-Function, welche durch (1) pg. 404 resp. (5) pg. 408 gegeben ist, je nachdem l endlich oder unendlich gross ist. Bei einem einmaligen Umlaufe um den Verzweigungspunkt $z = 0$ gelangen wir zu einem neuen Zweige η', welcher mit dem ersten durch die Relation:

$$\eta' = e^{\frac{2i\pi}{l}}\eta \quad \text{bez.} \quad \eta' = \eta + 2i\pi$$

zusammenhängt. Im ersteren Falle gelangen wir nach l-maligem Umlaufe zu dem ersten Zweige η zurück und finden solcherweise die l Zweige $\eta,\ e^{\frac{2i\pi}{l}}\eta,\ e^{2\frac{2i\pi}{l}}\eta, \cdots, e^{(l-1)\frac{2i\pi}{l}}\eta$ mit einander im Zusammenhang. Im letzteren Falle führt kein endlichmaliger Umlauf um $z = 0$ im positiven oder negativen Sinne zum Ausgangszweige η zurück; vielmehr erscheinen jetzt an der betrachteten Stelle die unendlich vielen Zweige $\cdots, \eta - 6i\pi,\ \eta - 4i\pi,\ \eta - 2i\pi,\ \eta,\ \eta + 2i\pi,\ \eta + 4i\pi,\ \eta + 6i\pi, \cdots$ als mit einander zusammenhängend.

Diese Verhältnisse nehmen nun auf Grund des Symmetrieprincips und dank dem Umstande, dass wir λ mit einem Stammbruche $\frac{1}{l}$ gleich nahmen, eine äusserst anschauliche geometrische Gestalt an. Spiegeln wir die Dreiecke der Figur 93 immer wieder an ihren von $\eta = 0$ ausziehenden geradlinigen Seiten, so gelangen wir zu dem in Figur 96 dargestellten Cyclus von $2l$ Dreiecken. Je zwei neben einander liegende Dreiecke dieses Cyclus liefern ein volles Abbild der z-Ebene, wobei das schraffierte Dreieck der positiven Halbebene entspricht. Dass sich der Process der Reproduction der Dreiecke um $\eta = 0$ herum von selber nach $2l$ Schritten schliesst, ist gerade die geometrische Fassung des Satzes, dass man nach l-maligem Umlaufe um $z = 0$ zum Ausgangszweige η zurückgeführt wird.

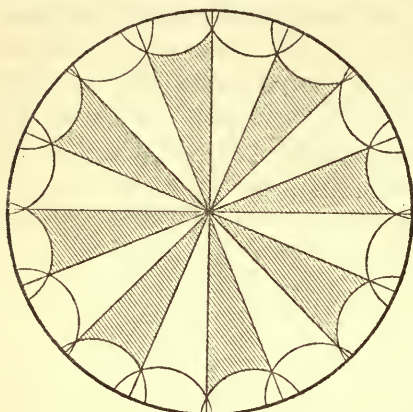


Fig. 96.

Im Falle $l = \infty$ gelangen wir zu Figur 97, die man sich sowohl nach links, wie nach oben und unten unendlich fortgesetzt zu denken hat. Den unendlich vielen nunmehr bei $z = 0$ zusammenhängenden Zweigen entsprechen jetzt Abbilder der z-Ebene, welche sich als Parallelstreifen in der durch die Figur gekennzeichneten Art neben einander reihen.

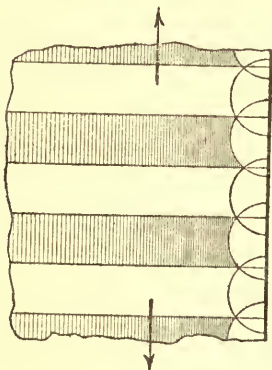


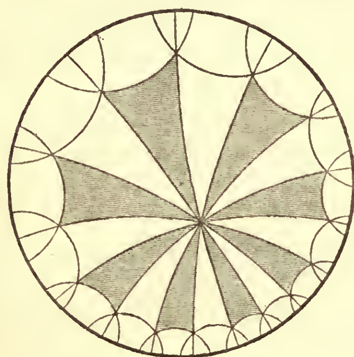
Fig. 97.

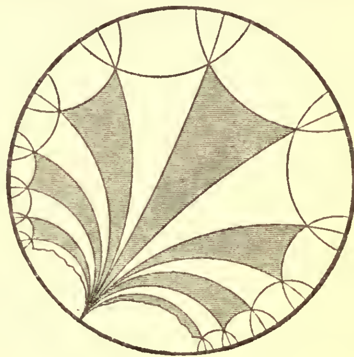
Wir gelangen jetzt wieder zur allgemeinen Auffassung, indem wir die erhaltenen Figuren einer beliebigen Transformation der Kreisverwandtschaft unterwerfen und uns überdies erinnern, dass sich die hier für einen bei $z = 0$ gelegenen Verzweigungspunkt gewonnenen Ergebnisse ohne weiteres auf die bei $z = 1$ und $z = \infty$ gelegenen Verzweigungsstellen übertragen.

Ehe wir zu den kreisverwandten Figuren übergehen, machen wir noch auf den in Figur 96 stark ausgezogenen sogenannten *„Orthogonalkreis“* der Figur aufmerksam. Derselbe steht auf den drei Seiten unseres ersten Kreisbogendreiecks zugleich senkrecht. Man merke den wichtigen Satz an: *Irgend ein Kreisbogendreieck mit einer Winkelsumme*

$< \pi$ *hat stets einen eindeutig bestimmten Orthogonalkreis.* Sind zwei Seiten des Dreiecks gerade, so wird die dritte dem Innern des Dreiecks ihre convexe Seite zukehren, da die Winkelsumme den Betrag π nicht erreicht. In diesem Falle ist der Satz aus der Anschauung direct evident. Infolge des Charakters der Kreisverwandtschaft gilt er dann aber gleich allgemein. Es ist nun sehr bemerkenswert, *dass bei Spiegelung eines Kreisbogendreiecks an einer seiner Seiten der zugehörige Orthogonalkreis in sich selbst übergeht.* Dies ist in Figur 96 bei Spiegelung an einer geradlinigen Seite direct ersichtlich, gilt aber damit gleich wieder allgemein. Übrigens wird man auf Figur 97 alle diese Aussagen ohne weiteres übertragen; der Orthogonalkreis fällt hier im besonderen geradlinig aus.

Im Anschluss an die Figuren 98 und 99 sprechen wir demnach jetzt sogleich folgenden Satz aus: *Hat man durch einen einzelnen*


Fig. 98.


Fig. 99.

Zweig irgend einer particulären η-Function eine der z-Halbebenen auf ein Kreisbogendreieck der Winkel $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ abgebildet und führt man von hieraus Umläufe um eine der Verzweigungsstellen 0, 1 *oder* ∞ *aus, so werden die sich anreihenden Zweige entweder nach Art von Figur* 98 *einen sich von selbst schliessenden im Innern des Orthogonalkreises gelegenen Cyclus von* $2l$ *bez.* $2m$ *oder* $2n$ *Dreiecken liefern, oder wir haben nach Art von Figur* 99 *eine beiderseits unbegrenzte Kette von Dreiecken, die mit einer gemeinsamen Spitze an den Orthogonalkreis heranragen.*

Wir haben nun insoweit Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse gewonnen, dass wir die analytische Fortsetzung der einzelnen Function $\eta(z)$ in der z-Ebene einfach durch die nach dem Princip der Symmetrie zu vollziehende Vervielfältigung eines ersten Dreiecks in der η-Ebene ersetzen. Das hierbei entspringende Netz von Kreisbogen-

dreiecken versinnlicht für den Fall $l = 2$, $m = 4$, $n = 8$ Figur 100 und für $l = 2$, $m = 3$, $n = \infty$ Figur 101 pg. 417. Um die Ecken herum schliesst sich der Reproductionsprocess immer wieder glatt ab. Das Dreiecknetz wächst hierbei fort und fort, *ohne dass eine Lücke im Innern bleibt, aber auch ohne dass irgend zwei Dreiecke hierbei collidieren könnten.* Wie wir sahen, *kann kein Dreieck über den Orthogonalkreis herausragen;* aber zugleich zeigt eine etwas tiefer gehende Betrachtung,

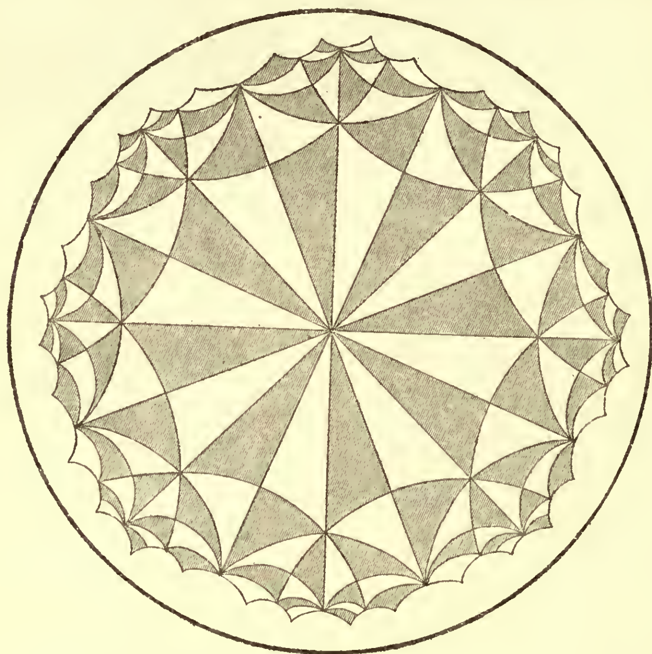


Fig. 100.

dass schliesslich das ganze Innere des Orthogonalkreises vollständig und überall einfach mit Dreiecken bedeckt erscheint, welche gegen jede Stelle des Orthogonalkreises hin unendlich klein werden.

Die wunderbaren so erhaltenen Figuren werden zur Quelle höchst wichtiger weiterer Folgerungen über die Natur unserer Functionen $\eta(z)$. Wir greifen vor allem nochmals auf die unendlich vielblättrige Fläche von pg. 402 u. f. zurück, in welcher η eindeutig war. *Wir erkennen in unserem das Innere des Orthogonalkreises gerade einfach und vollständig bedeckenden Dreiecknetze nunmehr das conforme Abbild jener unendlich-blättrigen Fläche.* Jedes schraffierte Dreieck des Netzes entspricht dabei einem positiven z-Halbblatte, jedes freie einem negativen. Die einfache Bedeckung des Orthogonalkreisinnern und das Verhalten des

Netzes an seinem Rande aber liefern den Fundamentalsatz: *Die zu $\eta(z)$ inverse Function $z(\eta)$ besitzt als Definitionsbereich (cf. pg. 136) das Innere des Orthogonalkreises und ist im Innern dieses Bereiches eine „eindeutige“ Function; jeder Punkt des Orthogonalkreises selber hat den Charakter einer wesentlich singulären Stelle von $z(\eta)$, so dass dieser Kreis eine „natürliche Grenze“ unserer Function vorstellt (cf. pg. 136 und 140).* In der That finden sich ja in jeder noch so kleinen Umgebung eines

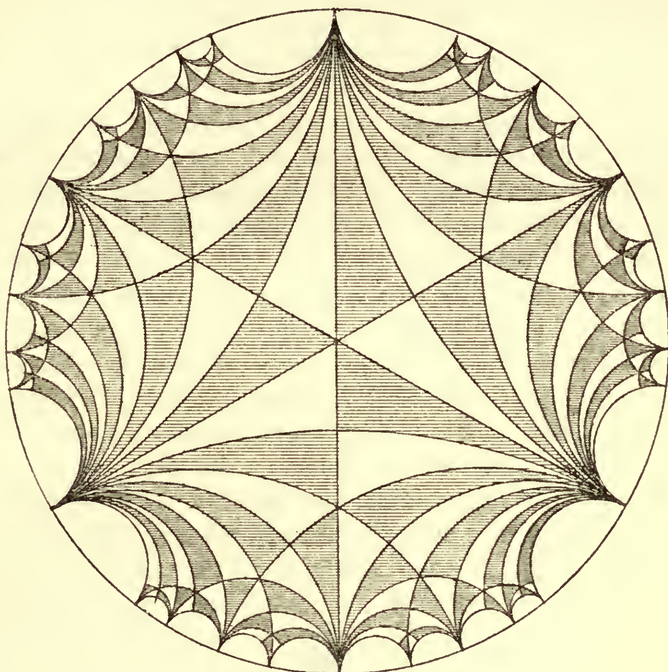


Fig. 101.

Punktes der Peripherie des Orthogonalkreises unendlich viele Dreiecke des Netzes, so dass $z(\eta)$ in dieser Umgebung noch jedem willkürlich vorgeschriebenen complexen Werte unendlich oft beliebig nahe kommt (cf. pg. 149). —

Als Beispiel betrachten wir diejenige besondere Function $\eta(z)$, welche durch den Periodenquotienten ω des elliptischen Integrals erster Gattung in Abhängigkeit vom Integralmodul k^2 geliefert wurde. Am Schlusse von § 18 pg. 410 bemerkten wir bereits, dass die einzelne Halbebene von $z = k^2$ durch $\omega(k^2)$ auf ein Kreisbogendreieck mit drei Winkeln 0 abgebildet werde. Es entspringt aus (6) und (8) pg. 394 für $\omega(k^2)$ die Darstellung:

(3) $$\omega = \frac{4i}{\pi}\log 2 - \frac{i}{\pi}\log(k^2) - \frac{i}{\pi}\frac{F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)},$$

wobei die Reihe $F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2\right)$ durch Formel (5) pg. 387 gegeben ist. Man liest hieraus leicht ab, dass die Strecke von $k^2 = 0$ bis $k^2 = 1$ der reellen Axe von k^2 sich auf die rein imaginäre ω-Axe von $+i\infty$ beginnend abbildet. Das Abbild dieser Strecke der reellen k^2-Axe reicht aber bis $k^2 = 0$. Aus (9) pg. 235 folgt nämlich:

(4) $$\sqrt[4]{1-k^2} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}$$

als eine für alle q mit $|q| < 1$ gültige Gleichung. Durchlaufen wir jetzt die imaginäre ω-Axe von $+i\infty$ bis 0, so wächst q als reelle positive Grösse von 0 bis 1, und also wird zufolge (4) der Wert k^2 gleichfalls von 0 bis 1 wachsen. Man führe nun einen einfachen Umlauf um den Verzweigungspunkt $k^2 = 0$ aus und wird aus (3) finden, dass wir hierbei von $\omega(k^2)$ zum Zweige $\omega' = \omega + 2$ geführt werden.

Indem wir diese Ergebnisse zusammenfassen, gelangen wir zu einem der Figur 97 pg. 414 entsprechenden Abbilde der Ebene von k^2. Die Breite eines aus zwei Dreiecken bestehenden Streifens ist nach dem, was wir soeben fanden, gleich 2 und also die Breite des einzelnen Dreiecks gleich 1. Merken wir demnach den Satz an: *Der durch Formel* (3) *gegebene erste Zweig der unendlich vieldeutigen Function* $\omega(k^2)$ *bildet die positive k^2-Halbebene auf ein Dreieck der Eckpunkte* $\omega = +i\infty$, 0 *und* 1 *ab; der zugehörige Orthogonalkreis ist die reelle ω-Axe.* Von hieraus liefert nun das Symmetrieprincip die in Figur 102 skizzierte Einteilung der positiven ω-Halbebene in ein Netz von Kreisbogendreiecken, von denen jedes einzelne ein Abbild einer Halbebene von k^2 ist. *Umgekehrt wird $k^2(\omega)$ eine eindeutige Function von ω, deren Definitionsbereich die gesamte positive Halbebene von ω ist, und für welche die reelle ω-Axe eine natürliche Grenze ist.* Diesem Ergebnis entspricht es, dass wir allererst bei der Einführung der Perioden ω_1, ω_2 (cf. pg. 176) die Festsetzung treffen mussten, dass der Quotient ω eine complexe Zahl mit positivem imaginären Bestandteile sein sollte.

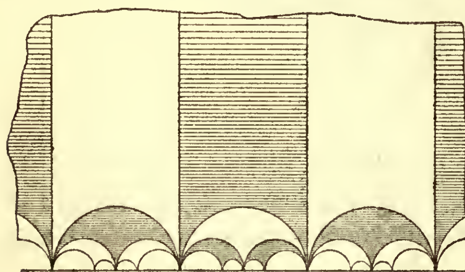


Fig. 102.

Die grosse Bedeutung, welche die hier gewonnenen Dreiecksnetze

für die Theorie der elliptischen Modulfunctionen und der allgemeinen automorphen Functionen besitzen, kann hier leider nicht näher erörtert werden. Man findet alles Weitere in den pg. 172 genannten Vorlesungen über die fraglichen Functionen.

Endlich soll noch erwähnt werden, dass der Erste, der zur Betrachtung unserer Dreiecknetze hingeführt wurde, Gauss gewesen ist. Derselbe erkannte zunächst die Bedeutung des hier in Figur 102 gezeichneten Netzes für die zwischen dem Periodenquotienten ω und dem Modul k^2 bestehende Abhängigkeit. Es ist aber unzweifelhaft, dass Gauss die Natur der Dreiecknetze von diesem ersten Beispiel aus sehr allgemein erkannt hat. So hat sich z. B. im Nachlasse auch eine Zeichnung gefunden, welche mit dem hier unter Figur 100 dargestellten Netze nahe verwandt ist; und verschiedene Notizen weisen auf einen vielseitigen Gebrauch hin, den Gauss von diesen Figuren gemacht hat*). Auch Riemann wurde bei verschiedenen Gelegenheiten in Abhandlungen und Vorlesungen**) zum Symmetrieprincip und den besprochenen Dreiecknetzen hingeführt, für deren functionentheoretische Bedeutungen in seinen Schöpfungen fast alle grundlegenden Gesichtspunkte enthalten sind. Mit grösserer Ausführlichkeit und im Zusammenhange aber finden sich diese Gegenstände erst in der schon genannten Abhandlung von Schwarz untersucht.

§ 20. Angaben über irreguläre Punkte von Differentialgleichungen mit wesentlich singulärem Charakter der $L(z - z_0)$.

Nach den vorstehenden Ausführungen über die hypergeometrische Differentialgleichung kehren wir nochmals zu den allgemeinen Erörterungen von § 8 ff. (pg. 364 ff.) zurück. Wir hatten dort für die Entwicklung der n Integrale eines Fundamentalsystems im Bereiche eines damals um einen Punkt z_0 herumgelegten Kreisringes den Ansatz (4) pg. 365 bez. (5) pg. 367 gewonnen, wo die $L(z - z_0)$ Laurent'sche Reihen waren, die im fraglichen ringförmigen Bereiche convergent waren.

Umschliesst der Kreisring nur einen einzigen irregulären Punkt z_0, und ist die zu demselben gehörende determinierende Gleichung vom n^{ten} Grade, so ist die vollständige Integration der Differentialgleichung für die Umgebung von z_0 nach den Entwicklungen von pg. 370 ff. durchführbar. Ist der Grad der determinierenden Gleichung $< n$, oder liegen in dem vom Kreisring umschlossenen Bereiche mehrere, ja vielleicht unendlich viele irreguläre Punkte irgend welcher Art, so bleiben

*) Man vergl. Gauss' Werke Bd. 8 pg. 104 u. f.

**) Siehe z. B. die historischen Angaben F. Klein's in den Göttinger Nachrichten von 1897 pg. 189.

zunächst nur die Ansätze von § 8 (pg. 364) bestehen. Die hierbei auftretenden Exponenten ϱ waren nur erst bis auf additive ganze Zahlen bestimmt, und vor allem sind sie zunächst unbekannt; denn ihre Berechnung nach pg. 356 und 365 erfordert bereits die Kenntnis eines Fundamentalsystems. Ebenso sind die Coefficienten in den Laurent'schen Entwicklungen $L(z - z_0)$ unbekannt.

Es existiert nun eine sehr interessante Methode zur Berechnung der Exponenten ϱ und der zuletzt genannten Entwicklungscoefficienten. Einige Angaben über diese Methode werden hier am Platze sein; wegen der weiteren Ausführungen soll aber auf die Originalarbeiten verwiesen werden.

Die Differentialgleichung können wir leicht (cf. pg. 355) auf die Gestalt bringen:

$$(1) \quad \frac{d^n Z}{dz^n} + P_2(z)\frac{d^{n-2}Z}{dz^{n-2}} + P_3(z)\frac{d^{n-3}Z}{dz^{n-3}} + \cdots + P_n(z)\,Z = 0.$$

Wir nehmen an, dass die $P_k(z)$ im zu Grunde liegenden ringförmigen Bereiche eindeutig und überall regulär sind; es wird alsdann $P_k(z)$ daselbst in die convergente Laurent'sche Reihe:

$$(2) \quad P_k(z) = \cdots + p_{-2}^{(k)}\zeta^{-2} + p_{-1}^{(k)}\zeta^{-1} + p_0^{(k)} + p_1^{(k)}\zeta + p_2^{(k)}\zeta^2 + \cdots$$

entwickelbar sein, wo wie oben $(z - z_0)$ abgekürzt durch ζ bezeichnet ist. Es existiert alsdann jedenfalls ein Integral Z, welches durch die im Kreisring gleichfalls convergente Reihe:

$$(3) \quad Z = \cdots + a_{-2}\zeta^{\varrho-2} + a_{-1}\zeta^{\varrho-1} + a_0\zeta^{\varrho} + a_1\zeta^{\varrho+1} + a_2\zeta^{\varrho+2} + \cdots$$

darstellbar ist.

Wir wollen nun zunächst die Bedingungen aufstellen, unter denen die Reihe (3), in die Differentialgleichung eingetragen, derselben Genüge leistet. In üblicher Weise wird man jedes Glied auf der linken Seite von (1) vermöge der Ansätze (2) und (3) ausdrücken und daraufhin die ganze linke Seite der Gleichung (1) nach Potenzen von ζ anordnen. Der Coefficient der einzelnen Potenz $\zeta^{\varrho+m-n}$ nimmt dabei selbst die Gestalt einer unendlichen Reihe an; und indem wir dieselbe, um der Differentialgleichung zu genügen, gleich null setzen, gelangen wir für $m = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ zu den unendlich vielen Relationen:

$$(4) \quad \begin{aligned} & a_m(\varrho+m)(\varrho+m-1)\cdots(\varrho+m-n+1) \\ & + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_\mu \big[(\varrho+\mu)(\varrho+\mu-1)\cdots(\varrho+\mu-n+3)\,p_{m-\mu-2}^{(2)} \\ & \quad + (\varrho+\mu)(\varrho+\mu-1)\cdots(\varrho+\mu-n+4)\,p_{m-\mu-3}^{(3)} + \cdots \\ & \quad + (\varrho+\mu)\,p_{m-\mu-n+1}^{(n-1)} + p_{m-\mu-n}^{(n)}\big] = 0, \end{aligned}$$

durch welche ϱ und die a an die bekannten Coefficienten p gebunden sind.

Die einzelne unserer so erhaltenen Gleichungen ist in den $\cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots$ linear und homogen. Dabei ist der Coefficient von a_m:

$$(\varrho+m)(\varrho+m-1)\cdots(\varrho+m-n+1)$$
$$+(\varrho+m)(\varrho+m-1)\cdots(\varrho+m-n+3)p^{(2)}_{-2}+\cdots+(\varrho+m)p^{(n-1)}_{-n+1}+p^{(n)}_{-n};$$

derselbe stellt also in ϱ eine rationale ganze Function n^{ten} Grades dar. Der Coefficient von a_μ für $\mu \gtrless m$ aber ist:

$$(\varrho+\mu)(\varrho+\mu-1)\cdots(\varrho+\mu-n+3)\,p^{(2)}_{m-\mu-2}$$
$$+(\varrho+\mu)\cdots(\varrho+\mu-n+4)\,p^{(3)}_{m-\mu-3}+\cdots+p^{(n)}_{m-\mu-n}$$

und steigt somit in ϱ nur auf den Grad $(n-2)$ an. Wir wollen die Gleichung (4) zur Vereinfachung durch den eben angegebenen Coefficienten von a_m teilen und bezeichnen in der neuen Gleichung den Coefficienten von a_μ durch $A^{(m)}_\mu(\varrho)$. Wir haben alsdann in den $A^{(m)}_\mu(\varrho)$ lauter rationale Functionen n^{ten} Grades von ϱ, für welche man sofort die Relation zeigt:

$$A^{(m)}_\mu(\varrho+1)=A^{(m+1)}_{\mu+1}(\varrho). \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) nehmen jetzt die einfache Gestalt an:

$$(6)\quad \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots+A^{(-1)}_{-2}a_{-2}+a_{-1}+A^{(-1)}_0a_0+A^{(-1)}_1a_1+A^{(-1)}_2a_2+\cdots=0, \\ \cdots+A^{(0)}_{-2}a_{-2}+A^{(0)}_{-1}a_{-1}+a_0+A^{(0)}_1a_1+A^{(0)}_2a_2+\cdots=0, \\ \cdots+A^{(1)}_{-2}a_{-2}+A^{(1)}_{-1}a_{-1}+A^{(1)}_0a_0+a_1+A^{(1)}_2a_2+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Es war ein sehr interessanter Gedanke des amerikanischen Astronomen Hill, auf die Auflösung eines solchen Gleichungssystems nach den unendlich vielen Unbekannten a die Sätze der auf endlich viele Gleichungen und Unbekannte bezogenen Determinantentheorie zu übertragen*). Hill wurde zu diesen Untersuchungen von Seiten der Störungstheorie geführt, wo gewisse Differentialgleichungen zweiter Ordnung

---

*) Man sehe die Abhandlung „*On the part of the motion of the lunar perigee, which is a function of the mean motions of the sun and moon*“ Cambridge (U. S.) 1877, wieder abgedruckt in Bd. 8 der Acta mathem. (1886).

unserer Art grundlegend sind*). Es wird vor allem die Frage sein, was wir unter der *„unendlichen Determinante“*:

$$
(7)\quad \Omega(\varrho) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots, & A_{-2}^{(-1)}(\varrho), & 1, & A_{0}^{(-1)}(\varrho), & A_{1}^{(-1)}(\varrho), & A_{2}^{(-1)}(\varrho), & \cdots \\ \cdots, & A_{-2}^{(0)}(\varrho), & A_{-1}^{(0)}(\varrho), & 1, & A_{1}^{(0)}(\varrho), & A_{2}^{(0)}(\varrho), & \cdots \\ \cdots, & A_{-2}^{(1)}(\varrho), & A_{-1}^{(1)}(\varrho), & A_{0}^{(1)}(\varrho), & 1, & A_{2}^{(1)}(\varrho), & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}
$$

unseres Gleichungssystems (6) verstehen wollen. Kürzen wir zu diesem Zwecke den Ansatz (7) auf die $(2\nu + 1)$-gliedrige gewöhnliche Determinante:

$$
(8)\qquad \Omega_{\nu} = \begin{vmatrix} 1, & A_{-\nu+1}^{(-\nu)}, \cdot\cdot, & A_{0}^{(-\nu)}, \cdot\cdot, & A_{\nu}^{(-\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{-\nu}^{(0)}, & A_{-\nu+1}^{(0)}, \cdot\cdot, & 1, \quad \cdot\cdot, & A_{\nu}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{-\nu}^{(\nu)}, & A_{-\nu+1}^{(\nu)}, \cdot\cdot, & A_{0}^{(\nu)}, \cdot\cdot, & 1 \end{vmatrix},
$$

so werden wir unter Ω den Grenzwert von Ω_{ν} für lim. $\nu = \infty$ verstehen, wenn anders bei diesem Grenzübergange eine endliche und bestimmte Grenze Ω herauskommt. Man sagt in diesem Falle, die Determinante (7) convergiere; und man hat übrigens dank dem Umstande, dass die Diagonalglieder in (7) alle gleich 1 sind, die einfache Convergenzbedingung, dass die unendliche Reihe aller nicht in der Diagonale stehenden Glieder $A_{\mu}^{(m)}$ unbedingt convergent sein muss.

In unserem Falle ist diese Convergenzbedingung thatsächlich erfüllt. Ja noch mehr, *es stellt $\Omega(\varrho)$ eine „analytische Function“ von ϱ dar, welche der Relation* (5) *entsprechend die Periode* 1 *besitzt.* Grenzt man in der Ebene der complexen Variabelen ϱ in der Richtung der imaginären Axe Parallelstreifen von der Breite 1 ein (jener Periode 1 entsprechend), so lässt sich überdies zeigen, dass die Function $\Omega(\varrho)$ in jedem Streifen n Pole aufweist, welche man durch Nullsetzen der oben namhaft gemachten Coefficienten von a_m in den Gleichungen (4) zu bestimmen hat. In der That werden ja für das einzelne solche ϱ immer die Glieder einer Horizontalreihe in (7), abgesehen vom Diagonal-

*) Vergl. die äusserst inhaltreiche Abhandlung von H. Burkhardt *„Über einige mathematische Resultate neuerer astronomischer Untersuchungen, insbesondere über irreguläre Integrale linearer Differentialgleichungen“* in den „Mathematical papers read at the international mathematical congress in Chicago 1893“ (New York, bei Mac Millan & Co., 1896).

gliede 1 unendlich. Es gilt endlich der Satz, dass $\Omega(\varrho)$ in dem einzelnen der genannten Streifen n Nullstellen hat.

Man hat den einfachsten Fall, wenn diese Pole und Nullpunkte sämtlich getrennt liegen. Alsdann werden wir auf den Ansatz (4) pg. 365 zurückgeführt und wollen unter $\varrho_1, \varrho_2, \cdot\cdot, \varrho_n$ etwa die Nullstellen verstehen, deren reelle Bestandteile nicht negativ und < 1 sind. Nach Eintragen des einzelnen dieser Werte ϱ in (7) finden wir dann ein zugehöriges System nicht durchgängig verschwindender Lösungen $\cdot\cdot, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots$ von (6), indem wir die bezüglichen Regeln der gewöhnlichen Determinantentheorie auf die unendliche Determinante (7) übertragen.

Man findet eine erschöpfende Behandlung dieser wichtigen Entwicklungen in zwei Abhandlungen von H. von Koch*), deren erste mit der Untersuchung des eben erwähnten einfachen Falles abschliesst, während in der zweiten der allgemeinste Fall eines mit Logarithmen behafteten Fundamentalsystems (cf. (5) pg. 367) seine Erledigung findet. Bereits 1886 hatte Poincaré übrigens den bei Hill vorliegenden Specialfall einer genaueren Prüfung und Rechtfertigung unterzogen**).

Während die soeben skizzierte Methode im unmittelbaren Anschlusse an die allgemeinen Ansätze von § 8 pg. 364 ff. eine directe und in praxi brauchbare Regel zur angenäherten Berechnung der Integrale im Kreisring enthält, liegen weitere von jenen allgemeinen Ansätzen mehr oder minder abweichende Untersuchungen über Darstellungsformen der Integrale in der Nähe irregulärer Punkte vor, welche die Fuchs'schen Methoden von pg. 370 ff. im Falle ihrer Nichtanwendbarkeit ersetzen sollen. In dieser Hinsicht haben gewisse von Thomé***) eingeführte sogenannte „Normalreihen" ein besonderes Interesse erregt, namentlich wegen der Aufklärungen, welche Poincaré†) über diese Reihen und ihre Brauchbarkeit zur Darstellung von Integralen gegeben hat.

Wir legen einen einzelnen irregulären Punkt, der sich nach § 11 nicht erledigen lässt, nach $z = \infty$ und nehmen an, dass die Coeffi-

---

*) *„Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires"*, Acta mathemat. Bd. 15 (1891) und *„Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires"*, Acta mathemat. Bd. 16 (1892).

**) *„Sur les déterminants d'ordre infini"*, Bulletin de la soc. mathém. de France Bd. 14 (1886).

***) Man vergl. unter den zahlreichen Abhandlungen Thomé's *„Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen"* in den Bänden 74 ff. des Journals für Mathem. namentlich diejenige in Bd. 95 pg. 44 ff. (1883).

†) *„Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires"*, Acta Mathem. Bd. 8 (1886).

cienten $P_k(z)$ der Differentialgleichung ganze rationale Functionen in z seien. Alsdann zeigt Thomé, dass man die Differentialgleichung unter gewissen Voraussetzungen durch n Reihen von der Gestalt:

$$(9) \qquad e^{G(z)} z^{\sigma} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots \right)$$

„formal" befriedigen kann, wo bei der einzelnen solchen „Normalreihe" σ ein constanter Exponent und $G(z)$ eine rationale ganze Function von z ist. Aber diese Reihen erwiesen sich im allgemeinen als divergent, und damit drohte zunächst die Brauchbarkeit des analytischen Ansatzes (9) verloren zu gehen. Jedoch erkannte Poincaré, dass man es hier mit *„semiconvergenten" Reihen* zu thun hat, welche, sofern man z in bestimmter Richtung ins Unendliche führt, zur *„asymptotischen"* Darstellung der Integrale unserer Differentialgleichung geeignet sind.

Es muss genügen, auf diese Entwicklungen hier kurz hingewiesen zu haben. Man wird zur Kenntnisnahme derselben neben den genannten Originalarbeiten von Thomé und Poincaré namentlich auch die Darstellung, welche Picard von diesen Gegenständen gegeben hat, mit Vorteil benutzen*). Allgemein verweisen wir wegen dieser und sonstiger Integrationsmethoden auf das pg. 339 genannte Handbuch Schlesinger's**); einen kurzen aber sehr brauchbaren Überblick giebt Burkhardt in seiner pg. 422 genannten Abhandlung.

---

*) Traité d'analyse, t. III pg. 372 ff. (Paris, 1896).

**) Bd. 1, sechster Abschnitt pg. 272 ff.

Siebentes Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren Variabelen.

Ist die Anzahl der Variabelen in einer Differentialgleichung oder in einem Systeme von Differentialgleichungen grösser als zwei, so hat man eine Reihe verschiedener Möglichkeiten zu unterscheiden, je nach der Anzahl der Variabelen, welche als unabhängig gelten. Hat man z. B. nur eine unabhängige und n abhängige Variabele und liegt zur Bestimmung der letzteren ein System von n Gleichungen vor, in denen neben den $(n+1)$ Variabelen auch noch die Differentialquotienten erster Ordnung der n abhängigen Variabelen in Bezug auf die unabhängige vorkommen, so sprechen wir von einem *„System simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung“*. Oder liegen z. B. n unabhängige Variabele und eine einzige abhängige vor und hat man zur Bestimmung der letzteren eine Gleichung, in der neben den $(n+1)$ Variabelen noch die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der abhängigen Variabelen in Bezug auf die unabhängigen enthalten sind, so spricht man von einer *„partiellen Differentialgleichung erster Ordnung“*.

Im ersten und zweiten Kapitel haben wir bereits verschiedene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung kennen gelernt, welche durch Fourier'sche Reihen bez. durch Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten, integrabel waren. Die nachfolgenden Entwicklungen gelten der systematischen Theorie der Differentialgleichungen *erster* Ordnung, welche äusserst vielseitig entwickelt ist und durch ihre Beziehungen zur Geometrie und Dynamik grosses Interesse darbietet.

Der Erste, der über die verschiedenen Arten von Integralen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung grundlegende Theoreme aufgestellt hat, ist Lagrange*) gewesen. Seine Hauptleistung ist die

---

*) *„Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre“*, Abhandl. der Berliner Akad. von 1772; *„Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires“*, Abhandl. der Berliner Akad. von 1785.

Zurückführung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit drei Variabelen auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Durchführung der gleichen Reduction bei beliebig vielen Variabelen, falls die partiellen Ableitungen der gesuchten Function nur linear in der Gleichung enthalten sind. Monge hat durch geometrische Deutung der auf drei Variabele bezogenen Lagrange'schen Entwicklungen und durch Ausbildung des Begriffs *„Charakteristik"* nicht nur das Verständnis der Untersuchung von Lagrange befördert, sondern zugleich durch Aufnahme der *geometrischen Denkweise* eines der allerwertvollsten Hülfsmittel für die Ausbildung der Theorie der Differentialgleichungen geschaffen*).

Den nächsten Fortschritt bedeutet die 1814 erschienene Arbeit von Pfaff *„Methodus generalis aequationes differentiarum partialium nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles complete integrandi"* **). Hier wird die Lösung jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Variabelen auf die Integration einer Reihe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen reduciert.

Fünf Jahre nach dem Erscheinen der Pfaff'schen Arbeit beginnt Cauchy erfolgreich in die Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen einzugreifen. Derselbe gab 1819 eine gegenüber Pfaff ganz bedeutend vereinfachte Integrationsmethode einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Variabelen***). Von grundlegender Bedeutung für die gesamte Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen wurden aber vor allem die von Cauchy entwickelten strengen Existenzbeweise der Integrale†).

Sehr wertvolle Bereicherungen verdankt die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen den vielseitigen Forschungen Jacobi's. Es handelt sich dabei zunächst um selbständige Weiter-

---

*) Monge's grundlegendes Werk *„Applications de l'analyse à la géométrie"* ist zuerst 1795 erschienen; die fünfte (von Liouville corrigierte) Auflage stammt aus dem Jahre 1850.

**) Abhandl. der Berliner Akad. von 1814—1815.

***) Siehe das Bulletin de la Société Philomatique von 1819 pg. 10 ff. Die betreffende Abhandlung ist in vervollständigter Gestalt dem 2ten Bande der *„Exercices d'analyse et physique mathématique"* (1841) eingefügt.

†) Man sehe eine lange Reihe von Artikeln in den Comptes rendus, die in den Band 7 der ersten Serie von Cauchy's „Oeuvres complètes" aufgenommen sind, und welche den von Cauchy sobenannten *„Calcul des limites"* behandeln. Vergl. auch die *„Leçons sur le calcul différentiel"*, herausgegeben von Moigno (1840 ff.).

bildung von Integrationsmethoden, welche den Entwicklungen von Pfaff und Cauchy mehr oder minder nahe stehen*). Von besonderer Wichtigkeit war überdies die Einführung der „*Functionaldeterminanten*“**) und die Ausbildung der damit im Zusammenhange stehenden „*Multiplicatorentheorie*“***). Viele von diesen Schöpfungen findet man im Zusammenhange dargestellt in Jacobi's berühmten „*Vorlesungen über Dynamik*“†), in welchen der bereits von Hamilton bemerkte Zusammenhang aller dynamischen Probleme mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zur ausführlichen Behandlung gelangt.

Die nachfolgende kurze und nur zur Einführung dienende Darstellung wird über den hiermit geschilderten Stand der Entwicklung der Differentialgleichungen erster Ordnung nicht hinausgehen können. In der neueren Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen treten namentlich eine Reihe wertvoller Arbeiten von A. Mayer mit vereinfachten Integrationsmethoden hervor; und es ist vor allem das unvergängliche Verdienst von S. Lie, dass er die ganze Lehre von den partiellen Differentialgleichungen von Grund auf umgestaltet und vervollkommnet hat. Durch schärfere Fassung früher schon vorhandener Definitionen und durch Einführung resp. Vervollkommnung zahlreicher neuer Grundbegriffe, desjenigen der infinitesimalen Transformation, der continuierlichen Gruppe, der Differentialinvariante u. s. w., hat Lie der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine systematische Gestalt und natürliche Umgrenzung verliehen und dabei zugleich den Blick auf zahlreiche neue Probleme gelenkt.

Eine vorzügliche Darstellung der Lie'schen Schöpfungen, sowie überhaupt der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung findet man in E. Goursat's „*Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*“††).

---

*) Man vergl. eine Reihe bezüglicher Abhandlungen, welche im Bande 4 von Jacobi's gesammelten Werken zusammengestellt sind; siehe ausserdem „*Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*“, Journ. f. Mathem. Bd. 60 oder Ges. Werke, Bd. 5.

**) „*De determinantibus functionalibus*“, Journ. f. Mathem. Bd. 22 (1841).

***) „*Theoria nova multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi*“, Journ. f. Mathem., Bde. 27 und 29 (1844 und 1845).

†) Gehalten zu Königsberg im Wintersemester 1842—1843, herausgegeben von Clebsch (1866), wiederabgedruckt als Supplementband zu Jacobi's gesammelten Werken.

††) Bearbeitet von C. Bourlet, in's Deutsche übersetzt von H. Maser (Leipzig 1893).

§ 1. Einführung der Functionaldeterminanten.

Es seien x und y zwei von einander unabhängige complexe Veränderliche. Unter u und v verstehen wir zwei Functionen von x und y, welche gegeben seien durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Es soll hier die Frage der Auflösbarkeit dieser beiden Gleichungen nach x und y discutiert werden.

Wir nehmen zuvörderst an, dass zwischen u und v eine Gleichung identisch, d. i. für alle Wertepaare x, y bestehe. Diese Gleichung soll natürlich beide Grössen u und v enthalten (da sie anderenfalls eine Relation zwischen den beiden als unabhängig vorausgesetzten Variabelen x und y darstellen würde), und sie wird demgemäss auch durch Auflösung nach v in die Gestalt:

$$(2) \qquad v = \Phi(u)$$

gesetzt werden können. Nun genügen wir bei irgend einem speciellen Werte u_0 der ersten Gleichung (1) durch eine unendliche Mannigfaltigkeit von Wertepaaren x, y. Soll eines dieser Paare x, y auch die zweite Gleichung (1) befriedigen, so muss der zugehörige Wert v zufolge (2) gleich $\Phi(u_0) = \Phi[\varphi(x, y)]$ sein. Dann aber befriedigt jedes jener unendlich vielen Paare x, y beide Gleichungen (1), da die Gleichung $\psi(x, y) = \Phi[\varphi(x, y)]$ in x, y identisch besteht. Im Falle des Geltens einer Relation zwischen u und v lassen sich somit x, y nicht aus den Gleichungen (1) berechnen.

Wir nehmen zweitens an, die Auflösung sei möglich. Dann wird y wenigstens in einer der beiden Gleichungen (1) auftreten, da anderenfalls die Elimination von x auf eine identische Gleichung zwischen u und v führen würde. Kommt y etwa in der ersten Gleichung vor, so können wir aus dieser y als Function von x und u berechnen:

$$(3) \qquad y = \chi(x, u).$$

Substituieren wir diesen Ausdruck von y in die zweite Gleichung, so folgt:

$$(4) \qquad v = \psi[x, \chi(x, u)].$$

Fällt nun hier rechter Hand x von selbst heraus, so liegt in (4) eine Relation zwischen u und v vor, und wir kommen auf unsere erste Annahme zurück. Bleibt aber x in der Gleichung (4) enthalten, so können wir dieselbe nach x auflösen und haben damit die Berechnung von x und y aus (1) durchgeführt.

Hiernach haben wir die beiden sich gegenseitig ausschliessenden Fälle: *Die Gleichungen* (1) *sind entweder nach x und y auflösbar und heissen dann, ebenso wie die Functionen φ und ψ, von einander unabhängig, oder es besteht zwischen u und v eine in x, y identische Relation, in welchem Falle wir die beiden Gleichungen* (1) *oder auch die Functionen φ und ψ von einander abhängig nennen.*

Diese beiden Fälle kann man sehr leicht vermöge der nachfolgenden zweigliedrigen Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{5}$$

charakterisieren, welche wir als die *„Functionaldeterminante" der Functionen u, v in Bezug auf die Variabelen x, y* benennen und abgekürzt durch:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tag{6}$$

bezeichnen wollen. Es besteht nämlich einfach das Theorem: *Die Functionen $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ sind abhängig oder unabhängig von einander, je nachdem die Functionaldeterminante* (5) *identisch verschwindet oder nicht.*

Im Falle der Gültigkeit einer Relation (2) hat man in der That:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \Phi'(u)\frac{\partial u}{\partial y},$$

so dass das identische Verschwinden der Determinante (5) selbstverständlich ist. Liegt aber keine Relation vor, so leite man den Auflösungsprocess der Gleichungen (1) nach x und y wie oben ein und gebe der Gleichung (4) die Gestalt:

$$v = \Psi(x, u),$$

wobei $\Psi(x, u)$ von x nicht unabhängig sein kann und andererseits, wie oben, die Annahme eines von y nicht unabhängigen u gültig ist. Aus der letzten Gleichung folgt nun:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

und hier ist, wie gerade bemerkt wurde, keiner der beiden rechts auftretenden Factoren identisch null. Wir haben somit in diesem Falle thatsächlich eine nicht identisch verschwindende Functionaldeterminante.

Die vorstehenden Erörterungen lassen sich nun leicht ganz allgemein fassen. Es seien n von einander unabhängige complexe Variabele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gegeben, und es mögen n Functionen derselben $u_1, u_2, \cdots, u_n$ durch die Gleichungen:

$$(7) \qquad u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

vorgelegt sein.

Besteht zwischen diesen Functionen wenigstens eine identische Relation, welche also für alle Wertsysteme der x erfüllt ist, so nehmen wir an, dass u_n in dieser Relation enthalten ist, und denken dieselbe in die Gestalt gesetzt:

$$(8) \qquad u_n = \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}).$$

In diesem Falle sind die Gleichungen (1) nicht nach den x auflösbar. Giebt man nämlich $u_1, \cdots, u_{n-1}$ an, so werden die ersten $(n-1)$ Gleichungen (7) noch durch eine unendliche Mannigfaltigkeit von Wertsystemen $x_1, \cdots, x_n$ befriedigt. Soll irgend eines derselben der letzten Gleichung genügen, so ist der zugehörige Wert u_n an die Relation (8) gebunden. Ist dies aber der Fall, so wird nicht nur ein einzelnes, sondern alle jene Wertsysteme werden auch die letzte Gleichung (7) erfüllen, so dass die $x_1, \cdots, x_n$ aus (7) nicht berechenbar sind.

Beginnen wir andererseits den Auflösungsprocess, indem wir eine erste Gleichung nach x_1 auflösen, den so zu gewinnenden Ausdruck von x_1 in die $(n-1)$ übrigen Gleichungen eintragen, eine derselben alsdann nach x_2 lösen u. s. w., so sind zwei Fälle möglich. Entweder können wir thatsächlich alle $x_1, x_2, \cdots, x_n$ als Functionen der $u_1, u_2, \cdots, u_n$ berechnen; oder wir gelangen vor Abschluss des Auflösungsprocesses zu einer Gleichung, aus der die noch restierenden x von selbst herausfallen, und die demgemäss eine identische Relation zwischen den u darstellt. Die letztere Möglichkeit führt auf den zuvor besprochenen Fall.

Somit hat man auch hier nur die beiden sich ausschliessenden Fälle zu unterscheiden: *Entweder sind die Gleichungen* (7) *nach den* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *auflösbar, und sie heissen alsdann ebenso wie die Functionen* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ *von einander unabhängig in Bezug auf* $x_1, x_2, \cdots, x_n$; *oder es besteht zwischen den* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *eine identische Relation, wo wir alsdann die Gleichungen* (7) *wie auch die Functionen* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ *als abhängig bezeichnen.*

Die abkürzende Bezeichnung und Definition der *„Functionaldeterminante“ der $u_1, u_2, \cdots, u_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_n$* geben wir durch:

$$(9) \qquad \frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante wird im Falle des Bestehens einer Relation (8) in den $x_1, \cdots, x_n$ identisch verschwinden; denn alsdann gelten für die Glieder der letzten Horizontalreihe die Darstellungen:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}.$$

Etwas umständlicher ist der Beweis des umgekehrten Satzes, dass im Falle der Unabhängigkeit der Functionen $u_1, \cdots, u_n$ die Functionaldeterminante sicher nicht mit null identisch ist. Für $n = 2$ ist unsere Behauptung vorhin vollständig bewiesen. Der allgemeine Beweis gelingt daraufhin durch den Schluss der vollständigen Induction; wir nehmen an, der Satz sei für $(n - 1)$ Variabele bewiesen und zeigen, dass er dann auch noch für n Variabele gilt.

Besteht keine identische Relation zwischen den $u_1, \cdots, u_n$, so kann man aus den $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sicher ein System zu $(n - 1)$ Functionen herausgreifen, welche bei stehendem Werte x_n in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ unabhängig sind. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde für jede der n Combinationen von $(n - 1)$ Functionen u_k eine in den $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ identische Relation gelten. Diese n Relationen stellen solche auf die expliciten Ausdrücke der betreffenden Functionen φ_k anzuwendende Rechenvorschriften dar, bei deren Ausübung die $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ von selbst herausfallen. Diese Relationen müssen sämtlich noch x_n enthalten, da keine in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_n$ identische Relation zwischen u bestehen sollte. Combinieren wir aber zwei jener n Relationen zur Elimination von x_n, so würde doch wieder entgegen der Voraussetzung eine identische Relation für die u in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_n$ entspringen. Es giebt hiernach unter den u_k ein System zu $(n - 1)$ Functionen, die in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ bei stehendem x_n unabhängig sind; und wir dürfen dieses System durch $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ bezeichnen, da nötigenfalls ein Austausch der Bezeichnungen zwischen den Functionen u_k ohne weiteres statthaft ist.

Bei dieser Sachlage können wir die $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ aus den $(n-1)$ ersten Gleichungen (7) als Functionen der $u_1, \cdots, u_{n-1}, x_n$ berechnen. Die letzte Gleichung (7) nimmt alsdann die Gestalt:

$$u_n = \Psi(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}, x_n)$$

an; und rechter Hand muss x_n sicher auftreten, da für die u_k keine Relation gilt. Daraufhin findet man weiter:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_k}, \qquad (k < n)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}.$$

Trägt man diese Ausdrücke für die Glieder der letzten Horizontalreihe in die Functionaldeterminante (9) ein, so folgt:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}.$$

Da nun zufolge der vorausgeschickten Überlegungen keiner der beiden Factoren rechter Hand identisch verschwinden kann, so verschwindet auch die Determinante (9) nicht.

Wir merken somit allgemein den Satz an: *Die Functionen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sind von einander abhängig oder unabhängig, je nachdem die Functionaldeterminante* (9) *identisch verschwindet oder nicht.*

§ 2. Erweiterung früherer functionentheoretischer Sätze.

Wie soeben verstehen wir unter $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n von einander unabhängige complexe Variabele und bezeichnen durch $f(x_1, \cdots, x_n)$ eine Function dieser Variabelen. Es seien weiter durch $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ irgend n specielle und etwa endliche Werte unserer Variabelen gegeben. Wir wollen dann unter der *„Umgebung“ des Wertsystems* $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ den Inbegriff aller Wertsysteme der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ verstehen, welche den Bedingungen:

(1) $$|x_1 - \xi_1| \leqq r_1, \quad |x_2 - \xi_2| \leqq r_2, \cdots, \quad |x_n - \xi_n| \leqq r_n$$

genügen, wenn hierbei $r_1, r_2, \cdots, r_n$ n bestimmte endliche und von null verschiedene Beträge sind. Ein einzelnes Wertsystem $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bezeichnen wir kurz als eine *„Stelle“* im Gesamtbereich aller Wertsysteme unserer Variabelen. Führen wir in den n Ebenen der complexen Variabelen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die Kreise $K_1, K_2, \cdots, K_n$ der Radien

$r_1, r_2, \cdots, r_n$ um die Punkte $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ein, so ist die Umgebung der Stelle $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ vermöge dieser n Kreise K einer einfachen geometrischen Deutung fähig.

Es wird nun nötig sein, einige im dritten Kapitel für die Functionen einer complexen Variabelen bewiesene Sätze auf die uns hier vorgelegte Function $f(x_1, \cdots, x_n)$ zu verallgemeinern. Wir nehmen an, dass $f(x_1, \cdots, x_n)$ in der Umgebung der Stelle $\xi_1, \cdots, \xi_n$ eindeutig sei und die Darstellung durch eine ebenda überall gleichmässig convergente Potenzreihe:

$$(2) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\nu} A_{\nu_1, \cdots, \nu_n} (x_1 - \xi_1)^{\nu_1} \cdots (x_n - \xi_n)^{\nu_n}$$

gestatte, in welcher nur ganzzahlige nicht-negative Exponenten ν auftreten. Wir werden in diesem Falle $f(x_1, \cdots, x_n)$ eine *analytische Function* der n Argumente $x_1, \cdots, x_n$ nennen, welche sich in der Umgebung der Stelle $\xi_1, \cdots, \xi_n$ überall *regulär* verhält.

Unter den Eigenschaften der analytischen Functionen von n Argumenten erwähnen wir hier nur diejenigen, welche weiterhin unmittelbar zum Gebrauche kommen. Wir bemerken zunächst, dass es sich in (2) um die *„Mac Laurin'sche Reihe"* unserer Function handelt. Differenzieren wir nämlich die Gleichung (2) ν_1 Male nach x_1, ν_2 Male nach x_2, u. s. w. und setzen hernach $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \cdots, x_n = \xi_n$, so entspringt die Gleichung:

$$(3) \qquad \left[\frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} f}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_n^{\nu_n}}\right]_{\xi_1, \cdots, \xi_n} = (\nu_1)!\,(\nu_2)! \cdots (\nu_n)!\, A_{\nu_1, \cdots, \nu_n},$$

wo durch die Schreibweise der linken Seite angedeutet sein soll, dass nach Ausführung der Differentiation x_1 durch ξ_1, x_2 durch $\xi_2, \cdots$ ersetzt werden soll.

Für die absoluten Beträge der Coefficienten A in der Potenzreihe (2) lässt sich eine Ungleichung aufstellen, welche die pg. 127 im Falle einer einzigen unabhängigen Variabelen gewonnene Ungleichung als Specialfall enthält. Nach (4) pg. 126 haben wir in der damaligen Bezeichnung als eine specielle Folgerung des Cauchy'schen Satzes:

$$\left[\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right]_{z_0} = \frac{n!}{2i\pi} \int\limits_{(k)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Wir wollen diese Formel auf unsere jetzige Function f anwenden, indem wir sie bei stehenden $x_2, x_3, \cdots, x_n$ als Function von x_1 ansehen und ν_1 Male differenzieren. Es folgt:

$$(4)\qquad \left[\frac{\partial^{\nu_1} f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}}\right]_{\xi_1} = \frac{(\nu_1)!}{2i\pi}\int\limits_{(K_1)} \frac{f(x_1,\cdots,x_n)}{(x_1-\xi_1)^{\nu_1+1}}\,dx_1,$$

wo sich die Integration auf die Peripherie des oben mit K_1 bezeichneten Kreises im positiven Umlaufssinn bezieht. Setzen wir:

$$x_1 - \xi_1 = r_1 e^{\vartheta_1 i}, \quad \text{sowie später} \quad x_k - \xi_k = r_k e^{\vartheta_k i},$$

so lässt sich die Gleichung (4) auch auf die Gestalt bringen:

$$(5)\qquad \left[\frac{\partial^{\nu_1} f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}}\right]_{\xi_1} = \frac{(\nu_1)!}{2\pi r_1^{\nu_1}}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi_1 + r_1 e^{\vartheta_1 i}, x_2, \cdots, x_n) e^{-\nu_1\vartheta_1 i}\,d\vartheta_1.$$

Rechts und links sind hier noch $x_2, \cdots, x_n$ variabel. Wir differenzieren die Gleichung (5) ν_2 Male nach x_2 und setzen darauf ξ_2 für x_2 ein. Rechts soll die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, und es soll zur Weiterentwicklung des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks die Gleichung (5), jedoch für den Index 2 an Stelle von 1 geschrieben, in Anwendung gebracht werden. So ergiebt sich:

$$\left[\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2} f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}}\right]_{\xi_1,\xi_2}$$
$$= \frac{(\nu_1)!\,(\nu_2)!}{(2\pi)^2 r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi_1 + r_1 e^{\vartheta_1 i}, \cdots, x_n) e^{-(\nu_1\vartheta_1+\nu_2\vartheta_2)i}\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2,$$

und man findet durch Fortsetzung der gleichen Überlegung schliesslich:

$$\left[\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_n^{\nu_n}}\right]_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$$
$$= \frac{(\nu_1)!\cdots(\nu_n)!}{(2\pi)^n r_1^{\nu_1}\cdots r_n^{\nu_n}}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f(\xi_1 + r_1 e^{\vartheta_1 i}, \cdots) e^{-(\nu_1\vartheta_1+\cdots+\nu_n\vartheta_n)i}\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_n.$$

Combinieren wir diese Formel mit der Gleichung (3), so folgt:

$$(6)\qquad A_{\nu_1,\cdots,\nu_n} = \frac{1}{(2\pi)^n r_1^{\nu_1}\cdots r_n^{\nu_n}}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f\cdot e^{-(\nu_1\vartheta_1+\cdots+\nu_n\vartheta_n)i}\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_n,$$

wo der Kürze halber rechter Hand die Argumente $\xi_k + r_k e^{\vartheta_k i}$ der Function f nicht angegeben sind.

Da nun $f(x_1, \cdots, x_n)$ in der ganzen Umgebung der Stelle $\xi_1, \cdots, \xi_n$ regulär und also endlich ist, so kann man eine positive endliche Zahl M so auswählen, dass $|f(x_1, \cdots, x_n)| \leqq M$ überall in dieser Umgebung

und also auch auf den Peripherien der Kreise $K_1, K_2, \cdots, K_n$ zutrifft. Somit wird bei allen für die Integrationen in Betracht kommenden Werten ϑ die Bedingung:

$$|f(\xi_1 + r_1 e^{\vartheta_1 i}, \cdots, \xi_n + r_n e^{\vartheta_n i}) \cdot e^{-(\nu_1 \vartheta_1 + \cdots + \nu_n \vartheta_n) i}| \leqq M$$

gültig sein; man zieht demnach aus der Gleichung (6) den Schluss:

$$(7) \qquad |A_{\nu_1, \cdots, \nu_n}| \leqq \frac{M}{r_1^{\nu_1} \cdot r_2^{\nu_2} \cdots r_n^{\nu_n}}.$$

Für die Entwicklungscoefficienten der Potenzreihe (2) *unserer Function* $f(x_1, \cdots, x_n)$ *gilt die Bedingung* (7), *wo* M *eine derart ausgewählte positive endliche Zahl ist, dass die absoluten Beträge der Werte* $f(x_1, \cdots, x_n)$ *für alle in der Umgebung der Stelle* $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ *gelegenen Systeme* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *die Zahl* M *nicht übertreffen.*

§ 3. Integration eines Systems simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Die wesentlichste Grundlage für die gesamten nachfolgenden Entwicklungen ist die Integration eines Systems von n Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen nur eine einzige unabhängige complexe Variabele x und n abhängige Veränderliche $y_1, y_2, \cdots, y_n$ vorkommen. Indem wir die n Gleichungen nach den n Differentialquotienten erster Ordnung $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx}$ auflösen, können wir unser System simultaner Differentialgleichungen gleich Anfangs in die Gestalt setzen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \end{cases}$$

wo die rechten Seiten gewisse n Functionen von $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ bedeuten*).

---

*) Liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

mit einer unabhängigen Variabelen x und einer gesuchten Function y vor, so setze man:

Hieran schliesst sich folgende Definition: *Als ein System von Integralen oder ein „Integralsystem" der simultanen Differentialgleichungen* (1) *bezeichnen wir jedes solche System von n Functionen:*

$$y_1 = \chi_1(x),\ y_2 = \chi_2(x),\ \cdots,\ y_n = \chi_n(x),$$

dass nach Eintragung dieser Ausdrücke für die y in die Gleichungen (1) *jede der letzteren in x identisch erfüllt ist.* Es gilt nun, die Existenz und den Grad der Unbestimmtheit eines solchen Integralsystems näher zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir für einen beliebig herausgegriffenen constanten Wert $x = \xi$ die willkürlich gewählten Anfangswerte $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ der Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ vor. Wir nehmen an, dass sich im Bereiche der unabhängig gedachten $(n+1)$ Variabelen $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ um die Stelle $\xi, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ eine Umgebung:

$$(2)\qquad |x-\xi| \leqq r,\ \ |y_1-\eta_1| \leqq r_1,\ \cdots,\ |y_n-\eta_n| \leqq r_n$$

mit nicht verschwindenden $r, r_1, \cdots, r_n$ abgrenzen lässt, in welcher die

---

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 . \cdots,\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}.$$

Hier liegen $(n-1)$ Differentialgleichungen vor, welche im Verein mit der aus der gegebenen Gleichung entspringenden Differentialgleichung *erster* Ordnung:

$$F\left(x,\ y,\ y_1,\cdots,\ y_{n-1},\ \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0$$

auf ein System simultaner Gleichungen der im Texte betrachteten Art führen.

Knüpfen wir andererseits an die erste Gleichung (1) des Textes an und differenzieren wiederholt nach x, indem wir nach jedesmaliger Differentiation die rechts auftretenden Differentialquotienten $\frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx}$ wieder vermöge der Gleichungen (1) in $x, y_1, \cdots, y_n$ ausdrücken, so entstehen n Gleichungen:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n),\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = f_1^{(1)}(x, y_1, \cdots, y_n),\ \cdots,\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = f_1^{(n-1)}(x, y_1, \cdots, y_n).$$

Die Elimination von $y_2, y_3, \cdots, y_n$ aus denselben liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{d^ny_1}{dx^n}\right) = 0 .$$

zwischen x und y_1.

Hieraus entspringt der wichtige Satz: *Die im Texte zu leistende Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung und die Integration einer beliebigen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer unabhängigen und einer abhängigen Variabelen sind äquivalente Probleme.* Bei Zurückführung des ersten Problems auf das letzte hat man übrigens zur Berechnung der $y_2, y_3, \cdots, y_n$ noch $(n-1)$ Gleichungen nach den $(n-1)$ Unbekannten $y_2, y_3, \cdots, y_n$ zu lösen.

n in (1) rechter Hand stehenden Functionen *überall regulär sind. Alsdann giebt es ein und nur ein durch:*

(3) $y_1 = \chi_1(x; \xi, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n), \cdots, y_n = \chi_n(x; \xi, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

zu bezeichnendes Integralsystem von (1), *wo die Functionen* $y_1, \cdots, y_n$ *der einzigen complexen Variabelen* x *in einer gewissen nicht-verschwindenden und noch näher zu charakterisierenden Umgebung um* $x = \xi$ *regulär sind und sich für* $x = \xi$ *selber auf die willkürlich vorgeschriebenen Anfangswerte* $\eta_1, \cdots, \eta_n$ *reducieren.*

Man muss das Functionssystem (3) in der Art auffassen, dass in demselben $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ n willkürlich wählbare Constante sind, wobei im allgemeinen die einzelne Function von allen n Constanten abhängig sein wird. Demgegenüber hat offenbar ξ nicht die Bedeutung einer willkürlichen Constanten, sondern stellt eine specielle Stelle x dar, auf deren Umgebung sich die Darstellungen (3) unserer Functionen $y_1, \cdots, y_n$ beziehen. Bei analytischer Fortsetzung können wir anstatt ξ andere Stellen $\xi', \xi'', \cdots$ eintreten lassen, ohne das in (3) vorliegende System der Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ zu verlassen*).

Der Beweis des aufgestellten Theorems, d. h. der Existenzbeweis des in (3) angesetzten Integralsystems, soll hier nicht in der ursprünglichen Cauchy'schen Art, sondern nach einer erheblich einfacheren von Briot und Bouquet herrührenden Methode**) geführt werden. Dieselbe schliesst sich direct an die Rechnungen des vorigen Paragraphen an und basiert auch im übrigen durchaus auf Cauchy'schen Principien.

Können wir unser System (1) durch die in (3) postulierten Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ befriedigen, so müssen dieselben, da sie in der Umgebung von ξ regulär sein sollten, in die ebenda convergenten Reihen entwickelbar sein:

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 = \eta_1 + \left[\dfrac{dy_1}{dx}\right]_\xi (x-\xi) + \left[\dfrac{d^2y_1}{dx^2}\right]_\xi \dfrac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2} + \cdots, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = \eta_n + \left[\dfrac{dy_n}{dx}\right]_\xi (x-\xi) + \left[\dfrac{d^2y_n}{dx^2}\right]_\xi \dfrac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2} + \cdots, \end{cases}$$

*) Es ist eine leichte Folge des Princips der analytischen Fortsetzung, dass bei Ausübung der Fortsetzung die Functionen (3) ihre Eigenschaft, ein Integralsystem der Differentialgleichungen (1) darzustellen, beständig bewahren. Übrigens bleiben unsere Überlegungen des gegenwärtigen Kapitels insofern hinter denen des voraufgehenden Kapitels wesentlich zurück, dass wir es hier unterlassen müssen, uns durch analytische Fortsetzung über die vollständige Natur der einzelnen Integralfunction für alle möglichen Werte der abhängigen Variabelen zu unterrichten.

**) Veröffentlicht im „Journal de l'École Polytechnique" Bd. 36. Siehe auch Briot et Bouquet *„Théorie des fonctions elliptiques"* (Paris, 1875), pg. 333.

wo durch die Bezeichnung $\left[\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}\right]_\xi$ angezeigt sein soll, dass der Wert des eingeklammerten Differentialquotienten für $x = \xi$ gemeint ist. Die weitere Überlegung gliedert sich nun so:

1) Wenn es überhaupt n Functionen dieser Art giebt, so sind dieselben *eindeutig bestimmt.*

Aus dem gegebenen System (1) folgt nämlich durch Differentiation in Bezug auf die unabhängige Variabele x:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1, \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} f_k, \\ \frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x} + 2\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y_k} f_k\right) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial y_i} f_i + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_i \partial y_k} f_i f_k\right), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

wo man nach jeder erneuten Differentiation die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx}$ wieder nach (1) durch $f_1, \cdots, f_n$ ersetzen wolle. Ein entsprechendes Formelsystem wird sich für jede der übrigen Functionen $y_2, y_3, \cdots, y_n$ anreihen. Wir merken an, dass sich $\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}$ als rationales ganzes Aggregat der $f_1, \cdots, f_n$ und ihrer partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $(\nu - 1)$ mit positiven ganzzahligen numerischen Coefficienten darstellt.

Nun sind die $f_1, \cdots, f_n$ in der Umgebung der Stelle $\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n$ reguläre Functionen. Setzen wir demnach $x = \xi$ und also $y_1 = \eta_1, \cdots, y_n = \eta_n$ in (5) ein, so ergeben sich, wie behauptet, lauter eindeutig bestimmte endliche Werte $\left[\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}\right]_\xi$.

2) Durch die Reihen (4) wird unseren simultanen Gleichungen (1) jedenfalls *„formal“* genügt.

Denken wir z. B. in die erste Differentialgleichung (1) die Functionen (4) eingetragen und rechts und links nach Potenzen von $(x - \xi)$ entwickelt, so müsste die Gleichung:

$$\left[\frac{dy_1}{dx}\right]_\xi + \left[\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right]_\xi (x-\xi) + \left[\frac{d^3 y_1}{dx^3}\right]_\xi \frac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2} + \cdots$$
$$= [f_1]_\xi + \left[\frac{df_1}{dx}\right]_\xi (x-\xi) + \left[\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right]_\xi \frac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

in x identisch bestehen, d. h. einander correspondierende Coefficienten links und rechts müssen gleich sein.

Da aber für $x = \xi$ zufolge (4) die $y_1, \cdots, y_n$ die Werte $\eta_1, \cdots, \eta_n$ annehmen, so ist:

$$[f_1]_\xi = f_1(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n) = \left[\frac{dy_1}{dx}\right]_\xi.$$

Weiter hat man:

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx},$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_k}\frac{d^2 y_k}{dx^2} + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y_k}\frac{dy_k}{dx}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_i \partial y_k}\frac{dy_i}{dx}\frac{dy_k}{dx}.$$

. . . .

Würden wir in diesen Formeln für die Ableitungen der y ihre aus (5) und aus den entsprechenden Formeln für $y_2, \cdots, y_n$ hervorgehenden Ausdrücke eintragen, so würde die rechte Seite der Gleichung für $\frac{d^{\nu-1} f_1}{dx^{\nu-1}}$ mit derjenigen der Gleichung (5) für $\frac{d^\nu y_1}{dx^\nu}$ übereinstimmen. Nun haben wir zum Zwecke der Berechnung der in Rede stehenden Coefficienten $\left[\frac{df_1}{dx}\right]_\xi, \left[\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right]_\xi, \cdots$ diese Eintragung aber gerade für das specielle Wertsystem $x = \xi, y_1 = \eta_1, \cdots, y_n = \eta_n$ zu vollziehen. Somit gelten in der That die Gleichungen:

$$\left[\frac{df_1}{dx}\right]_\xi = \left[\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right]_\xi, \quad \left[\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right]_\xi = \left[\frac{d^3 y_1}{dx^3}\right]_\xi, \cdots.$$

Da hiernach die formale Befriedigung des Systems (1) durch die Reihen (4) ersichtlich ist, so werden wir uns nun zur Betrachtung der Convergenz dieser Reihen wenden. Hierbei werden die Überlegungen von Cauchy's „Calcul des limites" massgeblich.

3) Indem wir auf die durch (2) erklärte Umgebung der Stelle $\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n$ zurückgehen, in welcher die $f_1, \cdots, f_n$ durchweg regulär sein sollten, definieren wir die folgende „*Hilfsfunction*":

$$(6) \qquad F(x, y_1, \cdots, y_n) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x-\xi}{r}\right)\left(1 - \frac{y_1 - \eta_1}{r_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{y_n - \eta_n}{r_n}\right)},$$

welche sich im Innern jener Umgebung in die convergente Reihe:

$$(7) \quad F(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_n} \frac{1}{r^\nu r_1^{\nu_1} \cdots r_n^{\nu_n}} (x-\xi)^\nu (y_1 - \eta_1)^{\nu_1} \cdots (y_n - \eta_n)^{\nu_n}$$

entwickeln lässt.

Für die n Functionen $f_1, \cdots, f_n$ können wir wie pg. 434 bestimmte n positive endliche Zahlen $M_1, \cdots, M_n$ derart auswählen, dass in der gesamten Umgebung (2) die n Bedingungen $|f_k| \leqq M_k$ befriedigt sind. Unter diesen Umständen schliesst man aus den Gleichungen (3) pg. 433 und (7) pg. 435 mit Rücksicht auf die Entwicklungscoefficienten der in (7) für F angegebenen Potenzreihe auf die Gültigkeit der Bedingung:

$$(8) \qquad \left|\left[\frac{\partial^{\nu+\nu_1+\cdots+\nu_n} f_k}{\partial x^{\nu}\partial y_1^{\nu_1}\cdots\partial y_n^{\nu_n}}\right]_{\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n}\right| \leqq M_k \left[\frac{\partial^{\nu+\nu_1+\cdots+\nu_n} F}{\partial x^{\nu}\partial y_1^{\nu_1}\cdots\partial y_n^{\nu_n}}\right]_{\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n}$$

für alle Indices $k = 1, 2, \cdots, n$ und für alle partiellen Ableitungen.

4) Vermöge der Function F setzen wir jetzt das System der „*Hilfsdifferentialgleichungen*" an:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = M_1 \cdot F(x, Y_1, \cdots, Y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dY_n}{dx} = M_n \cdot F(x, Y_1, \cdots, Y_n), \end{cases}$$

und wollen dasselbe durch n Functionen $Y_1, \cdots, Y_n$ befriedigen, welche für $x = \xi$ gleichfalls gleich $\eta_1, \cdots, \eta_n$ werden. Es giebt, wie wir bereits wissen, höchstens ein System derartiger Integrale:

$$(10) \qquad Y_k = \eta_k + \left[\frac{dY_k}{dx}\right]_{\xi}(x-\xi) + \left[\frac{d^2Y_k}{dx^2}\right]_{\xi}\frac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2} + \cdots;$$

und die hier auftretenden Entwicklungscoefficienten müssen sich auf Grund der Regeln (5) berechnen, in denen wir die f_k durch die $M_k \cdot F$ ersetzen und hernach $\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n$ eintragen. Dabei folgt aus dem schon vorhin besprochenen Bildungsgesetze der Formeln (5) in den $f_1, \cdots, f_n$ und ihren partiellen Ableitungen mit Rücksicht auf die soeben festgestellte Ungleichung (8), dass die Bedingung:

$$\left|\left[\frac{d^{\nu}y_k}{dx^{\nu}}\right]_{\xi}\right| \leqq \left[\frac{d^{\nu}Y_k}{dx^{\nu}}\right]_{\xi}$$

für alle Indices $k = 1, 2, \cdots, n$ und für alle Ordnungen $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ erfüllt ist. Dies aber hat zur Folge, dass für alle Werte x, bei denen die n Reihen (10) convergent sind, sicher auch die Reihen (4) convergieren werden.

5) Es gelingt nun, das Integralsystem (10) der simultanen Differentialgleichungen (9) noch auf einem anderen Wege zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke verstehen wir unter z ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(11) \qquad \frac{dz}{dx} = F(x, \eta_1 + M_1 z, \eta_2 + M_2 z, \cdots, \eta_n + M_n z)$$

zwischen den beiden Variabelen x und z. Schreiben wir vor, dass die Function z für $x = \xi$ verschwinden soll, so ist sie eindeutig bestimmt und soll sogleich noch näher betrachtet werden. Zunächst bemerke man, dass sich das fragliche Integralsystem der Gleichungen (9) in dieser Function z einfach so darstellt:

$$(12)\qquad Y_1 = \eta_1 + M_1 z,\ Y_2 = \eta_2 + M_2 z,\ \cdots,\ Y_n = \eta_n + M_n z.$$

In der That können wir ja die für die gedachte Function z identisch erfüllte Gleichung (11) in jede der n Gestalten:

$$\frac{dY_k}{dx} = M_k \cdot F(x, Y_1, \cdots, Y_n) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

setzen, und es werden überdies die $Y_1, \cdots, Y_n$ für $x = \xi$, wie es sein muss, gleich $\eta_1, \cdots, \eta_n$. Durch diese Anfangsbedingungen waren aber die Y_k eindeutig bestimmt, so dass in (12) dasselbe Integralsystem wie in (10) vorliegt.

Die Gleichung (11) schreibt sich nun explicite:

$$\left(1 - \frac{M_1}{r_1} z\right)\left(1 - \frac{M_2}{r_2} z\right) \cdots \left(1 - \frac{M_n}{r_n} z\right) dz = \frac{dx}{1 - \frac{x - \xi}{r}}.$$

Da z für $x = \xi$ verschwinden sollte, so folgt durch Integration:

$$(13)\quad z - \frac{z^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{r_k} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{M_k}{r_k} = -r \log\left(1 - \frac{x - \xi}{r}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist für $|x - \xi| < r$ regulär. Die $(n + 1)$ Lösungen z dieser Gleichung stellen demnach Functionen vor, welche im Innern des durch $|x - \xi| < r$ festgelegten Kreises der x-Ebene an Irregularitäten höchstens Verzweigungspunkte besitzen. Für $x = \xi$ wird nur eine Lösung $z = 0$; diese liefert die Function bez. den Zweig, welcher für uns in Betracht kommt. Dieselbe ist bei $x = \xi$ nicht verzweigt, da die übrigen Lösungen für $x = \xi$ nicht verschwinden. Finden sich innerhalb des Kreises der x-Ebene mit $|x - \xi| < r$ überhaupt einer oder mehrere Verzweigungspunkte für die fragliche Function resp. den Zweig z, so möge durch x_0 ein am Mittelpunkte ξ nächst gelegener Verzweigungspunkt dieser Art gegeben sein. Dann ist sicher $|x_0 - \xi| = r_0 > 0$, und wir wollen übrigens $r_0 = r$ setzen, falls solche Verzweigungspunkte x mit $|x - \xi| < r$ gänzlich fehlen.

Zufolge dieser Überlegung ist die in (12) einzusetzende Function z im Innern eines um ξ mit dem *von* 0 *verschiedenen* Radius r_0 zu legenden Kreises der x-Ebene überall regulär und also in eine dortselbst

convergente Potenzreihe nach $(x - \xi)$ entwickelbar. Innerhalb des gleichen Kreises werden demnach auch die Reihen (10) für die Y_k und also die Reihen (4) für die y_k convergent sein.

Der Beweis der Existenz und eindeutigen Bestimmtheit des Integralsystems (3) ist damit zu Ende geführt.

§ 4. Andere Form des Integralsystems simultaner Differentialgleichungen. Zugehörige partielle Differentialgleichung.

Neben der Bezeichnungsweise (1) pg. 435 unseres Systems simultaner Differentialgleichungen ist noch eine andere gebräuchlich, welche hier eingeführt werden soll. Wir schreiben an Stelle von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ zunächst einfach $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und setzen das System (1) pg. 435 in die Gestalt der fortlaufenden Gleichung:

$$dx = \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n}.$$

Damit die $(n+1)$ Variabelen $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ hier gänzlich coordiniert vorkommen, führen wir irgend eine zweckmässig gewählte und jedenfalls nicht identisch verschwindende Function $X(x, x_1, \cdots, x_n)$ dieser Variabelen ein und schreiben:

(1) $$X(x, x_1, \cdots, x_n)\, f_k(x, x_1, \cdots, x_n) = X_k(x, x_1, \cdots, x_n).$$

Das vorgelegte System der n simultanen Differentialgleichungen kleidet sich dann in die Gestalt:

(2) $$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

wo die $(n+1)$ Nenner bekannt gegebene Functionen von $x, x_1, \cdots, x_n$ sind, die jedoch nur in ihren Quotienten zur Geltung kommen.

Dem im vorigen Paragraphen gewonnenen Integralsystem (3) pg. 437 werden wir jetzt zunächst die Gestalt geben:

(3) $$x_k = \chi_k(x; \xi, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \qquad (k=1, 2, \cdots, n)$$

und erinnern sogleich daran, dass nach pg. 437 nicht ξ, sondern nur die $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ als willkürliche Constante anzusehen sind. Es entspricht nun aber der Schreibweise (2) unseres Systems besser, wenn wir die Gleichungen (3) durch irgend n aus ihnen herstellbare Gleichungen:

(4) $$\begin{cases} \psi_1(x, x_1, x_2, \cdots, x_n;\ C_1, \cdots, C_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_n(x, x_1, x_2, \cdots, x_n;\ C_1, \cdots, C_n) = 0 \end{cases}$$

ersetzen, die wir, um ein mit dem System (3) äquivalentes Gleichungs-

system (4) zu besitzen, so gewählt denken, *dass sie rückwärts nach* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *auflösbar sind, d. h. also, dass die Functionaldeterminante:*

(5) $$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

nicht identisch verschwindet. An Stelle von $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ sind dabei die Constanten $C_1, C_2, \cdots, C_n$ getreten. Man darf dieselben, wenn man will, mit den $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ bez. als identisch ansehen; doch kann es zweckmässig sein, an Stelle der ξ_k auch andere Constante $C_1, \cdots, C_n$ zu benutzen, die natürlich dasselbe leisten müssen, wie die $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$. Dies bedeutet, dass der Satz gilt: *Man kann über die Constanten* $C_1, C_2, \cdots, C_n$ *stets derart verfügen, dass für einen Anfangswert* $x = \xi$ *die aus* (4) *zu berechnenden* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *mit* n *willkürlich vorzuschreibenden Grössen* $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ *identisch werden; und umgekehrt ist durch eine beliebige specielle Auswahl der* $C_1, \cdots, C_n$ *ein zugehöriges System von Integralfunctionen* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *eindeutig bestimmt.* Das System (4) wollen wir fortan als ein *„vollständiges" Integralsystem* der gegebenen simultanen Differentialgleichungen (2) bezeichnen.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Gleichungen (4) auch in Bezug auf $C_1, C_2, \cdots, C_n$ unabhängig sind. Anderenfalls würde nämlich eine Relation zwischen den $\psi_1, \cdots, \psi_n$ bestehen, aus der die $C_1, \cdots, C_n$ von selbst herausfallen. Die $x_1, \cdots, x_n$ können dabei nicht auch noch sämtlich herausfallen, da sonst die Determinante (5) mit 0 identisch wäre. Wir sind also im gedachten Falle auf eine Relation zwischen $x, x_1, \cdots, x_n$ geführt, die insbesondere auch für *jedes* System von Anfangswerten $\xi, \xi_1, \cdots, \xi_n$ bestehen würde. Da jedoch die $\xi, \xi_1, \cdots, \xi_n$ unabhängig wählbar sind, so ist die Annahme, die Gleichungen (4) seien in Bezug auf $C_1, C_2, \cdots, C_n$ nicht unabhängig, unhaltbar.

Bei dieser Sachlage können wir die Gleichungen (4) nach $C_1, C_2, \cdots, C_n$ auflösen, wobei wir geführt werden mögen zu:

(6) $$\begin{cases} \varphi_1(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_n. \end{cases}$$

Tragen wir diese Ausdrücke der C_k in (4) ein, so entstehen n in $x, x_1, \cdots, x_n$ identische Gleichungen. Geben wir demnach ein specielles Wertsystem $C_1, \cdots, C_n$, so wird jedes zugehörige Lösungssystem $x_1, x_2, \cdots, x_n$ der Gleichungen (6) zugleich alle n Gleichungen (4) für diese $C_1, \cdots, C_n$ befriedigen. Aber bei Angabe der C_k ist aus (4) ein zugehöriges System von Integralfunctionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ eindeutig

bestimmt. *Somit sind auch die Gleichungen* (6) *nach* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *auflösbar, die Functionaldeterminante*:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \tag{7}$$

verschwindet nicht identisch, und wir können demgemäss die Gleichungen (6) *als ein vollständiges Integralsystem „in der speciellen Gestalt“ bezeichnen.* Das Besondere ist, dass jede einzelne Gleichung (6) nur noch eine einzige, jeweils rechter Hand stehende willkürliche Constante enthält.

Ein solches Integralsystem unserer simultanen Gleichungen (2) lässt sich nun noch in höchst mannigfaltiger Weise wählen. Verstehen wir unter $\Phi_1(\varphi_1, \cdots, \varphi_n), \cdots, \Phi_n(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ irgend n ganz *willkürlich gewählte* Functionen, die nur der *einen* Bedingung genügen, *dass die Functionaldeterminante:*

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)} \tag{8}$$

nicht identisch verschwindet, so wird offenbar das System:

$$\begin{cases} \Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = C_1', \\ \Phi_2(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = C_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Phi_n(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = C_n' \end{cases} \tag{9}$$

mit dem System (6) völlig gleichbedeutend sein. Tragen wir also in (9) für $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ ihre Ausdrücke in $x, x_1, \cdots, x_n$ ein, so ergiebt sich ein *neues vollständiges Integralsystem in specieller Gestalt:*

$$\begin{cases} \varphi_1'(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_1', \\ \varphi_2'(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_n'(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_n'. \end{cases} \tag{10}$$

Es besteht nun auch umgekehrt der Satz, *dass wir auf diesem Wege vermöge willkürlicher Functionen Φ der $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ zu jedem Integralsystem unserer Art hingelangen können.* Es hängt dies mit einer sehr wichtigen anderen Entwicklung zusammen, bei welcher wir der einzelnen Gleichung eines Integralsystems specieller Gestalt unabhängig von den $(n-1)$ übrigen Gleichungen dieses Systems eine selbständige Bedeutung zuerteilen. Nennen wir eine einzelne solche Gleichung ein *„Einzelintegral“* oder kurz ein *„Integral“* des Systems (2), so gilt der höchst wichtige Satz: *Die auf der linken Seite eines Inte-*

grals vom System (2) *stehende Function* $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ *genügt der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$(11) \qquad X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

in welcher $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ *unabhängig zu denken sind und* φ *die gesuchte Function dieser* $(n+1)$ *Argumente sein soll.* Die Befriedigung der Gleichung (11) durch die bei uns vorliegende Function φ oder durch irgend eine andere Function φ bedeutet dabei, *dass nach Eintragung des Ausdrucks der Function* $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ *in* (11) *und Ausführung der partiellen Differentiationen diese Gleichung in* $x, x_1, \cdots, x_n$ *identisch erfüllt ist.*

Zum Beweise des aufgestellten Satzes ziehen wir das System (6) heran. Die einzelne Gleichung $\varphi_k(x, x_1, \cdots, x_n) = C_k$ hat die Bedeutung, dass, wenn wir hier für $x_1, \cdots, x_n$ die einem vorgelegten Wertsystem $C_1, \cdots, C_n$ zugehörigen Integralfunctionen eintragen, $\varphi_k(x, x_1, \cdots, x_n)$ bei jeder Veränderung der unabhängigen Variabelen x den constanten Wert C_k behält. Die Differentiation nach x liefert somit:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx} = 0,$$

und hieraus schliessen wir, indem wir die rechts stehenden Differentialquotienten $\frac{dx_k}{dx}$ durch ihre aus (2) hervorgehenden Ausdrücke ersetzen, auf das Bestehen der Gleichung:

$$X\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0$$

für alle zusammengehörigen Werte $x, x_1, \cdots, x_n$. Diese Gleichung ist nun aber gänzlich unabhängig von dem besonderen System der $C_1, \cdots, C_n$, von dem wir gerade ausgingen; die letzte Gleichung muss demnach insbesondere für jedes willkürliche System $\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ unabhängig von einander gewählter Anfangswerte bestehen, d. h. die Gleichung ist in $x, x_1, \cdots, x_n$ identisch erfüllt, wie bewiesen werden sollte.

Da wir unter (9) gleichfalls ein vollständiges Integralsystem der simultanen Gleichungen (2) besitzen, so wird auch $\Phi_k(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ der Gleichung (11) genügen. In der That besteht sogar das Theorem: *Sind* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ *irgend welche* n *Integrale der partiellen Differentialgleichungen* (11), *so hat man auch in* $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ *ein solches Integral, wenn hierbei unter* Φ *eine „willkürliche" Function der* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$

verstanden wird. Tragen wir nämlich für φ in die linke Seite der Gleichung (11) die Function Φ ein, so erhalten wir für diese linke Seite:

$$(12)\quad X\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+X_1\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}+\cdots+X_n\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\left[X\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+X_1\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}\right].$$

Da aber rechter Hand der in der Klammer stehende Ausdruck für alle Werte $k=1, 2, \cdots, n$ verschwindet, so verschwindet die ganze rechte Seite, und also befriedigt Φ in der That die Differentialgleichung (11).

Auch umgekehrt gilt: *Ist $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ irgend eine Function, welche die partielle Differentialgleichung* (11) *befriedigt, so lässt sich φ als Function $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ der unter* (6) *gemeinten n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ allein darstellen.* Da nämlich die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_n$ unabhängig sind, so kann man bei gegebenen Werten dieser Functionen und der Variabelen x die $x_1, x_2, \cdots, x_n$ berechnen, d. h. man kann die $x_1, x_2, \cdots, x_n$ als Functionen der $(n+1)$ Variabelen $x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ansehen. Dieserhalb wird sich das gedachte Integral $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ gleichfalls als Function von $x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ausdrücken lassen:

$$(13)\qquad \varphi=\Phi(x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n).$$

Da aber die Gleichung (11) für φ erfüllt ist, so folgt:

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial x}+X\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+X_1\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}+\cdots=0.$$

Diese Gleichung reduciert sich, weil der unter (12) angesetzte Ausdruck mit null identisch ist, auf:

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0.$$

Da es sich hier um eine identische Gleichung handelt und X gewiss nicht identisch verschwindet, so wird $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ beständig gleich null sein, d. h. die in (13) rechts stehende Function enthält x nicht mehr neben den $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ explicite. Somit lässt sich φ thatsächlich in die Gestalt $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ setzen.

Mit diesem Ergebnis schliesst unsere Überlegung vollends ab. Nicht nur jedes System (9) mit willkürlichen Functionen $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$

einer nicht identisch verschwindenden Determinante (8) liefert ein vollständiges Integralsystem von specieller Gestalt für die simultanen Gleichungen (2); sondern, da jedes Einzelintegral $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n) = C$ links ein in der Gestalt $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ darstellbares Integral der partiellen Differentialgleichung (11) hat, so ist auch die oben behauptete Umkehrung, dass wir in der Gestalt (9) zu *jedem* Integralsystem unserer Art gelangen können, thatsächlich eingelöst. Wir erkennen, *dass die Integration der simultanen Gleichungen* (2) *und diejenige der partiellen Differentialgleichung* (11) *gänzlich äquivalente Probleme sind.* Bei dieser Sachlage würden wir auch die Gleichung (11) an die Spitze stellen können und würden, wenn wir in $\varphi_1(x, x_1, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_n(x, x_1, \cdots, x_n)$ n particuläre Integrale derselben von nicht identisch verschwindender Functionaldeterminante:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

auf irgend einem Wege gewonnen hätten, ein vollständiges Integralsystem der simultanen Gleichungen (2) einfach dadurch erhalten, dass wir die $\varphi_1(x, x_1, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_n(x, x_1, \cdots, x_n)$ mit n Constanten, wie in (6), gleich setzen.

§ 5. Geometrische Deutungen und Beispiele.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen sind im Falle $n = 2$ unmittelbar einer wichtigen Deutung fähig. Wir ersetzen in diesem Falle die Bezeichnungen x_1, x_2 durch y, z und schreiben die gegebenen simultanen Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}.$$

Wir deuten nun x, y, z *als rechtwinklige Coordinaten der Punkte des gewöhnlichen Raumes* R_3 *von drei Dimensionen.* Dabei haben freilich nur die Systeme *reeller* Werte x, y, z eine anschauliche Bedeutung; jedoch sollen die complexen Werte der x, y, z keineswegs ausgeschlossen sein, vielmehr sprechen wir, wie man es auch in der analytischen Geometrie gewohnt ist, vorkommendenfalls von „imaginären Punkten“ des R_3.

Schreiben wir nun ein vollständiges Integralsystem zunächst durch durch die beiden Gleichungen an:

$$(2) \qquad \psi_1(x, y, z; C_1, C_2) = 0, \quad \psi_2(x, y, z; C_1, C_2) = 0,$$

so wird für jede particuläre Auswahl der Constanten C_1, C_2 durch

dieses Gleichungspaar eine Curve im Raume R_3 dargestellt werden. Im Anschluss an die bei den partiellen Differentialgleichungen gebräuchliche Sprechweise sagen wir, dass in (2) für jede specielle Auswahl der C_1, C_2 eine *„charakteristische Curve“* für die simultanen Gleichungen (1) dargestellt werde. Der ganze Raum R_3 erscheint durch eine *Schar von ∞^2 charakteristischen Curven* erfüllt; denn man kann C_1 und C_2 so bestimmen, dass die Curve (2) durch einen beliebig vorzuschreibenden Punkt ξ, η, ζ hindurchläuft. Für die aus (2) zu berechnenden Functionen y und z von x sind die Gleichungen (1), denen wir auch die Gestalt:

$$(3)\qquad dx : dy : dz = X(x, y, z) : Y(x, y, z) : Z(x, y, z)$$

geben können, in x identisch erfüllt. Durch die Verhältnisse $dx:dy:dz$ wird aber in bekannter Weise die Richtung der Tangenten im Punkte (x, y, z) bestimmt. Es ist somit die *Bedeutung der simultanen Differentialgleichungen* (1), *dass durch dieselben in jedem Punkte* (x, y, z) *der einzelnen charakteristischen Curve die Tangentenrichtung der letzteren gegeben ist.*

Daraufhin könnte man von einer beliebigen Ausgangsstelle ξ, η, ζ durch Aneinanderreihung von Bogendifferentialen, die aus (3) zu bestimmen sein würden, eine durch diesen Punkt (ξ, η, ζ) hindurchziehende charakteristische Curve construieren. Sind die Functionen X, Y, Z mehrdeutig, so wird man natürlich vorschreiben müssen, mit welchen Zweigen man die Construction an der Stelle (ξ, η, ζ) beginnen will. Schwierigkeiten können bei dieser Construction an solchen Stellen (x, y, z) eintreten, an denen die Quotienten der Functionen X, Y, Z ein irreguläres Verhalten darbieten; doch gehen wir auf derartige weitere Ausführungen der Untersuchung hier nicht ein.

Die einzelne Gleichung (2) stellt bei particulären C_1, C_2 eine Fläche dar, auf welcher *eine* charakteristische Curve gelegen ist. Knüpfen wir demgegenüber an ein vollständiges Integralsystem in specieller Gestalt an:

$$(4)\qquad \varphi_1(x, y, z) = C_1, \qquad \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

so wird die einzelne dieser Gleichungen für einen particulären Wert der Constanten eine Fläche darstellen, *welche schlicht von charakteristischen Curven bedeckt ist.* Greifen wir nämlich z. B. auf einer particulären Fläche $\varphi_1 = C_1$ einen Punkt (x, y, z) auf und berechnen durch Eintragen dieser Coordinaten (x, y, z) in die zweite Gleichung (4) den Wert C_2, so liefern in der That die Gleichungen (4) für diese beiden Werte C_1, C_2 eine charakteristische Curve auf der Fläche $\varphi_1 = C_1$ durch den Punkt (x, y, z). Man sagt, die einzelne Gleichung (4)

stelle eine *„Schar von Integralflächen“* oder bei particulärem C eine einzelne *„Integralfläche“* der simultanen Gleichungen (1) dar.

Zu einer beliebigen Integralfläche werden wir gelangen, *wenn wir aus der Gesamtschar aller ∞^2 charakteristischen Curven in „willkürlicher“ Weise ∞^1, eine Oberfläche bildende Curven herausgreifen.* Nun ist die Gesamtschar jener Curven durch den Schnitt der beiden Flächenbüschel (4) gegeben. Ordnen wir demnach dem einzelnen C_1 nicht die Gesamtheit aller Werte C_2, sondern nur diejenigen Werte C_2 zu, welche mit C_1 durch die „willkürliche“ Relation:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \tag{5}$$

verbunden sind, so haben wir in gewünschter Weise ∞^1 Curven zu einer Fläche combiniert, deren Gleichung:

$$\Phi(\varphi_1(x, y, z), \ \varphi_2(x, y, z)) = 0 \tag{6}$$

sein wird. Wir sind in dieser Art zu den Betrachtungen von pg. 444 ff. zurückgeführt. —

Für $n > 2$ können wir freilich auch die bei reellen $x, x_1, \cdots, x_n$ eintretenden reellen Gleichungen und Functionen in einer der eben besprochenen analogen Art der geometrischen Veranschaulichung nicht zugänglich machen. Indessen ist es statthaft und sogar nützlich, auch bei beliebigem n die soeben für $n = 2$ benutzte geometrische „Sprechweise“ beizubehalten. Wir werden dabei $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ als rechtwinklige Coordinaten der Punkte in einem Raume R_{n+1} von $(n+1)$ Dimensionen deuten. In diesem R_{n+1} ist dann durch die Gleichungen (4) pg. 442 oder (6) pg. 443 *die Schar der ∞^n charakteristischen Curven des Systems* (2) pg. 442 dargestellt. Hiernach wird eine „Curve“ im R_{n+1} ein *eindimensionales* Gebilde vorstellen*). Die einzelne Gleichung (6) pg. 443, welche *eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} charakteristischen Curven* darstellt, ergiebt eine *Integralfläche* der simultanen Differentialgleichungen.

Zur weiteren Erläuterung der vorgetragenen allgemeinen Entwicklungen sollen die folgenden Beispiele dienen.

Beispiel 1. Wir wollen für $n = 2$ den Fall betrachten, dass die ∞^2 charakteristischen Curven ein System geradliniger Strahlen oder kurz ein *„Strahlensystem“* im R_3 vorstellen. Die beim Übergang von der ursprünglichen Gestalt zur Schreibweise (2) pg. 442 der simultanen Gleichungen unbestimmt gebliebene Function X soll der Gleichung:

---

*) Man bemerke übrigens, dass hierbei als eindimensional die Wertmannigfaltigkeit einer „complexen“ Variabelen gilt.

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}$$

entsprechend gewählt werden. Die Folge ist, dass für das System:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \tag{7}$$

die nachfolgende Relation identisch besteht:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1; \tag{8}$$

an jeder Stelle x, y, z werden also X, Y, Z direct die Richtungscosinus der Tangente der charakteristischen Curve darstellen.

Soll nun die letztere Curve eine Gerade sein, so dürfen, wenn wir auf der Curve von (x, y, z) zu $(x + dx, y + dy, z + dz)$ fortschreiten, die Richtungscosinus X, Y, Z eine Veränderung nicht erfahren haben, d. h. man hat $dX = 0$, $dY = 0$, $dZ = 0$. Diese drei Gleichungen sind auch hinreichend dafür, dass die in Rede stehende Curve eine Gerade ist. Die Fortschreitungsrichtung bestimmt sich aber aus (7), so dass wir zu den drei identisch gültigen Gleichungen gelangen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial x} X + \frac{\partial X}{\partial y} Y + \frac{\partial X}{\partial z} Z = 0, \\ &\frac{\partial Y}{\partial x} X + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \frac{\partial Y}{\partial z} Z = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial x} X + \frac{\partial Z}{\partial y} Y + \frac{\partial Z}{\partial z} Z = 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Überdies aber gilt zufolge (8) immer:

$$\begin{aligned} X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} + Z\frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \\ X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ X\frac{\partial X}{\partial z} + Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Durch Combination dieser Gleichungen mit den voraufgehenden ergiebt sich, dass das System (9) vollständig durch die eine fortlaufende Gleichung ersetzt werden kann:

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}}{X} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}}{Y} = \frac{\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}}{Z}. \tag{10}$$

Das identische Bestehen dieser und der Gleichung (8) *giebt die gesuchte Bedingung dafür, dass das System der charakteristischen Curven ein Strahlensystem ist.*

Die Gesamtheit aller Secanten zweier windschiefen Geraden G_1, G_2 bildet ein besonders einfaches Strahlensystem. Durch jeden Punkt des Raumes, der weder G_1 noch G_2 angehört, läuft ein und nur ein Strahl des Systems hindurch; und in jeder Ebene, die weder G_1 noch G_2 enthält, ist ein und nur ein Strahl gelegen.

Ein hierher gehöriges Beispiel liefern die durch:

$$dx : dy : dz = (x^2 - 1) : (xy - z) : (xz - y)$$

gegebenen Differentialgleichungen. Man zeigt sofort, dass ein vollständiges Integralsystem derselben durch:

$$y = ax + b, \qquad z = bx + a$$

gegeben ist, wo a und b willkürliche Constante sind. Hierdurch sind in der That ∞^2 Strahlen dargestellt, deren einzelner die beiden durch:

$$x - 1 = 0,\ y - z = 0 \ \text{ bez. } \ x + 1 = 0,\ y + z = 0$$

gelieferten Geraden G_1, G_2 schneidet. Ein Integralsystem in specieller Gestalt hat man für diesen Fall in:

$$\frac{y+z}{x+1} = \alpha, \quad \frac{y-z}{x-1} = \beta,$$

unter α und β zwei neue Constante verstanden. Das Ebenenbüschel durch die Gerade G_1 und ebenso das durch G_2 ergiebt lauter Integralflächen ersten Grades. Andere Integralflächen ersten Grades giebt es nicht.

Dagegen erkennen wir sofort die Existenz von ∞^3 Integralflächen zweiten Grades. Irgend eine gegen G_1 und G_2 windschiefe Gerade heisse G_3. Dann bilden alle die Geraden G_1, G_2 und G_3 zugleich schneidenden Strahlen eine solche Fläche. Nun giebt es ∞^4 Gerade G_3, und immer ∞^1 liefern die gleiche Fläche, so dass wir auf diese Weise zu ∞^3 Flächen gelangen.

Der allgemeine Ausdruck für die Gleichung einer Integralfläche ist:

$$\Phi\left(\frac{y+z}{x+1}, \ \frac{y-z}{x-1}\right) = 0.$$

Zum zweiten Grade führt der Ansatz:

$$A + B\frac{y+z}{x+1} + C\frac{y-z}{x-1} + D\frac{y+z}{x+1}\cdot\frac{y-z}{x-1} = 0$$

oder in geordneter Form:

$$Ax^2 + D(y^2 - z^2) + (B + C)(xy - z) + (B - C)(xz - y) - A = 0.$$

Man zeigt leicht direct, dass diese ∞^3 Flächen alle Integralflächen zweiten Grades erschöpfen; denn es handelt sich hierbei um alle Flächen zweiten Grades, welche G_1 und G_2 tragen.

Beispiel 2. Bewegt sich ein materieller Punkt von der Masse m unter Wirkung einer Centralkraft, die allein von der Entfernung r des Punktes vom anziehenden Centrum abhängt, so existiert ein Potential V, welches gleichfalls eine Function der eben genannten Entfernung r allein ist. Um bei gegebenem V die Bewegung des Punktes zu finden, machen wir das anziehende Centrum zum Nullpunkt eines rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystems. Alsdann gilt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{11}$$

und die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes sind:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{12}$$

wobei t die Zeit bedeutet. Die Aufgabe soll sein, die Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes als Functionen der Zeit t zu bestimmen und so die Bewegung des Punktes anzugeben.

Die nach den Axen genommenen Componenten der Geschwindigkeit des Punktes nennen wir:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \tag{13}$$

Mit Hilfe derselben schreiben sich die drei Gleichungen (12) so:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{14}$$

Unsere Aufgabe, die Bewegung des fraglichen Punktes zu bestimmen, läuft hinaus auf die Integration der sechs simultanen Gleichungen (13) und (14) mit der unabhängigen Variabelen t und den sechs gesuchten Functionen x, y, z, u, v, w. Ein vollständiges Integralsystem enthält sechs willkürliche Constante, als welche man die zur Zeit $t = 0$ vorliegenden „Anfangswerte“ $x_0, y_0, \cdots, w_0$ annehmen kann.

Bei der besonderen Bauart der Gleichungen (13) und (14) kann man nun vier Integrale derselben ohne weiteres leicht angeben. Zunächst folgt durch Combination jener Gleichungen:

$$m\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

oder da V von x, y, z allein abhängt:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2)\right] = \frac{dV}{dt}.$$

Durch Integration findet man von hieraus die sogenannte *„Energiegleichung“*:

$$\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) = V + C_0,$$

wo C_0 eine erste Constante ist.

Da V nur von r abhängt, so findet sich unter Benutzung der Gleichung (11):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dr}\frac{z}{r}.$$

Trägt man diese Ausdrücke in die rechten Seiten der Gleichungen (14) ein, so ergiebt sich, wenn wir die letzteren paarweise combinieren:

$$y\frac{dw}{dt} - z\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(yw - zv) = 0,$$

$$z\frac{du}{dt} - x\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(zu - xw) = 0,$$

$$x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(xv - yu) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen führt zu den drei *„Flächengleichungen“*:

$$yw - zv = C_1, \quad zu - xw = C_2, \quad xv - yu = C_3,$$

aus denen z. B. sofort hervorgeht, dass sich der Punkt beständig in der durch:

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$$

gegebenen Ebene bewegt.

An der vollständigen Lösung der Aufgabe fehlen jetzt noch zwei Integrale; wir begnügen uns mit der Angabe, dass dieselben durch Quadraturen gewonnen werden können*).

Aufgabe 1. Man integriere die simultanen Gleichungen:

$$dx : dy : dz = (z - 2y) : (2x + 3z) : (3y + x),$$

wobei man benutzen wolle, dass sich diese Gleichungen ersetzen lassen durch:

$$3dx - dy + 2dz = 0, \qquad xdx + ydy - zdz = 0;$$

und man untersuche die zugehörigen charakteristischen Curven und Integralflächen.

Aufgabe 2. Die pg. 331 entwickelte Behandlung der Euler'schen Gleichungen:

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = (B - C)\,\omega_2\omega_3, \quad B\frac{d\omega_2}{dt} = (C - A)\,\omega_3\omega_1, \quad C\frac{d\omega_3}{dt} = (A - B)\,\omega_1\omega_2$$

soll im Sinne der hier gegebenen allgemeinen Theorie discutiert werden.

---

*) Hierüber sowie über die Bedeutung der Benennungen „Energiegleichung“ und „Flächengleichung“ sei auf die Lehrbücher der analytischen Mechanik verwiesen.

§ 6. Die integrierenden Factoren und die Multiplicatoren der Systeme simultaner Differentialgleichungen.

Man schreibe, indem man die Function X in (1) pg. 442 mit 1 identisch wählt, das vorgelegte System der simultanen Differentialgleichungen:

$$(1)\quad dx_1 - X_1 dx = 0,\ dx_2 - X_2 dx = 0, \cdots,\ dx_n - X_n dx = 0.$$

Sieht man die $x, x_1, \cdots, x_n$ als unabhängige Variabele an, so sollen die auf den linken Seiten dieser n Gleichungen stehenden Differentialausdrücke abgekürzt durch:

$$(2)\quad F_1 = dx_1 - X_1 dx,\ F_2 = dx_2 - X_2 dx, \cdots,\ F_n = dx_n - X_n dx$$

bezeichnet werden.

Im Falle $n = 1$ giebt es für die eine hier eintretende Gleichung $F_1 = 0$ stets sogenannte *„integrierende Factoren“*, deren einzelner $\mu(x, x_1)$ bewirkt, dass das Product μF_1 mit dem totalen Differential einer Function $\varphi(x, x_1)$ der beiden Variabelen x, x_1 identisch wird:

$$(3)\qquad \mu F_1 = -\mu X_1 dx + \mu dx_1 = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1.$$

Die Theorie der integrierenden Factoren im Falle $n = 1$ pflegt man in den einführenden Vorlesungen über Integralrechnung zu entwickeln. Insbesondere zeigt man, dass sich bei Kenntnis eines integrierenden Factors $\mu(x, x_1)$ die zugehörige Function φ durch Quadraturen finden lässt. Schreibt man nämlich die mit μ multiplicierte Differentialgleichung kurz:

$$U(x, x_1)\, dx + U_1(x, x_1)\, dx_1 = 0,$$

so gilt für φ die Darstellung:

$$(4)\qquad \varphi(x, x_1) = \int\limits_{(x)} U dx + \int\limits_{(x_1)} \Big[U_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{(x)} U dx\Big] dx_1 + C,$$

wo sich das Integral mit dem Index (x) auf x, das mit dem Index (x_1) auf x_1 bezieht und C eine Constante ist.

Wir verallgemeinern nun diesen Ansatz auf den Fall der n Gleichungen (1). *Ein System von n Functionen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ der $x, x_1, \cdots, x_n$ soll ein System von integrierenden Factoren der simultanen Gleichungen* (1) *heissen, wenn bei unabhängig gedachten $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ die Summe:*

$$\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \cdots + \mu_n F_n$$

ein totales Differential ist. In geordneter Form schreiben wir diese Summe:

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_k F_k = U dx + U_1 dx_1 + \cdots + U_n dx_n.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass wir hier das totale Differential einer Function $\varphi(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vor uns haben, besteht darin, *dass für alle Combinationen zweier Indices* $i, k = 0, 1, 2, \cdots, n$ *die Relationen:*

$$(6) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

identisch bestehen. Dabei ist der Gleichmässigkeit halber x_0 statt x und U_0 statt U geschrieben.

Existiert nämlich eine Function $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$, deren totales Differential die rechte Seite der Gleichung (5) ist, so gilt:

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = U_1, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = U_n.$$

Die Gleichungen (6) sind somit eine Folge der Relationen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Bestehen andererseits die Bedingungen (6), so gelingt in der That immer die *Berechnung einer zugehörigen Function* $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ *von den* $U, U_1, \cdots, U_n$ *aus vermöge einer Kette von Quadraturen* durch Verallgemeinerung des der Gleichung (4) zu Grunde liegenden Verfahrens. Giebt es nämlich eine Function φ, so muss sich dieselbe der ersten Gleichung (7) entsprechend in der Gestalt:

$$(8) \qquad \varphi = \int_{(x)} U dx + \varphi_1(x_1, \cdots, x_n)$$

darstellen lassen, wo φ_1 von x unabhängig ist. Durch Differentiation nach x_k würde mit Rücksicht auf (7) folgen:

$$(9) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} = U_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{(x)} U dx, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Giebt es andererseits eine diesen n Bedingungen genügende Function φ_1, welche x nicht mehr enthält, so wird offenbar die zugehörige in (8) gelieferte Function φ die von uns gesuchte sein; denn sie genügt allen $(n + 1)$ Gleichungen (7).

Indem solchergestalt die Untersuchung auf die Bestimmung der Function φ_1 reduciert ist, bezeichnen wir die aus den U zu berechnende rechte Seite der Gleichung (9) durch V_k:

$$V_k = U_k - \frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{(x)} U\,dx, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Wir überzeugen uns alsdann zunächst, dass V_k thatsächlich von x unabhängig ist; denn es ist:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} = \frac{\partial U_k}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

zufolge (6) mit null identisch. Weiter ergiebt sich aus (6):

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k},$$

so dass das oben formulierte Kennzeichen eines totalen Differentials am n-gliedrigen Ausdruck:

(10) $$V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \cdots + V_n dx_n$$

erfüllt ist.

Nun aber muss zufolge (9) offenbar $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} = V_k$ für alle $n = 1, 2, \cdots, n$ gültig sein, und also ist der Ausdruck (10) das totale Differential von φ_1. Die Aufsuchung der Function φ für den $(n+1)$-gliedrigen Ausdruck (5) unter den Bedingungen (6) ist in dieser Weise auf die Bestimmung einer Function φ_1 aus einem entsprechenden n-gliedrigen Differentialausdruck (10) reduciert. Da wir schliesslich für einen zweigliedrigen Ausdruck die Formel (4) besitzen, so ist durch das eingeleitete Recursionsverfahren die Existenz der fraglichen Function $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ bewiesen und zugleich eine Methode, dieselbe durch eine Kette von Quadraturen zu berechnen, gewonnen.

Für die Systeme integrierender Factoren gelten nun folgende Sätze. *Hat man ein erstes System integrierender Factoren* $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, *und ist* $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k F_k$ *das totale Differential der Function* $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$, *so gewinnen wir in:*

(11) $$\varphi(x, x_1, \cdots, x_n) = C$$

ein zugehöriges Integral der simultanen Differentialgleichungen (1). Da nämlich zufolge (5) und (2) bei unabhängig gedachten $x, x_1, \cdots, x_n$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U = -\mu_1 X_1 - \mu_2 X_2 - \cdots - \mu_n X_n,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = U_1 = \mu_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = U_2 = \mu_2, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = U_n = \mu_n$$

gilt, so folgt durch Combination dieser Gleichungen:

$$(12) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0.$$

Die Function φ befriedigt somit die zum System (1) gehörige partielle Differentialgleichung, so dass nach pg. 445 ff. in (11) in der That ein Integral des Systems (1) vorliegt.

Haben wir umgekehrt in $\varphi = C$ irgend ein Integral der simultanen Gleichungen (1), *so liefern die n Functionen*:

$$(13) \qquad \mu_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \mu_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \cdots, \quad \mu_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

ein System von integrierenden Factoren. Man zeigt nämlich mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung (12) jetzt einfach, dass:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(dx_k - X_k dx) = d\varphi,$$

d. i. gleich dem totalen Differential von φ ist.

Ist ein vollständiges Integralsystem unserer simultanen Gleichungen (1) gegeben in:

$$\varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2, \quad \cdots, \quad \varphi_n = C_n,$$

so haben wir dem Ansatz (13) entsprechend n Systeme integrierender Factoren:

$$\mu_1^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}, \quad \mu_2^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}, \quad \cdots, \quad \mu_n^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Die n-gliedrige Determinante:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \mu_1^{(1)}, & \mu_2^{(1)}, & \cdots, & \mu_n^{(1)} \\ \mu_1^{(2)}, & \mu_2^{(2)}, & \cdots, & \mu_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{(n)}, & \mu_2^{(n)}, & \cdots, & \mu_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

dieser n Factorensysteme nennen wir nach Jacobi einen „*Multiplicator*“ des Systems der simultanen Gleichungen (1) und bezeichnen denselben

mit M. Der Multiplicator M ist identisch mit der Functionaldeterminante der $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$(15) \qquad M = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)},$$

welche nach pg. 444 in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nicht identisch verschwindet.

Ersetzen wir das hier zu Grunde gelegte vollständige Integralsystem durch ein beliebiges anderes:

$$\Phi_1(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = C_1', \quad \Phi_2(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = C_2', \quad \cdots, \quad \Phi_n(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = C_n',$$

so möge dieses entsprechend auf den Multiplicator M' führen. Aber es ist:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k},$$

und also folgt auf Grund des Multiplicationsgesetzes der Determinanten für den neuen Multiplicator M':

$$(16) \qquad M' = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)} \cdot M.$$

Hieran schliesst sich der folgende Satz: *Ist M der zum System der Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ gehörende Multiplicator der simultanen Gleichungen* (1), *so hat man in:*

$$(17) \qquad M' = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \cdot M$$

stets wieder einen Multiplicator der Gleichungen (1), *wenn hierbei $\Phi(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ eine willkürlich gewählte Function $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ ist.* Wählen wir nämlich ein neues Integralsystem mit den Functionen:

$$\Phi_1 = \int_0^{\varphi_1} \Phi \, d\varphi_1, \quad \Phi_2 = \varphi_2, \quad \cdots, \quad \Phi_n = \varphi_n,$$

Φ im Sinne des zu beweisenden Satzes gebraucht, so ist:

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)} = \begin{vmatrix} \Phi, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}, & \cdots, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_n} \\ 0, & 1, \; 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, \; 1, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, \; 0, & \cdots, & 1 \end{vmatrix} = \Phi,$$

und also geht die Richtigkeit des fraglichen Satzes aus (16) hervor.

Der fragliche Satz lässt sich dahingehend umkehren, *dass man durch den Ansatz* (17) *zu jedem weiteren Multiplicator des Systems* (1) *gelangt.*

Es hängt dies zusammen mit einem anderen wichtigen Theoreme, welches zunächst vorauszusenden ist: *Jeder Multiplicator M des Systems* (1) *stellt eine Function der $x, x_1, \cdots, x_n$ dar, für welche die partielle Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0 \tag{18}$$

in $x, x_1, \cdots, x_n$ identisch besteht, d. h. M ist ein Integral dieser Gleichung.

Zum Beweise dieses Satzes verstehen wir unter $\varphi_1 = C_1, \cdots, \varphi_n = C_n$ wie oben das dem Multiplicator M zu Grunde liegende Integralsystem. N_k sei diejenige n-gliedrige Determinante, welche man erhält, wenn man die Glieder der k^{ten} Verticalreihe in der Functionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

durch $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$ ersetzt. Da nach (11) pg. 445 die Identitäten:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = -\sum_{l=1}^{n} X_l \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}$$

bestehen, so gilt offenbar:

$$N_k = - X_k \cdot M. \tag{19}$$

Die linke Seite der Differentialgleichung (18) schreibt sich somit:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (MX_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial M}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial N_k}{\partial x_k}. \tag{20}$$

Hier zeigt man nun durch directe Rechnung, dass der rechter Hand stehende Ausdruck in $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ identisch verschwindet. Um nämlich die Ableitung einer n-gliedrigen Determinante nach einer der Variabelen, etwa x, zu bilden, muss man die Glieder der i^{ten} Verticalreihe durch ihre Ableitungen nach x ersetzen und alle n für $i = 1, 2, \cdots, n$ so entspringenden Determinanten addieren. Für die rechte Seite der Gleichung (20) berechnen wir so:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x}, \cdots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1 \partial x}, \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n \partial x} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n \partial x} \end{vmatrix}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_k}, \cdots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1 \partial x_k}, \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n \partial x_k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_n \partial x_k} \end{vmatrix} \right\}.$$

Hier sind in den Determinanten unter dem Summenzeichen jedesmal die erste, die k^{te} und die n^{te} Vertikalreihe aufgeführt, wobei nur für $k = 1$ eine einfache Abänderung der Schreibweise eintreten muss. Man erkennt nun sofort, dass die k^{te} Determinante im k^{ten} Gliede der Summe gegen die k^{te} unter den vor dem Summenzeichen stehenden Determinanten fortfällt; ebenso ergiebt sich auf Grund eines Elementarsatzes der Determinantentheorie, dass sich die i^{te} Determinante im k^{ten} Gliede der Summe gegen die k^{te} Determinante im i^{ten} Gliede gerade forthebt, wenn hierbei i und k irgend zwei verschiedene unter den n Zahlen $1, 2, 3, \cdots, n$ sind. Somit ist in der That die rechte Seite der Gleichung (20) mit null identisch; d. h. es ist M, wie behauptet, ein Integral der Differentialgleichung (18).

Aber nicht nur jeder Multiplicator befriedigt (18), sondern es gilt auch umgekehrt der Satz: *Jede die partielle Differentialgleichung* (18) *befriedigende Function M von $x, x_1, \cdots, x_n$ ist ein Multiplicator des Systems* (1). Verstehen wir nämlich unter M einen Multiplicator, der aus irgend einem particulären Integralsystem von (1) wie oben hergeleitet ist, und ist M_1 irgend ein Integral von (18), so setze man den Quotienten von M_1 und M gleich $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$:

$$M_1 = M \cdot \varphi(x, x_1, \cdots, x_n).$$

Nun soll für M_1 und also für $M\varphi$ die Differentialgleichung (18) gelten, d. h. wir haben die Gleichung:

$$\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (M\varphi X_k)}{\partial x_k} = \varphi \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (M X_k)}{\partial x_k} \right]$$
$$+ M \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] = 0.$$

Überdies besteht für M die Gleichung (18), und da M sicher nicht mit 0 identisch ist, so wird φ die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$$

befriedigen. Infolge dessen ist φ nach einem pg. 446 bewiesenen Satze in der Gestalt $\varphi = \Phi(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ darstellbar. Es folgt also:

$$M_1 = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \cdot M,$$

so dass M_1 nach (17) in der That ein Multiplicator ist.

Hiermit haben wir zugleich eine independente Erklärung eines Multiplicators des Systems (1) gewonnen, *insofern wir als Multiplicator irgend ein Integral M der Differentialgleichung* (18) *definieren können, welches eine nicht identisch verschwindende Function der $x, x_1, \cdots, x_n$ darstellt.* Auch ist aus der letzten Überlegung die noch unbewiesene obige Behauptung evident, dass *jeder* Multiplicator M' in dem zum Integralsysteme $\varphi_k = C_k$ gehörigen M durch die Formel (17) darstellbar ist.

Für $n = 1$ fallen die Multiplicatoren mit den integrierenden Factoren selber zusammen. Die hier entwickelten Sätze kommen für diesen Fall auf bekannte Theoreme über die integrierenden Factoren einer einzelnen Gleichung $dx_1 - X_1(x, x_1)\,dx = 0$ zurück.

Aufgabe 1. Man stelle die Differentialgleichung der Multiplicatoren für das in Beispiel 2) pg. 452 betrachtete System:

$$dx - u\,dt = 0, \quad dy - v\,dt = 0, \quad dz - w\,dt = 0,$$

$$du - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x}dt = 0, \quad dv - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial y}dt = 0, \quad dw - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial z}dt = 0$$

auf und zeige, dass einer der Multiplicatoren mit 1 identisch ist.

Aufgabe 2. Man zeige, dass auch beim System der Euler'schen Gleichungen:

$$d\omega_1 - a\omega_2\omega_3\,dt = 0, \quad d\omega_2 - b\omega_3\omega_1\,dt = 0, \quad d\omega_3 - c\omega_1\omega_2\,dt = 0$$

die Einheit 1 einen Multiplicator liefert.

§ 7. Reduction des Differentialgleichungssystems bei Kenntnis einiger Integrale. Princip des letzten Multiplicators.

Man führe an Stelle der $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ neue Veränderliche $y, y_1, y_2, \cdots, y_n$ durch die Gleichungen:

(1) $y = \psi(x, x_1, \cdots, x_n),\ y_1 = \psi_1(x, x_1, \cdots, x_n), \cdots,\ y_n = \psi_n(x, x_1, \cdots, x_n)$

ein und verlange, dass diese Gleichungen nach $x, x_1, \cdots, x_n$ auflösbar

seien, dass also die Functionaldeterminante der $\psi, \psi_1, \cdots, \psi_n$ in Bezug auf $x, x_1, \cdots, x_n$ nicht identisch verschwinde. Unter diesen Umständen lassen sich die $(n+1)$ Gleichungen:

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dy_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} dx_n$$

nach den Differentialen $dx, dx_1, \cdots, dx_n$ auflösen. Wenn wir demnach die n Differentialausdrücke:

$$F_1 = dx_1 - X_1 dx, \quad F_2 = dx_2 - X_2 dx, \cdots, \quad F_n = dx_n - X_n dx$$

auf die neuen Variabelen transformieren, so werden sie die Gestalt annehmen:

$$(2) \qquad F_k = A^{(k)} dy + A_1^{(k)} dy_1 + \cdots + A_n^{(k)} dy_n, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

wo wir die A als Functionen der y berechnet denken. Indem wir die in (2) rechts stehenden Ausdrücke gleich null setzen, entspringt das *System unserer simultanen Differentialgleichungen in der auf die y transformierten Gestalt.* Es ist selbstverständlich, dass jedes Integral des ursprünglichen Systems auf die y umgerechnet ein Integral des Systems der transformierten Differentialgleichungen darstellt. Auch ist natürlich $\sum \mu_k F_k$ in den y ein totales Differential, wenn dies bei Gebrauch der x zutrifft.

Das transformierte System wollen wir jetzt auf eine ebenso einfache Form bringen, wie sie beim ursprünglichen vorliegt. Man wird zu diesem Ende die n Gleichungen:

$$(3) \qquad A^{(k)} dy + A_1^{(k)} dy_1 + \cdots + A_n^{(k)} dy_n = 0$$

nach $dy_1, dy_2, \cdots, dy_n$ auflösen, wobei sich diese Differentiale in $y, y_1, \cdots, y_n$ und dy darstellen. Wir wollen diese Operation unter der Annahme unabhängiger $y, y_1, \cdots, y_n$ an die Gleichungen (2) knüpfen, aus denen wir durch geeignete lineare Combinationen die n Gleichungen:

$$(4) \qquad G_k = dy_k - Y_k dy = a_1^{(k)} F_1 + a_2^{(k)} F_2 + \cdots + a_n^{(k)} F_n$$

gewinnen. Das transformierte System in der neuen Gestalt entspringt dann durch Nullsetzen der Differentialausdrücke G_k; die $a_i^{(k)}$ sind Functionen der $y, y_1, \cdots, y_n$, die wir zu berechnen vermögen.

Jetzt möge ein System integrierender Factoren $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ für $G_1, G_2, \cdots, G_n$ vorliegen. Indem wir das vollständige Differential

$\sum \nu_k G_k$ auf Grund von (4) in den F darstellen, zeigt sich, dass ein correspondierendes System integrierender Factoren für $F_1, \cdots, F_n$ in:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu_1 = a_1^{(1)}\nu_1 + a_1^{(2)}\nu_2 + \cdots + a_1^{(n)}\nu_n, \\ \mu_2 = a_2^{(1)}\nu_1 + a_2^{(2)}\nu_2 + \cdots + a_2^{(n)}\nu_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mu_n = a_n^{(1)}\nu_1 + a_n^{(2)}\nu_2 + \cdots + a_n^{(n)}\nu_n \end{cases}$$

gewonnen wird. Bei der Art, wie wir die Multiplicatoren aus n Systemen integrierender Factoren herstellten, folgt unter Benutzung des Multiplicationssatzes der Determinanten, *dass jedem Multiplicator M des ursprünglichen Systems $F_k = 0$ ein Multiplicator N des transformierten Systems $G_k = 0$ zugehört, der mit M verbunden ist durch die Gleichung:*

$$(6)\qquad M = N \cdot \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \cdots, & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \cdots, & a_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \cdots, & a_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Da wir die $a_i^{(k)}$ berechnen können, *so können wir aus einem bekannten Multiplicator M für die Gleichungen $F_k = 0$ stets einen solchen für das transformierte System $G_k = 0$ berechnen.*

Von diesen allgemeinen Entwicklungen können wir nunmehr eine sehr wichtige Anwendung machen. Wir nehmen an, dass von den Integralen der n simultanen Gleichungen $F_k = 0$ bereits einige bekannt seien. Die Anzahl dieser bekannten Integrale sei $s < n$; sie seien gegeben durch:

$$(7)\qquad \varphi_1 = C_1,\ \ \varphi_2 = C_2,\ \cdots,\ \ \varphi_s = C_s.$$

Sollen hierin s Gleichungen eines vollständigen Integralsystems von specieller Gestalt (cf. pg. 443 u. f.) vorliegen, so müssen die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ in der Art von einander unabhängig sein, dass sich unter den n Grössen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ wenigstens in einer Art s auswählen lassen, die umgekehrt als Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ berechenbar sind. Anderenfalls müssten nämlich alle s-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden; und dann könnten wir leicht ersichtlich in (7) nicht einen Bestandteil eines vollständigen Integralsystems haben.

Es ist nun keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass die $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ in diesem Sinne bezüglich der s letzten Variabelen $x_{n-s+1}, \cdots, x_n$ unabhängig seien. Unter diesen Umständen haben wir eine zulässige Transformation (1) in:

$$(8)\quad y = x,\ y_1 = x_1,\ \cdots,\ y_{n-s} = x_{n-s},\ y_{n-s+1} = \varphi_1,\ \cdots,\ y_n = \varphi_s.$$

Bei dieser Transformation nehmen die letzten s Differentialgleichungen des transformierten Systems:

$$(9)\qquad G_{n-s+k} = d\varphi_k - Y_{n-s+k}dy = 0$$

eine sehr einfache Gestalt an. Transformieren wir nämlich rückwärts auf die ursprünglichen Variabelen, so folgt:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}dx + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}dx_i - Y_{n-s+k}dx = 0.$$

Da aber zufolge der ursprünglichen Differentialgleichungen $dx_i = X_i dx$ ist, so folgt:

$$\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}X_i\right]dx - Y_{n-s+k}dx = 0.$$

Nun verschwindet der in der Klammer stehende Ausdruck nach pg. 445 identisch; es wird also auch Y_{n-s+k} identisch null sein, so dass die Gleichung (9) die Gestalt gewinnt:

$$G_{n-s+k} = d\varphi_k = 0.$$

Wir haben also das Ergebnis: *Bilden wir vermöge der s bereits bekannten Integrale* (7) *die Transformation* (8), *so ist die neue Gestalt des Systems der simultanen Differentialgleichungen:*

$$(10)\quad dy_1 - Y_1dy = 0, \cdots,\ dy_{n-s} - Y_{n-s}dy = 0,\ d\varphi_1 = 0, \cdots,\ d\varphi_s = 0.$$

Die letzten s Gleichungen sind direct integrabel und führen auf:

$$\varphi_1 = C_1,\ \varphi_2 = C_2,\ \cdots,\ \varphi_s = C_s$$

zurück. Tragen wir diese constanten Werte für die φ_k, d. i. für die y_{n-s+k} in die Functionen $Y_1, \cdots, Y_{n-s}$ ein, *so besteht die zur vollständigen Integration noch zu lösende Aufgabe in der Integration der* $(n - s)$ *Gleichungen:*

$$(11)\quad dy_1 - Y_1dy = 0,\ dy_2 - Y_2dy = 0, \cdots,\ dy_{n-s} - Y_{n-s}dy = 0$$

mit den $(n - s + 1)$ *Variabelen* $y, y_1, y_2, \cdots, y_{n-s}$.

Um nun endlich auf die Multiplicatoren einzugehen, so müssen wir die Relationen zwischen den Differentialen der neuen und denen der alten Variabelen heranziehen. Zufolge (8) gilt, wenn wir jetzt wieder $x, x_1, \cdots, x_n$ als unabhängig denken:

$$dy = dx, \quad dy_1 = dx_1, \cdots, \quad dy_{n-s} = dx_{n-s}, \tag{12}$$

$$d\varphi_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i, \qquad (k = 1, 2, \cdots, s). \tag{13}$$

Aus (4) und (12) ergeben sich somit für unsere Transformation (8) als specielle Werte der $a_i^{(k)}$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^{(1)} = 1, \quad a_2^{(1)} = 0, \quad a_3^{(1)} = 0, \cdots, \qquad a_n^{(1)} = 0, \\ a_1^{(2)} = 0, \quad a_2^{(2)} = 1, \quad a_3^{(2)} = 0, \cdots, \qquad a_n^{(2)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^{(n-s)} = 0, \cdots\cdots, \quad a_{n-s}^{(n-s)} = 1, \cdots, \quad a_n^{(n-s)} = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Die Gleichung (13) aber nimmt, wenn wir $dx_i = F_i + X_i dx$ eintragen, die Gestalt an:

$$G_{n-s+k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} F_i + \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right] dx;$$

und da der rechter Hand in Klammern eingeschlossene Ausdruck identisch verschwindet, so folgt aus (4) für die in (14) noch nicht genannten $a_i^{(k)}$:

$$a_1^{(n-s+k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}, \quad a_2^{(n-s+k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}, \cdots, \quad a_n^{(n-s+k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}, \tag{15}$$

wo $k = 1, 2, \cdots, s$ zu nehmen ist. Die in (6) rechts stehende Determinante reduciert sich demnach offenbar auf die Functionaldeterminante:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s)}{\partial(x_{n-s+1}, \cdots, x_n)},$$

so dass zwischen zwei einander correspondierenden Multiplicatoren M und N gegenwärtig die Relation besteht:

$$M = N \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s)}{\partial(x_{n-s+1}, \cdots, x_n)}. \tag{16}$$

Als Multiplicator des Systems (10) befriedigt N die partielle Differentialgleichung (cf. pg. 459):

$$\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial (NY_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial (NY_2)}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial (NY_{n-s})}{\partial y_{n-s}} = 0$$

identisch. Dieserhalb können wir, da hier Ableitungen nach den φ_k überhaupt nicht mehr auftreten, für die φ_k die Constante C_k eintragen, ohne dass die letzte Gleichung aufhört in $y, y_1, \cdots, y_{n-s}$ identisch zu bestehen. *Setzen wir demnach in den entwickelten Ausdruck von N für $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ die obigen Constanten $C_1, C_2, \cdots, C_s$ ein, so haben wir nach den Theoremen von pg.* 459 ff. *in dem jetzt allein noch von $y, y_1, \cdots, y_{n-s}$ abhängenden N einen Multiplicator des reducierten Systems* (11).

Den im Anschluss an das System (11) aufgestellten Satz können wir demnach noch folgendermassen ergänzen: *Kennt man neben den s Integralen auch noch einen Multiplicator M der ursprünglichen simultanen Gleichungen, so kann man vermöge* (16) *und durch nachherige Eintragung der Constanten $C_1, C_2, \cdots, C_s$ an Stelle der $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ immer auch einen Multiplicator N für das reducierte System* (11) *angeben.*

Zu einem besonders wichtigen Specialfalle gelangen wir für $s = n - 1$. Die nach N aufgelöste Gleichung (16) nimmt hier die Gestalt an:

$$N = \frac{M}{\left(\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})}{\partial (x_2, x_3, \cdots, x_n)}\right)}. \tag{17}$$

Wir tragen in den entwickelten Ausdruck von N für $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$ die Constanten $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ ein und gelangen dergestalt zu einem sogen. „*letzten Multiplicator*". Das reducierte System (11) besteht hier nur aus einer einzigen Gleichung mit den beiden Variabelen y, y_1. In diesem Falle kommen die Multiplicatoren (cf. pg. 457) einfach auf die integrierenden Factoren zurück; und die Kenntnis eines einzigen Multiplicators genügt somit nach pg. 454, um die Integration dieser letzten Differentialgleichung durch Quadraturen zu vollenden. So entspringt das wichtige, als „*Princip des letzten Multiplicators*" bezeichnete Theorem: *Kennt man vom System der simultanen Differentialgleichungen $F_1 = 0, \cdots, F_n = 0$ bereits $(n - 1)$ unabhängige Integrale, sowie ausserdem einen Multiplicator M, so ist die vollständige Integration durch Quadraturen zu erreichen.*

Aufgabe. Man erläutere die hier entwickelten Principien der Multiplicatortheorie an der pg. 331 durchgeführten Integration der Euler'schen Gleichungen. Dass hier ein mit 1 identischer Multiplicator existiert, wurde bereits am Schlusse von § 6 pg. 461 bemerkt.

§ 8. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unabhängigen und n abhängigen Variabelen ist nach pg. 445 aufs engste verwandt mit der Lösung einer zugehörigen partiellen Differentialgleichung mit $(n+1)$ unabhängigen und einer abhängigen Variabelen. Indem wir jetzt auf die partiellen Differentialgleichungen ausführlicher eingehen, recapitulieren wir zunächst den durch die genannten Entwicklungen bereits erledigten Fall.

Es seien n unabhängige complexe Variabele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vorgelegt, und durch z werde eine von ihnen abhängende complexe Veränderliche bezeichnet. Die vorzuschreibende partielle Differentialgleichung erster Ordnung sei *linear und homogen in den n Quotienten* $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, d. h. sie habe die Gestalt:

$$(1) \qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Die Coefficienten $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sollen *irgend welche Functionen der* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sein; dagegen sollen die $X_1, \cdots, X_n$ die abhängige Variabele z nicht enthalten, so dass letztere in der Differentialgleichung explicite überhaupt nicht auftritt*).

Dies ist die zum System simultaner Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

gehörende partielle Differentialgleichung. Die schon genannten Ergebnisse von pg. 445 u. f. liefern demnach ohne weiteres endgültige Angaben über die *Integrale z der Gleichung* (1), d. h. über diejenigen Functionen $z = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, *deren einzelne, in die Differentialgleichung* (1) *eingetragen, letztere zu einer in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ identisch bestehenden Gleichung macht.* Es gilt der Satz: *Es existieren* $(n-1)$ *particuläre Integrale:*

$$(2) \quad \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \ \ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \ \ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

der Differentialgleichung (1) *derart, dass auch jede willkürliche Function:*

$$(3) \qquad \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$$

dieser φ ein Integral z der Gleichung (1) *liefert, und dass andererseits*

*) Natürlich sollen betreffs der Regularität der Quotienten der $X_1, X_2, \cdots, X_n$ alle diejenigen Voraussetzungen gültig sein, welche den analytischen Entwicklungen von pg. 432 ff. zu Grunde liegen.

jedes Integral von (1) *in der Gestalt* (3), *d. i. als Function der* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$ *darstellbar ist.*

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung der Variabelen verallgemeinern wir jetzt unsere Aufgabe dahin, dass es sich um Integration der *linearen Differentialgleichung:*

$$(4) \qquad P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Q$$

handeln soll, wo die $P_1, \cdots, P_n$, Q *irgendwie gegebene Functionen von* $x_1, \cdots, x_n$ *und* z sind. Den Begriff eines Integrals dieser Gleichung wird man natürlich immer wieder in der bisherigen Weise fassen.

Vermöge einer wichtigen Überlegung können wir die vorgelegte Aufgabe auf die Integration einer solchen Differentialgleichung zurückführen, in welcher, wie in (1), die abhängige Variabele explicite nicht auftritt. Doch müssen wir hierbei vorab den Begriff eines Integrals etwas weiter entwickeln.

Jedes der bisher von uns in Betracht gezogenen Integrale einer oder mehrerer Differentialgleichungen gehörte einer zum mindesten einfach unendlichen continuierlichen Schar von Integralen an. Nun kennt man aber bereits bei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabelen sogenannte *„singuläre“* Integrale, deren einzelnes keiner solchen Schar angehört, vielmehr isoliert für sich steht. *Wir werden derartige isoliert auftretende Integrale auch in höheren Fällen, so oft sie sich einfinden sollten, als „singuläre“ Integrale bezeichnen.* Bei der hier zunächst vorliegenden Untersuchung der Gleichung (4) müssen wir indessen etwaige singuläre Integrale von der Betrachtung einstweilen ausschliessen.

Es sei nun z irgend ein nicht-singuläres Integral von (4). Wir denken dasselbe definiert durch eine Gleichung, welche wenigstens einen Parameter C enthalten wird. Letzteren schaffen wir auf die rechte Seite der Gleichung, die so die Gestalt gewinnt:

$$(5) \qquad \varphi(z, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C.$$

Für die partielle Ableitung von z nach x_i findet sich hieraus unabhängig von dem besonderen Werte C:

$$(6) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Durch Eintragung dieser Ausdrücke in (4) folgt:

$$(7) \qquad P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + P_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Denken wir z aus (5) berechnet und in (7) eingetragen, so muss eine in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ identische Gleichung resultieren. Man kann auch sagen, dass die Gleichung (7) ohne weitere Umformung für alle diejenigen Wertsysteme $z, x_1, x_2, \cdots, x_n$ erfüllt sein muss, welche (5) befriedigen. Nun kommt zur Geltung, dass C willkürlich wählbar ist, und dass andererseits C in (7) nicht mehr auftritt. Jedes willkürlich aufgegriffene Wertsystem $z, x_1, x_2, \cdots, x_n$ wird bei einem richtig gewählten C die Gleichung (5) befriedigen: *Die Gleichung* (7) *muss in* $x_1, x_2, \cdots, x_n, z$ *somit identisch bestehen, d. h.* φ *ist ein Integral dieser Gleichung.*

Diese Überlegung ist nun auch leicht der Umkehrung fähig. Hat man in $\varphi(z, x_1, \cdots, x_n)$ irgend ein Integral von (7), so wird die Gleichung $\varphi = C$ ein Integral z von (4) liefern. Die Gleichung (7) ist nun aber von der einfachen und bereits erledigten Art, da die $P_1, \cdots, P_n, Q$ die abhängige Variabele φ nicht enthalten. *Indem wir somit geeignete n particuläre Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ von* (7) *heranziehen, wird uns jedes nicht-singuläre Integral von* (4) *durch den Ansatz:*

$$(8) \qquad \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = 0$$

geliefert, unter Φ eine willkürliche Function der $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ verstanden. Im Gegensatz zu (5) ist in (8) rechter Hand 0 und nicht C geschrieben; dies ist wegen der Willkür von Φ ohne Einbusse der Allgemeinheit der in (8) dargestellten Integrale z statthaft. —

Die geometrische Deutung oder Sprechweise, die pg. 447 ff. entwickelt wurde, soll hier in vollem Umfange beibehalten werden, zumal wenn sie sich auf den Raum von drei Dimensionen bezieht. Letzteres findet bei der Gleichung (4) für $n = 2$ statt. Wir nennen in diesem besonderen Falle die unabhängigen Variabelen x und y und schreiben die Differentialgleichung:

$$(9) \qquad P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z).$$

Alle nicht-singulären Integrale werden uns in der oben gekennzeichneten Weise von der partiellen Differentialgleichung:

$$P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + R \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

und damit von den simultanen Gleichungen:

(10) $$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

geliefert. Nach pg. 448 gehört zu diesen Gleichungen *eine den Raum ausfüllende doppelt-unendliche Schar von „charakteristischen Curven“*, die fortan auch *als zur Differentialgleichung* (9) *gehörig* angesehen werden sollen. Greifen wir eine einfach unendliche Schar charakteristischer Curven, die eine Oberfläche bilden, auf, so haben wir eine *„Integralfläche“* der Differentialgleichung (9) gewonnen. Ist $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung dieser Integralfläche, so finden wir hieraus durch Auflösung nach z ein Integral der Gleichung (9); und wir wissen, dass wir auf diesem Wege zu allen nicht-singulären Integralen von (9) gelangen können.

Aufgabe 1. Man integriere die nachfolgende partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - (ax + by),$$

in welcher a und b Constante sind. Die simultanen Gleichungen (10) nehmen hier die Gestalt an:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - (ax + by)}.$$

Sieht man x als unabhängige Variabele an, so ist y sofort als Function von x darstellbar. Für z als Function von x entspringt alsdann eine leicht lösbare lineare Differentialgleichung.

Aufgabe 2. Die charakteristischen Curven der folgenden Differentialgleichung erster Ordnung:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c,$$

unter a, b, c gegebene Constante verstanden, sind lauter parallele Gerade, deren Richtungscosinus proportional zu a, b, c sind. Die Integralflächen sind demnach die Cylinderflächen, deren geradlinige Erzeugende die eben genannte Richtung haben. Man führe die Integration der vorgelegten Gleichung unter geometrischer Deutung der erhaltenen Resultate vollständig durch.

§ 9. Vollständige Systeme linearer partieller Differentialgleichungen.

Das in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen vorgelegte und durch die sich anschliessende Entwicklung behandelte Problem soll jetzt dahin verallgemeinert werden, dass mehrere, etwa q, Differentialgleichungen dieser Art integriert werden sollen. Die gesuchte Function wollen wir sogleich durch das Symbol φ bezeichnen; *dieselbe soll also zu gleicher Zeit den q partiellen Differentialgleichungen genügen:*

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+P_2^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+P_n^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,\\ P_1^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+P_2^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+P_n^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ P_1^{(q)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+P_2^{(q)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+P_n^{(q)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,\end{cases}$$

in denen die qn Coefficienten P Functionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *allein sein sollen.* Um diese Differentialgleichungen kurz bezeichnen zu können, definieren wir ein „Operationssymbol" X_i durch:

$$(2)\qquad \mathsf{X}_i=P_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_1}+P_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+P_n^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

X_i bezeichnet also diejenige Operation, welche auf φ ausgeübt die linke Seite der i^{ten} Differentialgleichung (1) liefert. Die vorgelegten Differentialgleichungen können wir damit abgekürzt so schreiben:

$$(3)\qquad \mathsf{X}_1(\varphi)=0,\quad \mathsf{X}_2(\varphi)=0,\ \cdots,\quad \mathsf{X}_q(\varphi)=0.$$

Für das einzelne Symbol X bestätigt man sehr leicht die Regeln:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\mathsf{X}(\varphi_1+\varphi_2)&=\mathsf{X}(\varphi_1)+\mathsf{X}(\varphi_2),\\ \mathsf{X}(\varphi_1\cdot\varphi_2)&=\varphi_1\mathsf{X}(\varphi_2)+\varphi_2\mathsf{X}(\varphi_1).\end{aligned}$$

Diese Formeln sind als Specialfälle in der allgemeineren und gleichfalls leicht zu beweisenden Gleichung enthalten:

$$(5)\qquad \mathsf{X}(\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_\nu))=\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\mathsf{X}(\varphi_1)+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\mathsf{X}(\varphi_2)+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_\nu}\mathsf{X}(\varphi_\nu).$$

Grundlegend ist nun folgende Definition: *Die Gleichungen* (1) *oder* (3) *heissen von einander abhängig, falls es wenigstens ein System nicht durchgängig identisch verschwindender Functionen* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ *von* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *giebt, für welches die Gleichung:*

$$(6)\qquad \lambda_1\mathsf{X}_1(\varphi)+\lambda_2\mathsf{X}_2(\varphi)+\cdots+\lambda_q\mathsf{X}_q(\varphi)=0$$

identisch besteht; giebt es kein solches Functionssystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$, *so heissen die Gleichungen* (1) *unabhängig von einander.* Das identische Bestehen der Gleichung (6) ist so gemeint, dass in dem geordneten Ausdruck dieser Gleichung die Coefficienten aller n Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ in den $x_1, x_2, \cdots, x_n$ identisch verschwinden:

$$(7)\qquad \lambda_1P_k^{(1)}+\lambda_2P_k^{(2)}+\lambda_3P_k^{(3)}+\cdots+\lambda_qP_k^{(q)}=0,\qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

Haben wir den Fall der Abhängigkeit der Gleichungen (1), so können wir jedenfalls die linke Seite einer Gleichung, etwa $\mathsf{X}_q(\varphi)$, aus

(6) durch die linken Seiten der übrigen Gleichungen identisch darstellen:

$$\mathsf{X}_q(\varphi) = \mu_1 \mathsf{X}_1(\varphi) + \mu_2 \mathsf{X}_2(\varphi) + \cdots + \mu_{q-1} \mathsf{X}_{q-1}(\varphi).$$

Jedes Integral φ der ersten $(q-1)$ Gleichungen (1) genügt demnach der q^{ten} Gleichung ohne weiteres auch mit. Die letzte Gleichung (1) ist dann überhaupt überflüssig und kann fortgelassen werden. Offenbar dürfen wir von vorn herein die Annahme machen, *dass wir mit einem System von einander unabhängiger Gleichungen* (1) *zu thun haben.*

Unter diesen Umständen gilt der Satz: *Die Anzahl q muss entweder $< n$ sein, oder wir müssen $q = n$ haben, wobei im letzteren Falle die Determinante der n^2 Functionen P nicht identisch verschwinden darf.* Ist nämlich $q > n$ oder $q = n$, und verschwindet im letzteren Falle die Determinante der P identisch, so können wir durch Auflösung der n Gleichungen (7) immer ein brauchbares Functionssystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ finden, für welches die Gleichung (6) identisch besteht. Dann also sind die q Gleichungen (1) von einander abhängig.

Liegt der Fall $q = n$ vor, so darf, wie wir sahen, die Determinante der P nicht verschwinden. Lassen wir demnach unter den n Gleichungen (7) die k^{te} aus und bestimmen aus den übrigen $(n-1)$ Gleichungen ein System nicht durchgängig identisch verschwindender $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, so ist für diese λ:

$$\lambda_1 P_k^{(1)} + \lambda_2 P_k^{(2)} + \cdots + \lambda_n P_k^{(n)} \tag{8}$$

sicher nicht identisch null. In diesem Falle wird die Gleichung (6) nach Fortheben des Factors (8) offenbar $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$. Durch geeignete Combinationen der Gleichungen (1) folgt also jetzt das System der n Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \cdots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0. \tag{9}$$

Es kann hiernach φ keine der Variabelen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ enthalten. *Haben wir den höchsten Fall von n unabhängigen Differentialgleichungen $\mathsf{X}_1(\varphi) = 0, \cdots, \mathsf{X}_n(\varphi) = 0$, so giebt es nur die eine triviale Lösung, dass φ mit einer Constanten identisch ist.*

Es besteht nun ein höchst wichtiger Algorithmus, vermöge dessen wir das System (1) durch Hinzufügung weiterer Differentialgleichungen ergänzen können. Indem wir zunächst unter φ eine beliebige Function der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ verstehen, üben wir die Operation X_i auf $\mathsf{X}_k(\varphi)$ aus, wobei i, k irgend zwei verschiedene unter den Indices $1, 2, \cdots, q$ sind. Wir gewinnen $\mathsf{X}_i(\mathsf{X}_k(\varphi))$ und bilden entsprechend

$X_k(X_i(\varphi))$; die Differenz dieser beiden Ausdrücke lässt sich in eine bemerkenswerte einfache Gestalt umrechnen. Wir finden, indem bei den nachfolgenden Summen der Summationsbuchstabe immer die Zahlen 1, 2, $\cdots$, n durchlaufen soll:

$$X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi)) = \sum_l \left(P_l^{(i)} \frac{\partial X_k}{\partial x_l} - P_l^{(k)} \frac{\partial X_i}{\partial x_l}\right)$$

$$= \sum_l \left[P_l^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_m P_m^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\right) - P_l^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_m P_m^{(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\right)\right]$$

$$= \sum_l \sum_m \left[\left(P_l^{(i)} P_m^{(k)} - P_l^{(k)} P_m^{(i)}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_m} + \left(P_l^{(i)} \frac{\partial P_m^{(k)}}{\partial x_l} - P_l^{(k)} \frac{\partial P_m^{(i)}}{\partial x_l}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\right].$$

In der letzten Doppelsumme hebt sich nun das Glied mit $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_m}$ gegen dasjenige mit $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_l}$ gerade fort, so dass schliesslich überhaupt keine zweiten Differentialquotienten von φ mehr übrig bleiben. Wir finden demnach:

$$X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi)) = \sum_m \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \sum_l \left(P_l^{(i)} \frac{\partial P_m^{(k)}}{\partial x_l} - P_l^{(k)} \frac{\partial P_m^{(i)}}{\partial x_l}\right)\right].$$

Indem wir hier endlich die auf l bezogenen Summen mit Hilfe der Symbole X_i, X_k ausdrücken, gelangen wir zu der wichtigen Formel:

$$\text{(10)} \qquad X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi)) = \sum_{m=1}^{n} \left[X_i\left(P_m^{(k)}\right) - X_k\left(P_m^{(i)}\right)\right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}.$$

Den rechts in der Klammer des einzelnen Gliedes stehenden Ausdruck denken wir als Function der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ berechnet und finden auf diese Weise, *dass* $X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi))$ *entwickelt immer wieder einen Ausdruck darstellt, der dasselbe Bildungsgesetz wie die linken Seiten unserer Differentialgleichungen* (1) *befolgt, d. h. linear in den* n *Ableitungen von* φ *aufgebaut ist mit Coefficienten, die Functionen von* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *sind.*

Jetzt nehme man an, dass φ ein Integral der q Gleichungen (1) darstellt. Dann ist $X_k(\varphi)$ mit null identisch und dasselbe wird demnach auch von $X_i(X_k(\varphi))$ gelten. Da aus demselben Grunde $X_k(X_i(\varphi))$ identisch verschwindet, *so ist zufolge* (10) *die fragliche Function* φ *zugleich auch ein Integral der Differentialgleichung:*

$$\text{(11)} \qquad \sum_{m=1}^{n} \left[X_i\left(P_m^{(k)}\right) - X_k\left(P_m^{(i)}\right)\right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} = 0.$$

Wir besitzen hiernach in der linken Seite der Gleichung (10) einen Algorithmus, vermöge dessen wir aus irgend zweien unter den Gleichungen (3) eine neue wie die bisherigen gebaute Differentialgleichung gewinnen, welche von allen Integralen φ der Gleichungen (3) gleichfalls befriedigt wird. Wir wollen diese als $(q+1)^{\text{te}}$ Gleichung den früheren anreihen, sofern sie von jenen unabhängig sein sollte; und wir wollen den hiermit eingeleiteten Ergänzungsprocess so lange fortführen, *als er noch zu neuen, von den bis dahin erhaltenen unabhängigen Differentialgleichungen zu führen im Stande ist.* Wir mögen so schliesslich zu den r Gleichungen gelangen:

$$(12) \qquad X_1(\varphi)=0, \quad X_2(\varphi)=0, \cdots, \quad X_r(\varphi)=0,$$

wobei alsdann $r \geq q$ und, wie wir schon wissen, $r \leq n$ gelten wird.

Das System (12) wird hiernach die fundamentale Eigenschaft haben, *dass für die linken Seiten irgend zweier dieser Gleichungen bei beliebigem φ eine Relation:*

$$(13) \quad X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi)) = \lambda_1 X_1(\varphi) + \lambda_2 X_2(\varphi) + \cdots + \lambda_r X_r(\varphi)$$

in den $x_1, x_2, \cdots, x_n$ identisch besteht. Man sagt, die Gleichungen (12) bilden ein *„vollständiges System von linearen Differentialgleichungen"*, und spricht auch wohl kurz von einem *„vollständigen System"*. Da das System (12) genau dieselben Integrale hat, wie das ursprüngliche System, so können wir uns hinfort allein auf die Untersuchung vollständiger Systeme beschränken.

Ist $r=n$, so giebt es nur die eine triviale Lösung, dass φ mit einer Constanten identisch ist. Der Fall $r<n$ wird uns somit ausschliesslich interessieren. Zu seiner vollen Erledigung sind erst noch ein paar Zwischenentwicklungen einzuschalten.

§ 10. **Transformationen bei vollständigen Systemen.**

Unter φ zunächst wieder eine beliebige Function von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ verstanden, setzen wir:

$$(1) \quad \begin{cases} Z_1(\varphi) = A_1^{(1)} X_1(\varphi) + A_2^{(1)} X_2(\varphi) + \cdots + A_r^{(1)} X_r(\varphi), \\ Z_2(\varphi) = A_1^{(2)} X_1(\varphi) + A_2^{(2)} X_2(\varphi) + \cdots + A_r^{(2)} X_r(\varphi), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_r(\varphi) = A_1^{(r)} X_1(\varphi) + A_2^{(r)} X_2(\varphi) + \cdots + A_r^{(r)} X_r(\varphi), \end{cases}$$

wobei die r^2 Coefficienten A gegebene Functionen der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ einer nicht-verschwindenden Determinante sein sollen. Zufolge dieser letzteren Bedingung werden wir die Gleichungen (1) nach den X auflösen können und mögen so finden:

$$(2) \qquad X_k(\varphi) = B_1^{(k)} Z_1(\varphi) + B_2^{(k)} Z_2(\varphi) + \cdots + B_r^{(k)} Z_r(\varphi)$$

für $k = 1, 2, \cdots, r$. Wir wollen das System der Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad Z_1(\varphi) = 0, \quad Z_2(\varphi) = 0, \cdots, \quad Z_r(\varphi) = 0$$

als ein mit dem ursprünglichen System (12) pg. 474 *„äquivalentes System“* bezeichnen. Es ist aus (1) und (2) ohne weiteres evident, *dass äquivalente Systeme immer die gleichen Integrale haben.* Wir machten von diesem Princip bereits bei dem System (9) pg. 472 Gebrauch.

Es liegt nun die Annahme nahe, dass mit dem System (12) pg. 474 auch das äquivalente System (3) ein *„vollständiges“* ist. Um dies zu prüfen, entwickeln wir, wieder bei beliebiger Function φ, aus (1) die Formel:

$$Z_i(Z_k(\varphi)) - Z_k(Z_i(\varphi))$$
$$= \sum_l \left[A_l^{(i)} X_l \left(\sum_m A_m^{(k)} X_m(\varphi) \right) - A_l^{(k)} X_l \left(\sum_m A_m^{(i)} X_m(\varphi) \right) \right].$$

Zur Umgestaltung der rechten Seite machen wir von der ersten Regel (4) pg. 471 für die Operationssymbole X_l Gebrauch; die rechte Seite der letzten Gleichung nimmt so die Gestalt an:

$$\sum_l \sum_m \left[A_l^{(i)} X_l \left(A_m^{(k)} X_m(\varphi) \right) - A_l^{(k)} X_l \left(A_m^{(i)} X_m(\varphi) \right) \right]$$

oder, wenn wir auch noch die zweite Regel (4) pg. 471 anwenden:

$$\sum_l \sum_m \left[\left(A_l^{(i)} A_m^{(k)} - A_l^{(k)} A_m^{(i)} \right) X_l \left(X_m(\varphi) \right) \right.$$
$$\left. + \left(A_l^{(i)} X_l \left(A_m^{(k)} \right) - A_l^{(k)} X_l \left(A_m^{(i)} \right) \right) X_m(\varphi) \right].$$

Wir können dafür auch schreiben:

$$\sum_{l,m} \left(A_l^{(i)} A_m^{(k)} - A_l^{(k)} A_m^{(i)} \right) \left[X_l \left(X_m(\varphi) \right) - X_m \left(X_l(\varphi) \right) \right]$$
$$+ \sum_m \left\{ X_m(\varphi) \left[\sum_l \left(A_l^{(i)} X_l \left(A_m^{(k)} \right) - A_l^{(k)} X_l \left(A_m^{(i)} \right) \right) \right] \right\}.$$

Den Coefficienten von $X_m(\varphi)$ in der letzten Summe können wir aus den Coefficienten A der Substitution (1) als Function der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ berechnen. Den Ausdruck $X_l(X_m(\varphi)) - X_m(X_l(\varphi))$ können wir nach (13) pg. 474 durch eine lineare Combination der X ersetzen. Gehen wir vermöge (2) zu den Z, so entspringt die Existenz einer Formel:

(4) $\quad Z_i(Z_k(\varphi)) - Z_k(Z_i(\varphi)) = \mu_1 Z_1(\varphi) + \mu_2 Z_2(\varphi) + \cdots + \mu_r Z_r(\varphi)$

für jedes Indexpaar i, k. Der zur Ergänzung des Differentialgleichungssystems ausgebildete Algorithmus kann hiernach auch bei dem System (3) zu keinen neuen Differentialgleichungen führen.

Die Differentialgleichungen (3) werden überdies notwendig von einander unabhängig sein. Bestände nämlich eine Relation:

$$\mu_1 Z_1(\varphi) + \mu_2 Z_2(\varphi) + \cdots + \mu_r Z_r(\varphi) = 0$$

identisch, so würde, da die Determinante der A nicht identisch verschwindet, daraus eine entsprechende Relation für die $X(\varphi)$ folgen, was gegen die Voraussetzung verstösst. Man hat also den Satz: *Ist eines von zwei äquivalenten Systemen ein vollständiges, so gilt dies auch vom anderen.* —

Wir betrachten weiter die bei einer Transformation der unabhängigen Variabelen eintretenden Verhältnisse. An Stelle der $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sollen neue Variabele $y_1, y_2, \cdots, y_n$ treten, welche mit jenen durch die n Relationen verbunden sind:

(5) $\quad x_1 = g_1(y_1, y_2, \cdots, y_n),\ x_2 = g_2(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots,\ x_n = g_n(y_1, y_2, \cdots, y_n).$

Diese Gleichungen sollen nach den y auflösbar sein und mögen dabei die Form annehmen:

(6) $\quad y_1 = h_1(x_1, x_2, \cdots, y_n),\ y_2 = h_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots,\ y_n = h_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Um die einzelne unserer Differentialgleichungen auf die neuen Variabelen y zu transformieren, knüpfen wir an:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}$$

und haben alsdann für alle $k = 1, 2, \cdots, r$:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} Q_l^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l},$$

$Q_l^{(k)}$ in der folgenden Bedeutung gebraucht:

$$Q_l^{(k)} = P_1^{(k)} \frac{\partial y_l}{\partial x_1} + P_2^{(k)} \frac{\partial y_l}{\partial x_2} + \cdots + P_n^{(k)} \frac{\partial y_l}{\partial x_n}.$$

Wir denken die Q in den $y_1, y_2, \cdots, y_n$ dargestellt und definieren das Operationssymbol Y_k durch:

$$(8) \qquad Y_k = Q_1^{(k)} \frac{\partial}{\partial y_1} + Q_2^{(k)} \frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + Q_n^{(k)} \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Alsdann schreibt sich die Gleichung (7) einfach:

(9) $$\mathsf{X}_k(\varphi) = \mathsf{Y}_k(\varphi),$$

und unser auf die Variabelen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ transformiertes System ist:

(10) $$\mathsf{Y}_1(\varphi) = 0, \quad \mathsf{Y}_2(\varphi) = 0, \cdots, \quad \mathsf{Y}_r(\varphi) = 0.$$

Die Gleichungen (9) gelten für alle durch (5) verbundenen Wertsysteme der x und y, d. h. sie bestehen bei Gültigkeit der Relationen (5) identisch. Dabei hat man φ in (9) linker Hand durch die x, rechts durch die y ausgedrückt zu denken. *Die Integrale von* (10) *entspringen demnach aus denen des ursprünglichen Systems einfach durch Umrechnung auf die neuen Variabelen y.*

Setzt man in (9) linker Hand $\mathsf{X}_i(\varphi)$ für φ und demnach rechts $\mathsf{Y}_i(\varphi)$ statt φ ein, so folgt wieder als Identität:

$$\mathsf{X}_k(\mathsf{X}_i(\varphi)) = \mathsf{Y}_k(\mathsf{Y}_i(\varphi))$$

und also wird in demselben Sinne gelten:

$$\mathsf{X}_i(\mathsf{X}_k(\varphi)) - \mathsf{X}_k(\mathsf{X}_i(\varphi)) = \mathsf{Y}_i(\mathsf{Y}_k(\varphi)) - \mathsf{Y}_k(\mathsf{Y}_i(\varphi)).$$

Aus dem Bestehen der Relation (13) pg. 474 ergiebt sich demnach sofort eine Gleichung:

$$\mathsf{Y}_i(\mathsf{Y}_k(\varphi)) - \mathsf{Y}_k(\mathsf{Y}_i(\varphi)) = \nu_1 \mathsf{Y}_1(\varphi) + \nu_2 \mathsf{Y}_2(\varphi) + \cdots + \nu_r \mathsf{Y}_r(\varphi),$$

wo die ν die auf die y umgerechneten Functionen λ sind. Es folgt hieraus leicht: *Auch in der transformierten Gestalt* (10) *bilden unsere Differentialgleichungen ein vollständiges System.*

§ 11. Jacobi'sche Systeme. Anzahl der verschiedenen Integrale.

Es wird sich nun vor allem um die Anzahl wesentlich verschiedener Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ unseres vollständigen Systems handeln und um einen Weg, auf dem man zur Kenntnis dieser Integrale gelangen kann. Verschieden sollen diese Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ in dem Sinne heissen, dass keine in den x identische Relation zwischen ihnen bestehen darf. Wie im Falle einer einzelnen Gleichung (1) pg. 467 werden wir nach solchen Integralsystemen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ suchen, *dass nicht nur jede willkürliche Function* $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s)$ *allen Gleichungen des vollständigen Systems genügt, sondern dass auch umgekehrt jedes Integral des vollständigen Systems in der Gestalt* $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s)$ *darstellbar ist.*

Um zu diesem Ziele zu gelangen, wollen wir das vollständige System durch ein äquivalentes von besonderer Gestalt ersetzen. Es ist hierbei zweckmässig, die Anzahl der Differentialgleichungen des Systems durch m, die Anzahl der unabhängigen Variabelen durch

$(m+n)$ zu bezeichnen. Durch Auflösung der m Gleichungen nach den m in ihnen linear vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ gelangt man zu folgendem mit dem gegebenen äquivalenten System:

$$(1)\quad \begin{cases} X_1(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0, \\ X_2(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + P_1^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} + P_1^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0. \end{cases}$$

Ein vollständiges System von dieser Gestalt soll fortan als ein *„Jacobi'sches System"* bezeichnet werden. Dann gilt jedenfalls der Satz, *dass jedes vollständige System mit einem Jacobi'schen System äquivalent ist.* Die Sätze über Existenz und Berechnung der Integrale dürfen wir demnach an das Jacobi'sche System (1) knüpfen.

Da unser System (1) ein vollständiges ist, so besteht für jedes Indexpaar i, k eine Relation:

$$X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi)) = \lambda_1 X_1(\varphi) + \lambda_2 X_2(\varphi) + \cdots + \lambda_m X_m(\varphi).$$

Diejenigen Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche die m ersten Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ enthalten, sind die folgenden:

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}.$$

Trägt man aber die Ausdrücke (1) in die Rechnungen von pg. 473 ein, so zeigt sich leicht, dass in dem entwickelten Ausdruck von $X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi))$ Glieder mit $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ überhaupt nicht auftreten. Somit müssen die eben gemeinten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ sämtlich mit null identisch sein. Es gilt also der Satz: *Bei einem Jacobi'schen Systeme besteht für jedes Indexpaar i, k die Gleichung:*

$$(2)\qquad X_i(X_k(\varphi)) - X_k(X_i(\varphi)) = 0$$

identisch. Wegen der Bauart der rechten Seite der Gleichung (10) pg. 473 kann man auch sagen, *dass für jedes Indexpaar i, k die n Gleichungen:*

(3) $\mathsf{X}_i(P_1^{(k)}) - \mathsf{X}_k(P_1^{(i)}) = 0,\ \mathsf{X}_i(P_2^{(k)}) - \mathsf{X}_k(P_2^{(i)}) = 0, \cdots, \mathsf{X}_i(P_n^{(k)}) - \mathsf{X}_k(P_n^{(i)}) = 0$

identisch gelten.

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um den Hauptsatz über die Anzahl der Integrale des Systems (1) formulieren zu können: *Das Jacobi'sche System* (1) *und damit überhaupt jedes vollständige System von m Differentialgleichungen mit* $(m + n)$ *unabhängigen Variabelen besitzt n wesentlich verschiedene Integrale.*

Dieses wichtige Theorem soll durch den Schluss der vollständigen Induction bewiesen werden. Die erste Gleichung $\mathsf{X}_1(\varphi) = 0$, für sich genommen, besitzt nach der Betrachtung zu Anfang des § 8 pg. 467 insgesamt $(m + n - 1)$ wesentlich verschiedene Integrale. Wir wollen ein zugehöriges Integralsystem durch $\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_{m+n}$ bezeichnen und können nach den Entwicklungen von pg. 443 ff. annehmen, dass die $(m + n - 1)$ Gleichungen:

(4) $y_2 = \varphi_2(x_1, \cdot\cdot, x_{m+n}),\ y_3 = \varphi_3(x_1, \cdot\cdot, x_{m+n}), \cdot\cdot, y_{m+n} = \varphi_{m+n}(x_1, \cdot\cdot, x_{m+n})$

nach $x_2, x_3, \cdots, x_{m+n}$ auflösbar seien.

Man wolle nun an Stelle der $x_2, x_3, \cdots, x_{m+n}$ die $y_2, y_3, \cdots, y_{m+n}$ als neue Variabele einführen und schreibe der Gleichmässigkeit halber y_1 statt x_1. Die erste Gleichung $\mathsf{X}_1(\varphi) = 0$ nehme, auf die y transformiert, die Gestalt an:

$$\mathsf{Y}_1(\varphi) = Q_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + Q_2^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \cdots + Q_{m+n}^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m+n}} = 0.$$

Die Gleichung ist identisch erfüllt, wenn man $\varphi = y_2$ setzt; es muss demnach $Q_2^{(1)}$ identisch verschwinden. Ebenso folgert man das identische Verschwinden von $Q_3^{(1)}, \cdots, Q_{m+n}^{(1)}$. Weiter ergiebt sich aus den Rechnungen von pg. 476 für $Q_1^{(1)}$ der Wert 1, so dass die auf die y transformierte erste Differentialgleichung:

(5) $$\mathsf{Y}_1(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0$$

lautet.

Durch Combination der $(m - 1)$ übrigen Gleichungen mit der Gleichung (5) kann man in jenen Gleichungen die Glieder mit $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}$ zum Fortfall bringen. Durch Auflösung derselben nach den $(m - 1)$ Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_m}$ gewinnt man den Übergang zu dem äquivalenten System:

$$(6)\quad \begin{cases} \Upsilon_1(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \\ \Upsilon_2(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2} + Q_1^{(2)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m+1}} + Q_2^{(2)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m+2}} + \cdots + Q_n^{(2)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m+n}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Upsilon_m(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_m} + Q_1^{(m)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m+1}} + Q_2^{(m)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m+2}} + \cdots + Q_n^{(m)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m+n}}. \end{cases}$$

Dasselbe ist wiederum ein Jacobi'sches, und also gelten den Formeln (3) entsprechend die Identitäten:

$$\Upsilon_1\left(Q_l^{(k)}\right) - \Upsilon_k\left(Q_l^{(1)}\right) = 0$$

für alle Indexpaare k, l. Nun aber ist $Q_l^{(1)}$ identisch null, so dass die letzte Gleichung bei der besonderen Gestalt von Υ_1 die Form annimmt:

$$\frac{\partial Q_l^{(k)}}{\partial y_1} = 0.$$

Es folgt, dass die $(m-1)\cdot n$ Coefficienten Q des Systems (6) Functionen von $y_2, y_3, \cdots, y_{m+n}$ allein sind und y_1 nicht mehr enthalten.

Hiernach haben wir in $\Upsilon_2(\varphi) = 0, \cdots, \Upsilon_m(\varphi) = 0$ ein Jacobisches System von $(m-1)$ Gleichungen mit $(m+n-1)$ unabhängigen Variabelen. Nehmen wir also an, für dieses sei unser Theorem bereits bewiesen, so hat letzteres System insgesamt n wesentlich verschiedene Integrale $\Phi_1(y_2, \cdots, y_{m+n}), \cdots, \Phi_n(y_2, \cdots, y_{m+n})$. Diese aber genügen offenbar auch der ersten Gleichung (6), und liefern somit, in der Gestalt $\Phi_1(\varphi_2, \cdots, \varphi_{m+n}), \cdots, \Phi_n(\varphi_2, \cdots, \varphi_{m+n})$ geschrieben, d. h. auf die $x_1, \cdots, x_{m+n}$ transformiert, Integrale von $X_1(\varphi) = 0$. Also hat in der That auch das Gesamtsystem (6) oder (1) im ganzen n wesentlich verschiedene Integrale, d. h. unser Theorem würde auch für das System (1) gelten.

Man braucht jetzt nur noch hinzuzunehmen, dass für *eine* Differentialgleichung mit $(n+1)$ unabhängigen Variabelen in der That insgesamt n wesentlich verschiedene Integrale existieren, um von hieraus inductiv die allgemeine Gültigkeit unseres Satzes zu erkennen. —

Wir bezeichnen ein System wesentlich verschiedener Integrale der Gleichungen (1) fortan durch $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, da die bisher so benannten Functionen nicht weiter benutzt werden. Für eine alsbald durchzuführende Entwicklung ist es dann noch wichtig, den Satz zu beweisen, *dass die n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ bereits bezüglich der n Variabelen $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n}$ unabhängige Functionen sind.* Bestände nämlich eine Relation:

(7) $$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_m, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = 0$$

identisch, so müsste offenbar die Anwendung der Operation X_i auf Φ ein mit null identisches Ergebnis liefern. Man berechne nun $X_i(\Phi)$ nach der Regel (5) pg. 471 und findet so die Identität:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} X_i(x_1) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} X_i(x_m) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} X_i(\varphi_1) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_n} X_i(\varphi_n) = 0.$$

Aber zufolge (1) ist von $X_i(x_1), \cdots, X_i(x_m)$ allein $X_i(x_i)$ von null verschieden und zwar gleich 1; die $X_i(\varphi_1), \cdots, X_i(\varphi_n)$ sind indes sämtlich identisch null, da $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ Integrale der Gleichung $X_i(\varphi) = 0$ sind. Die letzte Gleichung liefert also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Die Relation (7) enthält demnach $x_1, \cdots, x_m$ nicht mehr explicite, stellt vielmehr eine zwischen den $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ allein bestehende Beziehung dar. Da eine solche jedoch nicht existiert, so ist die Annahme der Relation (7) unzulässig, und also ist unsere letzte Behauptung gerechtfertigt.

Für die wirkliche Berechnung der Integrale $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ ist in den vorstehenden Entwicklungen zugleich ein Weg vorgezeichnet. Man hat dabei öfter wiederholt einzelne Differentialgleichungen zu integrieren und zwischendurch immer wieder Transformationen auf neue Variabele zu vollziehen, sowie zu äquivalenten Systemen überzugehen. Betreffs Vereinfachungen der Integrationsmethode verweisen wir namentlich auf die Untersuchungen von A. Mayer*), sowie auf die Darstellung von E. Goursat in dem pg. 427 genannten Werke pg. 53 ff.

§ 12. **Systeme linearer totaler Differentialgleichungen.**

Die Theorie der vollständigen Systeme liefert uns die Mittel zur Behandlung der Systeme totaler Differentialgleichungen. Wir schliessen uns den eben gebrauchten Bezeichnungen am besten an, wenn wir die unabhängigen Variabelen, deren Anzahl m sei, durch $x_1, x_2, \cdots, x_m$ benennen und unter $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n}$ n gesuchte Functionen der unabhängigen Variabelen verstehen. Als gegeben gelten die n totalen Differentiale dieser Functionen, und zwar in der Gestalt:

---

*) *„Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Function“*, Mathem. Annalen Bd. 4 (1871). *„Über unbeschränkt integrabele Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen“*, Mathem. Annalen Bd. 5 (1872).

$$(1)\quad \begin{cases} dx_{m+1} = P_1^{(1)}\,dx_1 + P_1^{(2)}\,dx_2 + \cdots + P_1^{(m)}\,dx_m, \\ dx_{m+2} = P_2^{(1)}\,dx_1 + P_2^{(2)}\,dx_2 + \cdots + P_2^{(m)}\,dx_m, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ dx_{m+n} = P_n^{(1)}\,dx_1 + P_n^{(2)}\,dx_2 + \cdots + P_n^{(m)}\,dx_m, \end{cases}$$

wo die $m \cdot n$ Coefficienten P Functionen der $(m+n)$ Variabelen $x_1, x_2, \cdots, x_{m+n}$ sind. Man sagt, es sei in (1) ein *System linearer totaler Differentialgleichungen erster Ordnung mit m unabhängigen Variabelen und n gesuchten Functionen* vorgelegt.

Wir fragen nun nach der Existenz eines Integralsystems:

$$(2)\quad x_{m+1} = \psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots, \; x_{m+n} = \psi_n(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

der Gleichungen (1). Dasselbe müsste so beschaffen sein, dass, wenn man in den P auf den rechten Seiten der Gleichungen (1) die $x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}$ durch ihre Ausdrücke $\psi_1, \cdots, \psi_n$ in den $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ersetzt und zugleich linker Hand die totalen Differentiale:

$$(3)\qquad dx_{m+l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_l}{\partial x_m}\,dx_m$$

einträgt, lauter in $x_1, x_2, \cdots, x_m$ identische Gleichungen entspringen. Offenbar läuft dies darauf hinaus, *dass die $m \cdot n$ partiellen Differentialgleichungen:*

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} = P_1^{(1)}, \quad \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_2} = P_1^{(2)}, \cdots, \quad \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_m} = P_1^{(m)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;, \\ \dfrac{\partial x_{m+n}}{\partial x_1} = P_n^{(1)}, \quad \dfrac{\partial x_{m+n}}{\partial x_2} = P_n^{(2)}, \cdots, \quad \dfrac{\partial x_{m+n}}{\partial x_m} = P_n^{(m)} \end{cases}$$

durch die Functionen (2) *identisch befriedigt sein müssen.*

Ein beliebiges System von Anfangswerten der unabhängigen Variabelen sei in $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ fixiert. Wir schreiben vor, dass die Functionen $x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}$ für diese Anfangswerte der Argumente mit den willkürlich gewählten Werten $\xi_{m+1}, \cdots, \xi_{m+n}$ identisch werden. Giebt es alsdann stets noch ein dieser Forderung genügendes Integralsystem (2), so sagen wir, *das System der totalen Differentialgleichungen* (1) *sei „vollständig integrierbar"*. Ein solches Integralsystem ist, wenn es existiert, in der gedachten Weise auch *eindeutig* bestimmt; denn man erkennt aus (1), dass bei einer Differentialänderung der Argumente von $\xi_1, \cdots, \xi_m$ zu $\xi_1 + dx_1, \cdots, \xi_m + dx_m$ die correspondierenden Änderungen der Functionen (2) aus (1) eindeutig

berechenbar sind. Natürlich gilt als Voraussetzung, dass die Coefficienten P in der Umgebung der „Stelle“ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{m+n}$ reguläre Functionen darstellen.

Es ist nun leicht eine notwendige Bedingung dafür aufzustellen, dass das System (1) vollständig integrierbar ist. Es bedeute l eine der Zahlen $1, 2, \cdots, n$, während i und k der Indicesreihe $1, 2, \cdots, m$ entnommen seien. Differenzieren wir die erste der Gleichungen:

$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i} = P_l^{(i)}, \quad \frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_k} = P_l^{(k)}$$

nach x_k, die zweite nach x_i, so folgt:

$$\frac{\partial^2 x_{m+l}}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_k} + \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_{m+n}} \frac{\partial x_{m+n}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 x_{m+l}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_{m+n}} \frac{\partial x_{m+n}}{\partial x_i},$$

insofern doch x_k oder x_i im einzelnen P nicht nur explicite, sondern auch noch implicite als Argument der Functionen $x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}$ auftritt. Die beiden letzten Gleichungen können wir vermöge (4) auch so schreiben:

$$\frac{\partial^2 x_{m+l}}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_k} + P_1^{(k)} \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(k)} \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(k)} \frac{\partial P_l^{(i)}}{\partial x_{m+n}},$$

$$\frac{\partial^2 x_{m+l}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_i} + P_1^{(i)} \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(i)} \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(i)} \frac{\partial P_l^{(k)}}{\partial x_{m+n}}.$$

Nun müssen hier die linken und also auch die rechten Seiten übereinstimmen. Definieren wir daher zur Abkürzung der Formeln die Operationssymbole:

$$(5) \qquad \mathsf{X}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + P_1^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_{m+n}},$$

so ziehen wir die Folgerung, dass für alle Indicescombinationen i, k, l und für alle in Betracht kommenden Wertsysteme der x die Gleichung gelten muss:

$$\mathsf{X}_k\left(P_l^{(i)}\right) - \mathsf{X}_i\left(P_l^{(k)}\right) = 0.$$

Nun war das System der Anfangswerte $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{m+n}$ gänzlich willkürlich wählbar. Es ergiebt sich also das Theorem: *Soll das System der totalen Differentialgleichungen* (1) *vollständig integrierbar sein, so muss notwendig für jede Combination* $i, k = 1, 2, \cdots, m$ *und jeden Index* $l = 1, 2, \cdots, n$ *die Relation:*

$$\mathsf{X}_k\left(P_l^{(i)}\right) - \mathsf{X}_i\left(P_l^{(k)}\right) = 0 \tag{6}$$

in den $x_1, x_2, \cdots, x_{m+n}$ *identisch erfüllt sein.*

Dieses Theorem gestattet noch eine kürzere Ausdrucksform, wenn wir dem System der totalen Differentialgleichungen (1) das nachfolgende System von m linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{X}_1(\varphi) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0, \\ \mathsf{X}_2(\varphi) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + P_1^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathsf{X}_m(\varphi) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} + P_1^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} + P_2^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}} + \cdots + P_n^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

adjungieren. Aus den Entwicklungen von pg. 478 ff., insbesondere durch Vergleich der eben aufgestellten Gleichungen (6) mit (3) pg. 479 folgt alsdann: *Damit das System der totalen Differentialgleichungen* (1) *vollständig integrierbar ist, muss jedenfalls das System der m partiellen Differentialgleichungen* (7) *ein vollständiges und damit ein Jacobi'sches System sein.*

Die so formulierte Bedingung erweist sich nun auch als ausreichend für die vollständige Integrierbarkeit des Systems (1); und es zeigt sich dabei, dass die Ausführung dieser Integration mit der Integration des vollständigen Systems (7) zugleich mit geleistet ist. Nach pg. 479 hat dieses letztere System n Integrale $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$, $\cdots$, $\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$; und es zeigte sich pg. 480, dass dieselben in Bezug auf die n Variabelen $x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}$ unabhängig sind. Bilden wir demnach vermöge dieser n Integrale den Ansatz:

$$\varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2, \quad \cdots, \quad \varphi_n = C_n, \tag{8}$$

so lassen sich diese Gleichungen nach $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n}$ auflösen und mögen solchergestalt ergeben:

$$\left\{\begin{aligned} x_{m+1} &= \psi_1(x_1, \cdots, x_m, C_1, \cdots, C_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_{m+n} &= \psi_n(x_1, \cdots, x_m, C_1, \cdots, C_n). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Wir behaupten, *dass wir damit gerade die n gesuchten Integrale des Systems* (1) *gewonnen haben, wobei alsdann die n willkürlichen Constanten $C_1, \cdots, C_n$ derart bestimmbar sind, dass für die Anfangswerte $\xi_1, \cdots, \xi_m$ die n Functionen* (9) *die beliebig vorgeschriebenen Werte $\xi_{m+1}, \cdots, \xi_{m+n}$ annehmen.*

Um dies zu zeigen, müssen wir die totalen Differentiale dx_{m+1}, $\cdots$, dx_{m+n} berechnen. Dabei knüpfen wir zweckmässig an die Gleichungen (8) an, welche ergeben:

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+n}}dx_{m+n} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{m+n}}dx_{m+n} = 0. \end{cases}$$

Die hieraus zu berechnenden $dx_{m+1}, \cdots, dx_{m+n}$ müssen, in die n Gleichungen (1) eingetragen, die letzteren in $x_1, x_2, \cdots, x_{m+n}$ identisch erfüllen*). Dies wird zutreffen, wenn umgekehrt die in (1) fertig vorliegenden $dx_{m+1}, \cdots, dx_{m+n}$ in (10) eingetragen hier n identisch bestehende Gleichungen ergeben. Die l^{te} Gleichung (10) liefert aber hierbei:

$$\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_{m+1}}\left(P_1^{(1)}dx_1 + \cdots + P_1^{(m)}dx_m\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_{m+n}}\left(P_n^{(1)}dx_1 + \cdots + P_n^{(m)}dx_m\right) = 0$$

und nimmt, nach den Differentialen $dx_1, \cdots, dx_m$ angeordnet, die folgende Gestalt an:

$$\mathsf{X}_1(\varphi_l)dx_1 + \mathsf{X}_2(\varphi_l)dx_2 + \cdots + \mathsf{X}_m(\varphi_l)dx_m = 0.$$

Sie besteht somit in der That identisch, da φ_l eines der Integrale des vollständigen Systems (7) ist.

Auf Grund des ausgesprochenen Theorems besitzen wir in der pg. 479 ff. dargelegten Integrationsmethode der vollständigen Systeme zugleich eine Methode der Lösung unseres vollständig integrierbaren Systems (1), welche sich aus wiederholten Integrationen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen und zwischengeschobenen Transformationen zusammensetzt. Neuere Untersuchungen, namentlich die pg. 481 genannten von A. Mayer, haben erhebliche Vereinfachungen des Integrationsverfahrens entdeckt. Es sei bemerkt, dass man nach der Mayer'schen Methode sogar mit der Integration eines einzigen Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen ausreicht.

---

*) Eigentlich sollte man in (1) und (10) zunächst die $x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}$ durch ihre Ausdrücke (9) ersetzen und dann nach Eintragung der aus (10) berechneten $dx_{m+1}, \cdots, dx_{m+n}$ in (1) n in den $x_1, \cdots, x_m, C_1, \cdots, C_n$ identisch bestehende Gleichungen fordern. Doch sieht man leicht, dass die im Texte aufgestellte Bedingung gerade auf dasselbe hinausläuft.

Als Beispiel wählen wir den Specialfall $m = 2$, $n = 1$. Wir wollen hierbei die beiden unabhängigen Variabelen x und y nennen, durch z aber die gesuchte Function bezeichnen. Die totale Differentialgleichung setzen wir in die Gestalt:

$$(11) \qquad P dx + Q dy + R dz = 0,$$

wo P, Q, R Functionen von x, y, z sind. Die beiden hier eintretenden Functionen $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$ sind $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$, und wir haben die beiden Operationssymbole:

$$\mathsf{X} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{P}{R}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathsf{Y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{Q}{R}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Die Bedingung der vollständigen Integrierbarkeit ist durch die eine Relation gegeben:

$$\mathsf{X}\left(-\frac{Q}{R}\right) - \mathsf{Y}\left(-\frac{P}{R}\right) = 0.$$

Durch Entwicklung derselben gelangt man zu dem Satze: *Die totale Differentialgleichung* (11) *besitzt stets und nur dann ein Integral:*

$$(12) \qquad \varphi(x, y, z) = C,$$

wenn die Relation:

$$(13) \qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

*in x, y, z identisch besteht**).

An Stelle der Relationen (10) tritt hier die eine Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0.$$

Man erkennt leicht, dass dieselbe bis auf einen Factor μ mit der Differentialgleichung (11) identisch sein muss; d. h. es muss eine Function $\mu(x, y, z)$ existieren, für welchen die drei Gleichungen:

$$(14) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu R$$

---

*) Deutet man die Gleichung (12) durch eine Flächenschar im Raume von drei Dimensionen, so ist der Sinn der Differentialgleichung (11), dass im Punkte x, y, z der einzelnen Fläche die Tangentialebene durch:

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0$$

gegeben ist, wo bei stehenden x, y, z die X, Y, Z variabele Coordinaten sein sollen. Eine ausführliche geometrische Theorie der Differentialgleichungen (11) entwickelte A. Voss in der Abhandlung „*Geometrische Interpretation der Differentialgleichungen $Pdx + Qdy + Rdz = 0$*“, Mathem. Ann. Bd. 16 (1880).

identisch bestehen. Eine solche Function μ wird man als *„integrierenden Factor“* der Differentialgleichung (11) bezeichnen.

Aufgabe 1. Man leite aus (14) drei partielle Differentialgleichungen für den integrierenden Factor μ ab, indem man die Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ berechnet und die entstehenden Ausdrücke gleich setzt etc.

Aufgabe 2. Man zeige vermöge der eben genannten partiellen Differentialgleichungen für μ, dass die Relation (13) eine Folge der Existenz eines Factors μ ist.

Aufgabe 3. Man bestimme einen integrierenden Factor für die Differentialgleichung:

$$(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = 0,$$

für welche die Relation (13) erfüllt ist.

Ein erster Factor dieser Art ist $\mu = 1$, ein zweiter $\mu' = yz + zx + xy$. Man stelle die zugehörigen Integralgleichungen $\varphi = C$ und $\varphi' = C'$ auf und untersuche die Beziehung zwischen beiden.

§ 13. Die charakteristischen abwickelbaren Flächen einer nicht-linearen Gleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Die bisher betrachteten partiellen Differentialgleichungen waren in den Ableitungen der gesuchten Function linear. Wir wenden uns jetzt zu *beliebigen* Differentialgleichungen, beschränken uns jedoch einstweilen auf den Fall zweier unabhängiger Variabelen x, y und einer abhängigen z. Für die partiellen ersten Ableitungen von z nach x und y benutzen wir die Bezeichnungen:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{1}$$

und schreiben die vorgelegte Differentialgleichung:

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Jede Function:

$$z = \varphi(x, y), \tag{3}$$

welche in (2) eingetragen eine in x, y identisch bestehende Gleichung:

$$f\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

liefert, heisst ein Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (2).

Es ist nun wichtig, dass wir hier gleich anfangs eine *geometrische Deutung* der x, y, z durch rechtwinklige Raumcoordinaten in Benutzung nehmen, wobei wieder die complexen Werte der x, y, z keineswegs ausgeschlossen sein sollen. Die einzelne Gleichung (3) liefert dabei

eine Oberfläche, welche wir als „*Integralfläche*“ der Differentialgleichung (2) bezeichnen.

Um den Zusammenhang der Integralflächen mit der Differentialgleichung aufzudecken, verstehen wir unter (x, y, z) irgend einen Punkt auf einer einzelnen Integralfläche und unter p und q die zugehörigen ersten Ableitungen von φ. *Bei einer Integralfläche müssen alsdann an jeder einzelnen Stelle* (x, y, z) *solche Werte* p, q *vorliegen, dass* $f(x, y, z, p, q) = 0$ *ist; und jede Fläche, für welche dies zutrifft, ist eine Integralfläche.*

Dieses Theorem gestattet nun eine sehr nützliche geometrische Ausdrucksweise. Wir stellen in variabelen Coordinaten x_1, y_1, z_1 die Normale der Integralfläche an der betrachteten Stelle:

$$\frac{x_1 - x}{p} = \frac{y_1 - y}{q} = \frac{z_1 - z}{-1}, \tag{4}$$

sowie auch die Tangentialebene:

$$p(x_1 - x) + q(y_1 - y) - (z_1 - z) = 0 \tag{5}$$

dar. Lassen wir nun zunächst alle Strahlen (4) durch den Punkt (x, y, z) zu, deren p, q durch die Relation (2) an x, y, z gebunden sind, so erhalten wir ∞^1 einen Kegel der Spitze (x, y, z) bildende Strahlen. Wir bezeichnen denselben als den „*Normalenkegel*“ *des Punktes* (x, y, z) und finden als seine Gleichung sofort:

$$f\left(x, y, z, -\frac{x_1 - x}{z_1 - z}, -\frac{y_1 - y}{z_1 - z}\right) = 0. \tag{6}$$

Ist die Differentialgleichung im besonderen in p und q *linear*, so stellt der Normalenkegel eine *Ebene* dar.

Die zu den eben gemeinten Strahlen (4) orthogonalen Ebenen (5) umhüllen ihrerseits einen zweiten Kegel mit der Spitze (x, y, z), den wir als „*Tangentialkegel*“ *des Punktes* (x, y, z) bezeichnen. Die Gerade, längs deren die Ebene (5) den Tangentialkegel berührt, wird auf letzterer durch die consecutive Ebene:

$$(p + dp)(x_1 - x) + (q + dq)(y_1 - y) - (z_1 - z) = 0$$

ausgeschnitten. Dabei werden dp und dq in Übereinstimmung mit:

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq = 0$$

zu wählen sein, da die Gleichung (2) auch für die abgeänderten Werte der p, q besteht. Benutzen wir für die partiellen Ableitungen von f nach p und q die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = Q, \tag{7}$$

so ergiebt sich leicht: *Die einzelne Ebene* (5) *berührt den Tangentialkegel längs der Geraden:*

$$\frac{x_1 - x}{P} = \frac{y_1 - y}{Q} = \frac{z_1 - z}{pP + qQ}. \tag{8}$$

Durch Elimination von p und q aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung (5) ergiebt sich die Gleichung des Tangentialkegels.

Ist die Differentialgleichung in p und q *linear*, so können wir sie in die Form setzen:

$$pP + qQ = R, \tag{9}$$

wo P, Q, R Functionen von x, y, z allein sind. In diesem Falle zieht sich der Tangentialkegel auf den *einzelnen Strahl:*

$$\frac{x_1 - x}{P} = \frac{y_1 - y}{Q} = \frac{z_1 - z}{R} \tag{10}$$

zusammen.

Ist $P = 0$ und Q von null verschieden, so liegt die Gerade (8) in der Ebene $x_1 = x$, und entsprechend wird sie in der Ebene $y_1 = y$ liegen, falls $Q = 0$ und $P \neq 0$ ist. Verschwinden P und Q für die specielle Ebene (5) gleichzeitig, so schliesst man, dass diese Ebene den Tangentialkegel längs mehr als einer Geraden berührt. Weiter unten werden wir auf „*singuläre*“ Integralflächen aufmerksam machen, bei denen sogar für jede Stelle P und Q gleichzeitig verschwinden. Zunächst merken wir an: *Zum einzelnen Punkte* (x, y, z) *gehört ein durch die Differentialgleichung selbst bestimmter Tangentialkegel. Eine Integralfläche berührt in jedem ihrer Punkte* (x, y, z) *den zugehörigen Tangentialkegel; und jede Fläche, von der letzteres gilt, ist eine Integralfläche der Differentialgleichung* (2).

Man knüpfe wieder an eine einzelne Integralfläche und construiere vom Punkte (x, y, z) derselben aus ein Bogendifferential auf dieser Fläche in Richtung der Geraden (8), längs deren die Tangentialebene (5) den Tangentialkegel berührt. Ist $(x + dx, y + dy, z + dz)$ der Endpunkt dieses Differentials, so ergiebt sich aus (8):

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ}. \tag{11}$$

Wir erkennen: *Bei Angabe von* x, y, z, p, q, *d. h. bei Angabe eines Elementes einer Integralfläche (nach Lage und Orientierung im Raume) ist das fragliche Bogendifferential, was seine Richtung anlangt, bereits aus der Differentialgleichung* (2) *allein bestimmt.*

Indem wir im Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ nach derselben Vorschrift ein weiteres Bogendifferential anreihen und in der gleichen

Weise fortfahren, gewinnen wir auf der Integralfläche eine durch den Punkt (x, y, z) hindurchlaufende Curve, die wir im Anschluss an eine pg. 448 eingeführte Sprechweise als eine *„charakteristische“ Curve* bezeichnen. *Offenbar wird die ganze Integralfläche von charakteristischen Curven dieser Art bedeckt sein.*

Wir kehren nochmals zu dem in (11) gegebenen Bogendifferential zurück und wollen die Abänderungen dp und dq von p und q bestimmen, welche beim Fortgang von (x, y, z) zum Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ auf der gedachten Integralfläche eintreten. Zu diesem Ende gehen wir auf der Integralfläche von (x, y, z) zunächst parallel zur xz-Ebene zum Punkte $(x + dx, y, z + \partial_x z)$, wo $\partial_x z$ die zum obigen dx gehörende partielle Änderung von z ist. Da auch in diesem benachbarten Punkte die Differentialgleichung (2) durch unsere Integralfläche befriedigt wird, so gilt:

$$f(x + dx,\ y,\ z + \partial_x z,\ p + \partial_x p,\ q + \partial_x q) = 0,$$

wo $\partial_x p$ und $\partial_x q$ im entsprechenden Sinne wie $\partial_x z$ gemeint sind. Gebrauchen wir für die partiellen Ableitungen von f neben den in (7) erklärten Bezeichnungen noch die folgenden:

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Z,$$

so schreibt sich die letzte Gleichung:

$$(13) \qquad X dx + Z \partial_x z + P \partial_x p + Q \partial_x q = 0$$

und wir erhalten entsprechend:

$$(14) \qquad Y dy + Z \partial_y z + P \partial_y p + Q \partial_y q = 0.$$

Nun findet man aber unter Rücksicht auf die zwischen den dx und dy bestehende Relation (11):

$$\partial_x q = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx = \frac{P}{Q} \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{P}{Q} \partial_y p.$$

Die Gleichung (13) nimmt damit, wenn wir zugleich $\partial_x z = p dx$ setzen, die Gestalt an:

$$(X + pZ) dx + P(\partial_x p + \partial_y p) = 0.$$

Hier aber ist $\partial_x p + \partial_y p$ das von uns gesuchte Differential dp, so dass wir für dasselbe die Gleichung finden:

$$(X + pZ) dx + P dp = 0.$$

Entsprechend folgt aus (14):

$$(Y + qZ) dy + Q dq = 0.$$

Vereinigen wir diese Relationen mit (11), so entspringt die fundamentale fortlaufende Gleichung:

$$(15) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}.$$

Wir erkennen das grundlegende Theorem: *Ist durch Angabe eines Wertsystems* (x, y, z, p, q) *ein Element einer Integralfläche (nach Lage und Orientierung) gegeben, so ist nicht nur die Richtung des öfters genannten Bogenelementes, sondern sogar das consecutive Flächenelement* $(x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq)$ *an der Stelle* $(x + dx, y + dy, z + dz)$ *der Integralfläche bereits allein aus der Differentialgleichung bestimmt.*

Wir können diesem wichtigen Satze unter Benutzung der charakteristischen Curven auch den Ausdruck verleihen: *Zwei Integralflächen, welche sich an der Stelle* (x, y, z) *berühren, werden sich längs der ganzen von hier ausziehenden charakteristischen Curve berühren.*

Denken wir die sämtlichen Flächenelemente längs einer charakteristischen Curve an einander gereiht, so entspringt ein Gebilde, das man als einen *„charakteristischen Streifen“* bezeichnet. Der geometrischen Anschauung entspricht es besser, wenn wir an Stelle des einzelnen Elementes (x, y, z, p, q) die zugehörige Ebene (5) reihen. Die unendlich vielen längs der charakteristischen Curve auf einander folgenden Ebenen liefern alsdann als Enveloppe eine sogen. *„charakteristische abwickelbare Fläche“*, welche die Integralfläche längs der charakteristischen Curve berührt. Legen wir ein beliebiges Anfangselement durch die Werte $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa$ der x, y, z, p, q fest, *so ist nun einfach die Bedeutung der simultanen Differentialgleichungen* (15) *mit den fünf Variabelen* x, y, z, p, q, *dass die Integration derselben von den Anfangswerten* $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa$ *aus die gesamte zugehörige abwickelbare Fläche oder den ganzen charakteristischen Streifen ergiebt.*

Wir haben hierbei die Anfangswerte zum besseren Anschluss an die Entwicklungen von pg. 436 ff. durch $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa$ bezeichnet. Sollen dieselben ein Flächenelement einer Integralfläche darstellen, so muss natürlich die Gleichung gelten:

$$(16) \qquad f(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa) = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt dann schon von selber, dass alle weiteren bei Integration von (15) *eintretenden Wertsysteme* x, y, z, p, q *die Gleichung* (2) *befriedigen.* Es ist nämlich zufolge (15):

$$df = Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq$$

beständig null, wie man sofort erkennt, wenn man für die dx, dy,

dz, dp, dq die ihnen proportionalen Grössen P, Q, $\cdots$ nach (15) einträgt*).

Die Integration der Gleichungen (15) denken wir nun, indem wir etwa x als unabhängige Variabele fassen, in den Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} y = \chi_1(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa), \\ z = \chi_2(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa), \\ p = \chi_3(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa), \\ q = \chi_4(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa) \end{cases}$$

geleistet. Nach pg. 437 werden wir hierbei nicht ξ, sondern nur η, ζ, π, $\varkappa$ als Parameter auffassen; und da überdies noch die Gleichung (16) gelten muss, so haben wir nur *drei* wesentliche Parameter: *Die gesamten* ∞^4 *Flächenelemente* (x, y, z, p, q), *welche der Differentialgleichung* (2) *entsprechen, schliessen sich solchergestalt zu* ∞^3 *charakteristischen Streifen zusammen, deren analytische Darstellung durch das aus der Integration der simultanen Gleichungen* (15) *entspringende Gleichungssystem* (17) *geleistet ist.*

Mit der Integration der simultanen Gleichungen (15) ist nun zugleich die Integration unserer vorgelegten partiellen Differentialgleichung (2) im Princip geleistet. In der That werden wir die Integralflächen der letzteren aus dem vollständigen Integralsysteme (17) der Gleichungen (15) ableiten können.

§ 14. Durchführung der Integration der Gleichungen $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Die Anfangsebene $x = \xi$ schneidet eine einzelne Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0$$

in einer Curve, welche wir im Anschluss an die soeben benutzte Bezeichnungsweise durch:

$$(2) \qquad \zeta = \psi(\eta)$$

dargestellt denken. Für den einzelnen Punkt (ξ, η, ζ) dieser Curve können wir den zugehörigen Wert q, den wir mit $\varkappa$ bezeichnen werden, darstellen durch:

*) Man kann diese Überlegung auch so einkleiden: Offenbar ist durch $f(x, y, z, p, q) = C$ ein Einzelintegral (cf. pg. 444) der simultanen Gleichungen (15) dargestellt. Der Wert der Constanten C berechnet sich aus dem speciellen Wertsysteme ξ, η, ζ, π, $\varkappa$ zu $C = 0$, und also gilt beständig $f(x, y, z, p, q) = 0$.

(3) $$\varkappa = \frac{d\zeta}{d\eta} = \psi'(\eta).$$

Der zugehörige Wert π von p ist alsdann zu bestimmen aus:

(4) $$f[\xi, \eta, \psi(\eta), \pi, \psi'(\eta)] = 0.$$

Diese Erwägung kehren wir nun geradezu um: Wir schreiben in der Anfangsebene $x = \xi$ eine *„willkürliche Curve“* durch eine Gleichung von der Gestalt (2) vor, und definieren auf diese Weise, indem wir η als variabel denken, $\zeta, \varkappa, \pi$ als Functionen von η durch die Gleichungen (2), (3) und (4). Hierdurch sind längs der willkürlichen Curve (2) lauter „Flächenelemente“

$$[\xi, \eta, \psi(\eta), \pi(\eta), \psi'(\eta)]$$

an einander gereiht; und wir machen jetzt jedes einzelne Element zum Ausgangspunkt für die Construction eines charakteristischen Streifens. Alle diese ∞^1 Streifen werden dargestellt sein durch:

(5) $$\begin{cases} y = \chi_1[x;\ \xi, \eta, \psi(\eta), \pi(\eta), \psi'(\eta)], \\ z = \chi_2[x;\ \xi, \eta, \psi(\eta), \pi(\eta), \psi'(\eta)], \\ p = \chi_3[x;\ \xi, \eta, \psi(\eta), \pi(\eta), \psi'(\eta)], \\ q = \chi_4[x;\ \xi, \eta, \psi(\eta), \pi(\eta), \psi'(\eta)]. \end{cases}$$

Sicher ist, dass wir die ursprünglich gedachte Integralfläche reconstruiert haben, falls wir die vorstehende Entwicklung an die zugehörige Schnittcurve (2) anknüpfen. Aber es gilt sogar der Satz, *dass wir bei einer, wie beabsichtigt, willkürlich ausgewählten Curve* (2) *in* (5) *jedesmal eine zugehörige Integralfläche unserer Differentialgleichung dargestellt haben.*

Dass nämlich die gesamten in (5) vorliegenden Wertsysteme x, y, z, p, q die Differentialgleichung (1) befriedigen, erkennt man als eine Folge der Gleichung (4), und zwar vermöge der an (16) pg. 491 angeschlossenen Überlegung. Die ersten beiden Gleichungen (5), für sich genommen, stellen eine Fläche dar, und man würde durch Elimination von η die Flächengleichung in der Gestalt $z = \varphi(x, y)$ gewinnen können. Unsere Behauptung wird demnach bewiesen sein, wenn wir zeigen können, *dass die in der dritten und vierten Gleichung* (5) *dargestellten* p, q *thatsächlich die zu der eben gemeinten Fläche gehörenden Werte* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *liefern.*

Bei dieser Untersuchung muss man beachten, dass in den Gleichungen (5) x und η die unabhängigen Variabelen sind. Will man z bei constantem y nach x differenzieren, so hat man solche Änderungen von x und η zu benutzen, dass:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} dx + \frac{\delta \chi_1}{\delta \eta} d\eta = 0$$

zutrifft. Hierbei ist mit $\delta \chi_1$ diejenige Änderung von χ_1 bezeichnet, welche man erhält, wenn man η allenthalben in χ_1, d. i. auch in den Argumenten von ψ, π, ψ' um $\delta \eta$ wachsen lässt. Diesen Änderungen von x und η entspricht die Abänderung:

$$(6) \qquad \partial_x z = \frac{\partial \chi_2}{\partial x} dx - \frac{\delta \chi_2}{\delta \eta} \cdot \frac{\frac{\partial \chi_1}{\partial x}}{\frac{\delta \chi_1}{\delta \eta}} dx$$

von z. In ähnlicher Weise findet man aus den beiden ersten Gleichungen (5), wenn wir bei constantem x die Veränderliche y um dy wachsen lassen:

$$(7) \qquad \partial_y z = \frac{\delta \chi_2}{\delta \eta} \cdot \frac{1}{\frac{\delta \chi_1}{\delta \eta}} \cdot dy.$$

Nun soll bewiesen werden, dass das in (6) dargestellte $\partial_x z$ mit pdx, das in (7) dargestellte $\partial_y z$ mit qdy gleich ist. Es handelt sich somit darum, die Richtigkeit der beiden Gleichungen zu zeigen:

$$(8) \qquad \begin{cases} p \dfrac{\delta \chi_1}{\delta \eta} + \dfrac{\partial \chi_1}{\partial x} \dfrac{\delta \chi_2}{\delta \eta} = \dfrac{\partial \chi_2}{\partial x} \dfrac{\delta \chi_1}{\delta \eta}, \\ q \dfrac{\delta \chi_1}{\delta \eta} = \dfrac{\delta \chi_2}{\delta \eta}. \end{cases}$$

Da wir in (5) ein vollständiges Integralsystem der Gleichungen (15) pg. 491 besitzen, so können wir die erste dieser beiden Gleichungen (8) auch so schreiben:

$$p \frac{\delta \chi_1}{\delta \eta} + \frac{Q}{P} \frac{\delta \chi_2}{\delta \eta} = \left(p + q \frac{Q}{P}\right) \frac{\delta \chi_1}{\delta \eta}.$$

Ist demnach die zweite Gleichung (8) richtig, so ist offenbar die erste unmittelbar mit bewiesen. Wir setzen demnach:

$$(9) \qquad \omega(x, \eta) = \frac{\delta \chi_2}{\delta \eta} - q \frac{\delta \chi_1}{\delta \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} - q \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

und hätten zu zeigen, *dass diese Function* $\omega(x, \eta)$ *längs der ganzen durch die ersten beiden Gleichungen* (5) *dargestellten Fläche verschwindet.*

Aus den Gleichungen (15) pg. 491 ergiebt sich, wenn man bei constantem η nach x differenziert:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Durch Differentiation nach η folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial x} = \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial x} + q\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial x}.$$

Diese Gleichung benutze man zur Umgestaltung von:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta} - q\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \eta}$$

und findet:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \eta}\frac{Q}{P} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{Y + qZ}{P}.$$

Da nun $f(x, y, z, p, q)$, vermöge (5) als Function von x und η gedacht, identisch verschwindet, so ist auch die partielle Ableitung von f nach η gleich null:

$$Y\frac{\partial y}{\partial \eta} + Z\frac{\partial z}{\partial \eta} + P\frac{\partial p}{\partial \eta} + Q\frac{\partial q}{\partial \eta} = 0.$$

Daraufhin gestaltet sich die letzte Gleichung so um:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{Z}{P}\left(q\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = -\frac{Z}{P}\omega.$$

Integrieren wir nunmehr bei constantem η nach x, d. h. integrieren wir längs eines charakteristischen Streifens zwischen den Stellen x_0 und x, so folgt, wenn ω_0 der zu x_0 gehörige Wert von ω ist:

(10) $$\omega = \omega_0 \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx}.$$

Jetzt nehme man endlich $x_0 = \xi$; dann wird:

$$\omega_0 = \omega(\xi, \eta) = \frac{d\psi(\eta)}{d\eta} - \varkappa\frac{d\eta}{d\eta} = 0.$$

Da hiernach für $x_0 = \xi$ der erste Factor in (10) rechter Hand verschwindet, so wird die ganze rechte Seite gleich null. Wir gewinnen somit $\omega = 0$, und also sind alle aufgestellten Behauptungen thatsächlich eingelöst.

Der vorstehenden von Cauchy herrührenden Entwicklung wurde von Bertrand der Einwurf gemacht, dass der Schluss auf das beständige Verschwinden von ω nur so lange bindend sei, als der zweite Factor in (10) rechter Hand endlich ist. Nun wird man, um überhaupt auf die simultanen Gleichungen (15) pg. 491 die Integrationsmethoden von pg. 435 ff. anwenden zu können, von einer solchen Anfangsebene $x = \xi$, bez. einem solchen Anfangselement $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa$ ausgehen, für welches P, Q, X, Y, Z endlich und die der unabhängigen Variabelen

x entsprechende Function P von null verschieden ist. In der nächsten Umgebung von $x = \xi$ wird alsdann ω längs des einzelnen Streifens (5) sicher null sein.

Sollte aber weiterhin durch Verschwinden von P sich eine Schwierigkeit ergeben, so bemerke man, dass man bei Integration längs eines Streifens statt x jede der Variabelen y, z, p, q gerade so gut als unabhängig ansehen kann. Die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial x} = -\frac{Z}{P}$$

wird man auf Grund von (15) pg. 491 alsdann sofort durch eine der folgenden vier Gleichungen ersetzen:

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial y} = -\frac{Z}{Q}, \quad \frac{\partial \log \omega}{\partial z} = -\frac{Z}{pP + qQ},$$
$$\frac{\partial \log \omega}{\partial p} = \frac{Z}{X + pZ}, \quad \frac{\partial \log \omega}{\partial q} = \frac{Z}{Y + qZ}.$$

Wir erkennen: *Eine Schwierigkeit kann nur dann eintreten, wenn auf dem gerade betrachteten Streifen eine Stelle erreicht wird, an welcher die Gleichungen:*

$$(11) \qquad P = 0, \quad Q = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0$$

zugleich bestehen. Hier würde sich allerdings die Endlichkeit von ω auf dem bisherigen Wege nicht beweisen lassen.

Nun ist auf einem charakteristischen Streifen das Eintreten einzelner Punkte, in denen die vier Gleichungen (11) simultan bestehen, keineswegs ausgeschlossen. Man muss sogar mit der Existenz einer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ rechnen, auf welcher überall die Gleichungen (11) zugleich gelten. Längs einer Fläche, von der dies gilt, ist $f(x, y, z, p, q)$ offenbar constant und also beständig gleich null, falls an irgend einer Stelle $f = 0$ vorliegt. Im letzteren Falle würden wir durch $\varphi = 0$ thatsächlich ein Integral unserer Differentialgleichung dargestellt finden, das wir indessen als ein *„singuläres"* anzusehen haben (siehe oben pg. 468 sowie die Entwicklungen des folgenden Paragraphen).

Bei jedem nicht-singulären Integral kommen wir jetzt leicht durch Heranziehung eines functionentheoretischen Schlusses zum Ziele. Wir hatten schon erkannt, dass auf dem einzelnen Streifen in der Umgebung des Anfangswertes ξ die Function ω mit null gleich ist. Nun beachte man doch, dass bei constantem η, d. i. auf dem Streifen, y, z, p, q sowie auch $\omega(x, \eta)$ als *analytische* Functionen der *complexen* Variabelen x anzusehen sind. Da gilt dann ohne weiteres der Satz:

Da $\omega(x, \eta)$ in der nächsten Umgebung von $x = \xi$ mit null gleich ist, so ist diese Function längs des ganzen Streifens mit null identisch. Der Bertrand'sche Einwurf ist demnach für alle nicht-singulären Integrale als gegenstandslos erkannt.

§ 15. **Benennungen der Integrale von** $f(x, y, z, p, q) = 0$. **Beispiel.**

Das Integral unserer partiellen Differentialgleichung, welches wir im voraufgehenden Paragraphen herstellten, hängt von einer „*willkürlichen*" Function $\zeta = \psi(\eta)$ ab, welche wir durch eine in der Anfangsebene $x = \xi$ gelegene Curve geometrisch zu deuten hatten. Man bezeichnet dies Integral nach Lagrange als „*das allgemeine Integral*". Nach der Überlegung am Anfang des vorigen Paragraphen ist diese Benennung insofern gerechtfertigt, *als man vom allgemeinen Integral aus durch geeignete Auswahl der Function* $\psi(\eta)$ *zu jedem einzelnen nicht-singulären Integrale unserer Differentialgleichung gelangen kann.*

Man wähle jetzt eine *bestimmte* Function ψ aus, in deren Ausdruck jedoch *zwei willkürliche Parameter* a, b enthalten sein sollen:

$$\zeta = \psi(\eta, a, b). \tag{1}$$

Als Gleichung der zugehörigen Integralfläche gewinnt man durch Elimination von η aus den beiden ersten Gleichungen (5) pg. 493:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0. \tag{2}$$

Wir erhalten sonach allen Wertsystemen der Parameter a, b entsprechend ein Bündel von ∞^2 Integralflächen. Sehen wir a und b als willkürlich an, so sagen wir mit Lagrange, es liege in (2) „*ein vollständiges Integral*" unserer partiellen Differentialgleichung vor. Die Rechtfertigung dieser Benennung ist in folgender Überlegung enthalten. Man kann über a und b so verfügen, dass die Curve (1) durch einen vorgeschriebenen Punkt der Anfangsebene $x = \xi$ hindurchläuft und daselbst eine vorgeschriebene Tangente besitzt. Wir erkennen: *Jeder charakteristische Streifen liegt wenigstens auf einer unter den* ∞^2 *Flächen* (2); *durch diese Gleichung* (2) *erscheinen also alle* ∞^4 *unsere Differentialgleichung befriedigenden Flächenelemente in* ∞^2 *Flächen angeordnet.*

Gegenüber „dem" allgemeinen Integrale kann man „ein" vollständiges Integral je nach der Auswahl der Function ψ auf unendlich viele Arten ansetzen; und es ist im einzelnen Ausdruck (2) natürlich keineswegs jedes particuläre Integral unserer Differentialgleichung enthalten. Umgekehrt aber wird sich aus jedem besonderen vollständigen Integrale

(2) die Differentialgleichung leicht wieder herstellen lassen. *Indem man nämlich aus den drei Gleichungen:*

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

a und b eliminiert, wird man zur Differentialgleichung zurückgeführt werden. Beiläufig folgt, dass überhaupt jedes Bündel von ∞^2 durch eine Gleichung (2) darstellbaren Flächen uns ein vollständiges Integral einer zugehörigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung darstellt.

Vorhin wurde das vollständige Integral (2) aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet. Man kann auch den umgekehrten Weg gehen. Setzt man nämlich für b eine willkürliche Function $g(a)$ von a ein, so haben wir in:

(3) $$\varphi(x, y, z, a, g(a)) = 0$$

aus allen ∞^2 Flächen (2) eine einfach unendliche Schar von Integralflächen ausgesondert. Die Enveloppe dieser Schar, deren Gleichung durch Elimination von a aus (3) und der durch Differentiation nach dem Parameter a entspringenden Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial a} \varphi(x, y, z, a, g(a)) = 0$$

gewonnen wird, berührt sich mit jeder einzelnen Fläche der Schar (3) längs einer charakteristischen Curve und stellt offenbar wiederum eine Integralfläche dar. Die Schnittcurve der letzteren mit der Ebene $x = \xi$ ist die Enveloppe der Curvenschar:

(4) $$\zeta = \psi(\eta, a, g(a)).$$

Wir behaupten nun: *Bei geeignet gewählter Function $g(a)$ kann man in dieser Art durch Bildung einer Enveloppe zu jeder particulären Integralfläche und in diesem Sinne zum allgemeinen Integrale gelangen.* Schreibt man nämlich in der Anfangsebene $x = \xi$ eine beliebige Curve vor, so ist letztere an jeder ihrer Stellen mit einer Curve des Systems (1) in Berührung und stellt demnach in der That die Enveloppe einer im System (1) enthaltenen einfach unendlichen Schar dar.

Wir weisen endlich noch beiläufig auf die *Enveloppe aller ∞^2 Flächen* (2) hin, deren Gleichung wir durch Elimination von a und b aus:

(5) $$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$$

zu bilden haben. Diese Enveloppe wird mit der einzelnen Fläche (2) immer an einer oder mehreren Stellen in Berührung sein. Wir haben

also hier wieder eine Integralfläche gewonnen, und zwar sind wir zum *„singulären“* Integrale geführt, von dem bereits wiederholt die Rede war. An Stelle weiterer allgemeiner Erörterungen sei es gestattet auf die Verhältnisse hinzuweisen, welche das singuläre Integral betreffend bei dem gleich zu betrachtenden Beispiele vorliegen.

In der That wollen wir jetzt zum Schlusse die vorstehenden allgemeinen Ausführungen am Beispiele der Differentialgleichung:

$$px + qy - z + pq = 0 \tag{6}$$

noch kurz erläutern. Die simultanen Gleichungen (15) pg. 491 nehmen in diesem Falle die einfache Gestalt an:

$$\frac{dx}{x+q} = \frac{dy}{y+p} = \frac{dz}{z+pq} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0}. \tag{7}$$

Wählt man als Anfangswert $\xi = 0$, so werden die Werte η, ζ, π, $\varkappa$ verbunden sein durch die Relation:

$$\varkappa\eta - \zeta + \pi\varkappa = 0. \tag{8}$$

Die Integration der Gleichungen (7) zeigt dann ohne weiteres, dass p und q constant gleich π bez. $\varkappa$ sind; der einzelne charakteristische Streifen ist also ein *ebener*. Damit aber wird die Integration des System (7) leicht durchführbar, und wir finden für das allgemeine Gleichungssystem (17) pg. 492 hier insbesondere die Gestalt:

$$\begin{cases} y = -\pi + \dfrac{\eta + \pi}{\xi + \varkappa}(x + \varkappa), \\ z = -\pi\varkappa + \dfrac{\zeta + \pi\varkappa}{\xi + \varkappa}(x + \varkappa), \\ p = \pi, \qquad q = \varkappa. \end{cases} \tag{9}$$

Um jetzt sogleich ein vollständiges Integral zu gewinnen, schreiben wir in der Anfangsebene $x = 0$ eine Gerade durch:

$$\zeta = b\eta + ab$$

vor, wo a und b willkürliche Parameter sind. Dabei ist $\varkappa = b$, und man hat zufolge (8) offenbar $\pi = a$ zu setzen. Die beiden ersten Gleichungen (9) werden:

$$by + ab = (a + \eta)(x + b),$$
$$z + ab = (2a + \eta)(x + b),$$

und sie führen durch Elimination von η auf das vollständige Integral:

$$ax + by - z + ab = 0, \tag{10}$$

welches geometrisch ein *Bündel von ∞^2 Ebenen* darstellt. Nach Vorschrift der Gleichungen (5) finden wir als Enveloppe dieses Ebenen-

bündels das durch $xy + z = 0$ dargestellte *hyperbolische Paraboloid.* An dieser *singulären* Integralfläche bestätigt man unmittelbar das gleichzeitige Bestehen der vier Gleichungen (11) pg. 496.

Aufgabe 1. Man behandele die Differentialgleichung:

$$px + qy + pq = 0,$$

bei welcher die Integration der simultanen Gleichungen (15) pg. 491 in geschlossener Form gelingt.

Aufgabe 2. Man discutiere den Fall einer Differentialgleichung $f(p, q) = 0$, welche x, y, z nicht enthält. Hier wird man mit *ebenen* charakteristischen Streifen zu thun haben.

§ 16. Betrachtung der Differentialgleichungen $f(z, x_1, \cdot\cdot, x_n, p_1, \cdot\cdot, p_n) = 0$.

Die in den drei voraufgehenden Paragraphen entwickelten Methoden übertragen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall einer *beliebigen* Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und einer gesuchten Function z. Für die partiellen Differentialquotienten von z nach den x benutzen wir die Bezeichnung:

$$(1) \qquad p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \quad \cdots, \quad p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

und wir denken die Differentialgleichung selber gegeben durch:

$$(2) \qquad f(z, x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0.$$

Die partiellen Ableitungen von f bezeichnen wir so:

$$(3) \; \frac{\partial f}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = X_1, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_n, \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} = P_1, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial p_n} = P_n.$$

Eine Function:

$$(4) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

welche in (2) eingetragen eine in den x identische Gleichung:

$$f\left(\varphi, x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

liefert, wird als ein Integral der Gleichung (2) zu bezeichnen sein.

Wir benutzen auch hier bei beliebigem n eine *geometrische Sprechweise,* indem wir $x_1, x_2, \cdots, x_n, z$ als rechtwinklige Coordinaten eines Raumes von $(n + 1)$ Dimensionen deuten. Die Begriffe einer „Curve“ und einer „Fläche“ in diesem Raume wurden bereits oben (pg. 449) fixiert. Das durch *eine* Gleichung (4) dargestellte n-dimensionale Gebilde wird als eine *„Integralfläche“* der Differentialgleichung (2) zu bezeichnen sein.

Wir können nun die Massnahmen von pg. 488 ff. hier ohne weiteres verallgemeinern. Einer einzelnen Stelle einer Integralfläche kommt ein Wertsystem $(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ zu, durch welches wir ein *„Flächenelement"* der Integralfläche bestimmt zu denken haben. Auf diesem Flächenelement markieren wir ein Bogenelement, indem wir die Differentiale $dx_1, \cdots, dx_n$ der unabhängigen Variabelen in Übereinstimmung mit:

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n}$$

gewählt denken. Natürlich sollen hierbei die in den Nennern stehenden Functionen P_i für die unser Flächenelement bestimmenden Werte $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ gebildet sein. Das Differential dz für das zu construierende Bogenelement entnehmen wir aus:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = \frac{dx_1}{P_1}(p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots + p_n P_n).$$

Die Richtung des auf dem Flächenelemente construierten Bogendifferentials ergiebt sich aus:

$$(6) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + \cdots + p_n P_n}.$$

Man berechne weiter die Änderungen dp_i der p_i, welche sich einstellen, wenn wir auf der Integralfläche zum Endpunkte $(x_1 + dx_1, \cdots, x_n + dx_n)$ des in Rede stehenden Bogendifferentials gehen. Zunächst haben wir für diese dp_i:

$$(7) \qquad dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx_n.$$

Gehen wir andrerseits auf der Integralfläche zu demjenigen benachbarten Punkte, bei dem nur eine einzelne Coordinate x_i um dx_i und natürlich entsprechend z um $\partial_{x_i} z = p_i dx_i$ abgeändert ist, so wird, da auch für diesen benachbarten Punkt die Gleichung (2) bestehen muss, das zugehörige Differential von f verschwinden. So ergiebt sich:

$$X_i + p_i Z + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + P_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_i} + \cdots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0.$$

Nun folgt aus (1) offenbar $\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$. Die letzte Gleichung führt demnach unter Benutzung der Relationen (5) auf:

$$X_i + p_i Z + \frac{P_1}{dx_1}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx_n\right) = 0.$$

Der hier in Klammer stehende Ausdruck ist aber zufolge (7) direct das gesuchte Differential dp_i. Es folgt: *Beschreiben wir auf der Integralfläche das oben markierte Bogendifferential, so erfahren die $z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots, p_n$ solche Abänderungen, welche mit:*

$$(8)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \cdot\cdot = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + \cdots + p_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \cdot\cdot = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

in Übereinstimmung sind.

Hier erkennt man nun wieder den Umstand als fundamental, dass die simultanen Differentialgleichungen (8) allein von der Differentialgleichung (2) abhängen, dagegen von der besonderen Integralfläche, an welche wir hier anknüpften, gänzlich unabhängig sind. Alle Folgerungen, welche oben (pg. 491) für $n = 2$ auf diese Thatsache gegründet wurden, lassen sich demnach auch hier ziehen. Wir sehen etwa x_1 als unabhängige Variabele für die simultanen Gleichungen (8) an und denken die vollständige Integration der Gleichungen (8) von den Anfangswerten $\xi_1, \cdots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \cdots, \pi_n$ aus durchgeführt. Dabei ergebe sich:

$$(9)\quad \begin{cases} z = \varphi\,(x_1;\ \xi_i,\ \zeta,\ \pi_k), & \\ x_l = \psi_l\,(x_1;\ \xi_i,\ \zeta,\ \pi_k), & (l = 2, 3, \cdots, n), \\ p_m = \chi_m(x_1;\ \xi_i,\ \zeta,\ \pi_k), & (m = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

Indem wir x_1 als variabel ansehen, finden wir durch diese Gleichungen ∞^1 Flächenelemente dargestellt, welche einen „charakteristischen Streifen“ und damit eine „charakteristische abwickelbare Fläche“ liefern.

Wie oben bauen wir aus diesen Streifen alle Integralflächen unserer Differentialgleichung auf. Nur würde wieder der *singuläre* Fall, dass für eine Integralfläche überall die $2n$ Gleichungen:

$$(10)\quad P_1 = 0, \cdots, P_n = 0, \ \ X_1 + p_1 Z = 0, \cdots, X_n + p_n Z = 0$$

zugleich bestehen, auszuschliessen sein; denn hier würden wir an keiner Stelle der Fläche den Integrationsprocess der Gleichungen (8) in Ansatz bringen können. Um jetzt sogleich das *„allgemeine Integral“* herzustellen, verstehen wir unter:

$$(11)\quad \zeta = \Phi(\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$$

eine *„willkürliche Function“* der $(n-1)$ Argumente $\xi_2, \cdots, \xi_n$. Es soll alsdann ein Integral z gebildet werden, welches sich für $x_1 = \xi_1$ auf $\Phi(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ reduciert. Man wird die zugehörige Integralfläche aus allen ∞^{n-1} charakteristischen Streifen aufbauen, deren Anfangselemente durch:

$$\xi_1, \cdots, \xi_n, \quad \zeta = \Phi, \quad \pi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \cdots, \pi_n = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n}$$

und einen zugehörigen aus $f(\zeta, \xi_1, \cdots, \xi_n, \pi_1, \cdots, \pi_n) = 0$ zu bestimmenden Wert π_1 gegeben sind. Das Integral selbst wird man gewinnen, indem man aus den ersten n Gleichungen des Systems:

$$(12) \qquad \begin{cases} z = \varphi\left(x_1;\ \xi_i,\ \Phi,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right), \\ x_l = \psi_l\left(x_1;\ \xi_i,\ \Phi,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right), & (l = 2, 3, \cdots, n), \\ p_m = \chi_m\left(x_1;\ \xi_i,\ \Phi,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right), & (m = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

die $(n-1)$ Grössen $\xi_2, \cdots, \xi_n$ eliminiert.

Zum Beweise dieser Angaben hat man einmal zu zeigen, dass die in (12) vorliegenden Wertsysteme z, x_l, p_m beständig die Differentialgleichung befriedigen, sodann dass die aus den ersten Gleichungen (12) zu berechnenden Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ auch wirklich die durch die letzten Gleichungen gegebenen p_i sind. Die bei $n = 2$ vorliegenden Verhältnisse sind hier wieder durchaus vorbildlich. Indessen verweisen wir wegen der weiteren Ausführung auf die Darstellung in dem pg. 427 genannten Werke von Goursat (§ 50, pg. 109 ff.). Desgleichen beziehen wir uns auf dieses Werk betreffs des Übergangs vom allgemeinen zum *„vollständigen Integral“*; hier hat man natürlich auch wieder nur mit der genauen Verallgemeinerung der oben (pg. 498) für $n = 2$ geschilderten Verhältnisse zu thun.

§ 17. Theorem von Poisson.

Für den Fall einer in $p_1, p_2, \cdots, p_n$ linearen Differentialgleichung $f(z, x_1, \cdots, p_1, \cdots) = 0$ haben wir oben die Möglichkeit der Reduction auf eine solche Differentialgleichung dargethan, in welcher die gesuchte Function explicite nicht mehr auftritt. Die gleiche Reduction ist in genau derselben Weise bei jeder Differentialgleichung $f(z, x_1, \cdots, p_1, \cdots) = 0$ durchführbar. Es wird demnach keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit sein, wenn wir gleich anfangs die Annahme machen, *dass z nicht explicite in der Differentialgleichung auftritt.* Letztere soll also die Gestalt haben:

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0.$$

Es ist nun von Poisson*) ein höchst wichtiges Theorem aufgefunden, welches bei der Integration der Gleichung (1) wesentliche Dienste leistet. Dieses Poisson'sche Theorem soll hier aufgestellt werden.

Das Besondere an der Differentialgleichung (1) ist, dass die oben mit Z bezeichnete partielle Ableitung von f nach z identisch verschwindet. Die simultanen Differentialgleichungen (8) pg. 502 nehmen demnach hier die Gestalt an:

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1} = \frac{-dp_2}{X_2} = \cdots = \frac{-dp_n}{X_n},$$

wobei das Glied mit dem Differential dz zunächst ausgelassen ist. Da z in den Nennern P_i, X_k nirgends auftritt, so haben wir in (2) ein *System simultaner Differentialgleichungen mit* $2n$ *Variabelen* x_i, p_k. Wir denken bei der vollständigen Integration dieses Systems etwa x_1 wieder als unabhängige Variabele und finden nach Ausführung dieser Integration z selbst in der Gestalt:

$$(3) \qquad z = \int\left(p_1 + p_2 \frac{P_2}{P_1} + \cdots + p_n \frac{P_n}{P_1}\right) dx_1 + C$$

durch eine Quadratur. Nach pg. 502 u. f. ist solchergestalt die Integration der partiellen Differentialgleichung (1) im wesentlichen auf diejenige der simultanen Gleichungen (2) zurückgeführt. Das Poisson'sche Theorem wird nun zeigen, wie man aus zwei „Einzelintegralen“ (cf. pg. 444) des Sytems (2) durch einen gewissen einfachen Algorithmus neue Integrale dieses Systems herzustellen vermag.

Hat man in:

$$(4) \qquad \varphi(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) = C$$

irgend ein Einzelintegral von (2), so genügt nach pg. 445 die in (4) gegebene Function φ der partiellen Differentialgleichung:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(P_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - X_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) = 0.$$

Für den hier links stehenden Ausdruck wollen wir eine abkürzende Schreibweise einführen. Sind ψ und χ irgend zwei Functionen der $2n$ Veränderlichen x_i, p_k, so verstehen wir unter dem Symbol (ψ, χ) die Summe:

*) Siehe dessen bezügliche Abhandlungen in den Bänden 13 und 15 des „Journal de l'École polytechnique“.

$$(6)\qquad (\psi, \chi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\chi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\chi}{\partial p_i}\right)$$

und wollen hinfort (ψ, χ) als einen „*Poisson'schen Klammerausdruck*" benennen.

Da die P_i und X_i die partiellen Ableitungen von f nach p_i und x_i sind, so kann man die Differentialgleichung (5) für φ einfach in der Gestalt:

$$(7)\qquad (f, \varphi) = 0$$

anschreiben. Jedes Integral φ dieser Gleichung liefert, mit einer Constanten gleich gesetzt, ein Einzelintegral des Systems (2).

Für den Poisson'schen Klammerausdruck gelten offenbar die Regeln:

$$(8)\qquad (\psi, \chi) = -(\chi, \psi), \quad (C, \chi) = 0,$$

wenn C irgend eine constante Grösse bedeutet. Grundlegend ist eine nach Jacobi benannte Relation für den fraglichen Ausdruck, die wir in folgender Weise aufstellen. Wir definieren durchaus im Sinne von pg. 471 die beiden Operationssymbole:

$$\mathsf{X} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right),$$

$$\mathsf{Y} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\chi}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right).$$

Ist alsdann φ irgend eine dritte, nicht notwendig mit der linken Seite der Gleichung (4) identische Function der x_i, p_i, so gilt offenbar:

$$\mathsf{X}(\varphi) = (\psi, \varphi), \quad \mathsf{Y}(\varphi) = (\chi, \varphi).$$

Üben wir hier links nochmals die Operation Y, rechts nochmals X aus, so folgt:

$$\mathsf{Y}(\mathsf{X}(\varphi)) = (\chi, (\psi, \varphi)), \quad \mathsf{X}(\mathsf{Y}(\varphi)) = (\psi, (\chi, \varphi)).$$

Unter Benutzung der ersten Formel (8) und der unmittelbar ersichtlichen Regel $(\psi, -\chi) = -(\psi, \chi)$ folgt:

$$\mathsf{Y}(\mathsf{X}(\varphi)) - \mathsf{X}(\mathsf{Y}(\varphi)) = ((\varphi, \psi), \chi) + ((\chi, \varphi), \psi).$$

Der hier links stehende Ausdruck wurde nun pg. 473 ausführlich untersucht, und wir wollen von den damaligen Ergebnissen insbesondere benutzen, dass in diesem Ausdruck und also auch in der entwickelten rechten Seite der letzten Gleichung alle Glieder mit Ableitungen *zweiter* Ordnung von φ sich fortheben. Daraufhin bilde man folgende in den φ, ψ, χ symmetrisch gebaute Summe:

(9) $$((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi).$$

Aus der Structur des Poisson'schen Klammerausdrucks ist ersichtlich, dass der entwickelte Ausdruck von (9) eine Summe von lauter Gliedern darstellt, deren einzelnes das Product einer Ableitung zweiter Ordnung und zweier Ableitungen erster Ordnung der φ, ψ, χ ist. Dabei rühren vom mittleren Bestandteile $((\psi, \chi), \varphi)$ nur solche Glieder her, welche allein *erste* Ableitungen von φ enthalten. Da wir nun schon erkannten, dass in $((\varphi, \psi), \chi) + ((\chi, \varphi), \psi)$ alle Glieder mit Ableitungen zweiter Ordnung von φ ausfallen, so kann die ausgerechnete Summe (9) überhaupt keine zweite Ableitung von φ und also wegen der Symmetrie auch keine von ψ und χ enthalten. Das vorhin erkannte Gesetz, dass jedes Glied der entwickelten Summe (9) eine zweite Ableitung enthält, führt dieserhalb zu dem Ergebnis, dass die fragliche Summe identisch verschwindet: *Für je drei Functionen φ, ψ, χ der x_i, p_k gilt die Relation:*

(10) $$((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = 0$$

identisch. Man bezeichnet diese Gleichung als die *„Jacobi'sche Identität"* *).

Das Poisson'sche Theorem kann man nun als eine unmittelbare Folge der Jacobi'schen Identität ableiten. Sind φ_1 und φ_2 irgend zwei Integrale der Gleichung (7), d. i. der Differentialgleichung (5), so gelten die beiden Gleichungen:

(11) $$(f, \varphi_1) = 0, \quad (\varphi_2, f) = 0$$

identisch. Setzt man dies in die Jacobi'sche Identität:

(12) $$((\varphi_2, f), \varphi_1) + ((f, \varphi_1), \varphi_2) + ((\varphi_1, \varphi_2), f) = 0$$

ein und berücksichtigt die zweite Gleichung (8), so folgt:

$$((\varphi_1, \varphi_2), f) = -(f, (\varphi_1, \varphi_2)) = 0.$$

Hieraus entspringt der Poisson'sche Satz: *Hat man in φ_1 und φ_2 irgend zwei Integrale der Differentialgleichung* (5), *so liefert der Klammerausdruck in (φ_1, φ_2) immer sogleich ein drittes Integral derselben Differentialgleichung.* Aus diesem dritten Integrale kann man dann sofort mit φ_1 und φ_2 weitere Integrale herstellen und in entsprechender Weise fortfahren. Indessen müssen wir es unentschieden lassen, ob man in jedem Falle von zwei Anfangsintegralen aus in dieser Weise alle $(2n-1)$ unabhängigen Integrale gewinnen kann oder nicht.

---

*) Siehe Jacobi's Abhandlung *„Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi"*, Journ. f. Math. Bd. 60 oder Jacobi's Werke Bd. 3.

§ 18. Differentialgleichungen der Dynamik.

Jacobi hat in seinen berühmten „Vorlesungen über Dynamik" die Theorie der partiellen Differentialgleichungen im unmittelbaren Zusammenhange mit den (namentlich von Lagrange und Hamilton entwickelten) Grundlagen der Dynamik zur Darstellung gebracht. In der That lassen sich die im Laufe des vorliegenden Kapitels gewonnenen Theoreme in ausgedehntester Weise bei der Integration der Grundgleichungen der allgemeinen Dynamik verwenden. Einige darauf bezügliche Andeutungen sollen hier zum Schlusse gebracht werden.

Es seien n materielle Punkte der Massen $m_1, m_2, \cdots, m_n$ im Raume durch ihre rechtwinkligen Coordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\cdots$, (x_n, y_n, z_n) gegeben. Diese Punkte seien die Angriffspunkte von n gegebenen Kräften $P_1, P_2, \cdots, P_n$, deren nach den Axen genommene Componenten (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), $\cdots$, (X_n, Y_n, Z_n) seien. Wir nehmen an, dass die X_k, Y_k, Z_k *Functionen der* $3n$ *Coordinaten* $x_1, \cdots, z_n$ *allein* sind; diese Functionen gelten weiterhin als bekannt. Die n materiellen Punkte seien durch $\mu < 3n$ Bedingungen an einander gebunden, denen wir die Gestalt geben:

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1, \cdots, y_n, z_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_\mu(x_1, y_1, z_1, \cdots, y_n, z_n) = 0. \end{cases}$$

Die μ hier links stehenden Ausdrücke seien gleichfalls *Functionen der* $3n$ *Coordinaten* $x_1, y_1, \cdots, z_n$ *allein.*

Die Grundfrage ist nun, wie sich unter den gekennzeichneten Bedingungen die materiellen Punkte $m_1, m_2, \cdots, m_n$ bewegen werden, d. h. wie sich die $3n$ Coordinaten $x_1, \cdots, z_n$ als Functionen der Zeit t darstellen. Aus den der Mechanik zu Grunde liegenden Axiomen leitet man nach Lagrange zunächst das System der $3n$ Grundgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} m_k \dfrac{d^2x_k}{dt^2} = X_k + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k} + \cdots + \lambda_\mu \dfrac{\partial F_\mu}{\partial x_k}, \\ m_k \dfrac{d^2y_k}{dt^2} = Y_k + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y_k} + \cdots + \lambda_\mu \dfrac{\partial F_\mu}{\partial y_k}, \\ m_k \dfrac{d^2z_k}{dt^2} = Z_k + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z_k} + \cdots + \lambda_\mu \dfrac{\partial F_\mu}{\partial z_k} \end{cases}$$

ab, wo k der Reihe nach gleich $1, 2, \cdots, n$ zu nehmen ist, und wo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu$ die von Lagrange eingeführten unbestimmten Multiplicatoren sind.

Die Beantwortung der Frage nach der Bewegung des Punktsystems würde nun zunächst so zu vollziehen sein. Wir berechnen uns die μ Gleichungen;

$$\frac{d^2F_1}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2F_2}{dt^2}=0,\ \cdots,\quad \frac{d^2F_\mu}{dt^2}=0$$

explicite, so dass die linke Seite der einzelnen dieser Gleichungen als eine bekannte Function der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, \cdots, z_n$ und ihrer ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit t anzusehen ist. Tragen wir für die zweiten Differentialquotienten ihre aus (2) entspringenden Ausdrücke ein, so entspringen μ Gleichungen, aus denen wir $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu$ als *Functionen der* $x_1, y_1, \cdots, z_n$ *und ihrer ersten Ableitungen nach der Zeit* berechnen können. Diese Ausdrücke trage man in die Gleichungen (2) ein, wodurch die rechten Seiten der letzteren zu bekannten Functionen der $x_1, \cdots, z_n, \frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dz_n}{dt}$ werden.

Für die ersten Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit, d. i. für die Componenten der Geschwindigkeiten unserer n materiellen Punkte schreiben wir die Abkürzungen:

$$\frac{dx_k}{dt}=x_k',\quad \frac{dy_k}{dt}=y_k',\quad \frac{dz_k}{dt}=z_k',\qquad (k=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) können wir dann in die Gestalten setzen:

$$\left\{\begin{aligned} m_k\frac{dx_k'}{dt}&=f_k(x_1,\cdots,z_n,\ x_1',\cdots,z_n'),\\ m_k\frac{dy_k'}{dt}&=g_k(x_1,\cdots,z_n,\ x_1',\cdots,z_n'),\\ m_k\frac{dz_k'}{dt}&=h_k(x_1,\cdots,z_n,\ x_1',\cdots,z_n').\end{aligned}\right.\qquad (k=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

Unsere Aufgabe ist solchergestalt reduciert auf die vollständige Integration eines Systems von $6n$ *simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung* (3), (4) *mit den* $6n$ *abhängigen Variabelen* $x_1, \cdots, z_n$ *und der unabhängigen Veränderlichen* t. Nach pg. 443 wird das vollständige Integralsystem $6n$ willkürliche Constante enthalten, welche wir etwa aus den für die Zeit $t=0$ anzugebenden Werten der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten bestimmen können.

Dieser unmittelbar sich darbietende Ansatz zur Lösung unseres dynamischen Problems wird schon bei nicht ganz einfachen Fällen sehr umständlich. Es hat denn auch bereits Lagrange die Grundgleichungen (2) in eine neue Gestalt weiter entwickelt; und auf diese neue Gestalt, welche sich den beim einzelnen Probleme vorliegenden

Verhältnissen besser anpassen lässt, bezieht sich die Mehrzahl der Theoreme von Hamilton, Jacobi u. a.

Aus den Gleichungen (1) kann man μ unter den Coordinaten durch die $\nu = 3n - \mu$ übrigen ausdrücken. Wir können auch, um dem Ansatze eine noch grössere Allgemeinheit zu geben, $\nu = 3n - \mu$ *zweckmässig gewählte unabhängige Variabele* $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ eingeführt denken, in denen die $x_1, \cdots, z_n$ solche als bekannt geltende Functionen sind, dass die μ Gleichungen (1) in $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ *identisch* bestehen.

Aus dem letzteren Umstande ziehen wir sogleich die Folgerung, dass auch die partiellen Ableitungen der $F_1, \cdots, F_\mu$ nach der einzelnen Variabelen q_s identisch verschwinden müssen, was uns folgende $\mu\nu$ Gleichungen liefert:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_s}+\frac{\partial F_1}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_s}+\frac{\partial F_1}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (s=1,2,\cdots,\nu). \\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_s}+\frac{\partial F_\mu}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_s}+\frac{\partial F_\mu}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right)=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen verwerten wir, um aus den $3n$ Gleichungen (2) die unbestimmten Multiplicatoren $\lambda_1, \cdots, \lambda_\mu$ zu eliminieren. Offenbar folgt, falls wir die Abkürzungen (3) im Gebrauche behalten, durch Combination der Gleichungen (2) unter Rücksicht auf (5):

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{dx_k'}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial q_s}+\frac{dy_k'}{dt}\frac{\partial y_k}{\partial q_s}+\frac{dz_k'}{dt}\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right)=Q_s, \qquad (s=1,2,\cdots,\nu),$$

wobei Q_s eine abkürzende Bezeichnung für folgende Summe ist:

$$(7)\qquad Q_s=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_s}+Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_s}+Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right).$$

Diese Ausdrücke $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu$ *sind als bekannte Functionen der* $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ *anzusehen.*

Zur Weiterentwicklung der ν Gleichungen (6) führen wir nunmehr die *„lebendige Kraft“*:

$$(8)\qquad T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2\right)$$

unseres bewegten Punktsystems ein. Um T auf die neuen Variabelen $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ zu transformieren, knüpfen wir an:

$$x_k' = \frac{dx_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt}.$$

Unter Gebrauch der Abkürzungen:

(9) $$\frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2', \cdots, \quad \frac{dq_\nu}{dt} = q_\nu'$$

schreibt sich die vorstehende Gleichung:

(10) $$x_k' = \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial x_k}{\partial q_\nu} q_\nu',$$

und es reihen sich zwei entsprechende Gleichungen für y_k', z_k' an. *Die* x_k', y_k', z_k' *sind lineare homogene Functionen der* $q_1', q_2', \cdots, q_\nu'$ *mit Coefficienten, die bekannte Functionen der* $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ *sind; und zwar folgt aus* (10):

(11) $$\frac{\partial x_k'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_k}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y_k'}{\partial q_s'} = \frac{\partial y_k}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z_k'}{\partial q_s'} = \frac{\partial z_k}{\partial q_s}, \qquad \begin{pmatrix} k=1, 2, \cdots, n \\ s=1, 2, \cdots, \nu \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort weiter: *T ist eine homogene ganze Function zweiten Grades der* $q_1', q_2', \cdots, q_\nu'$ *mit Coefficienten, die bekannte Functionen der* $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ *sind.*

Um zu den Gleichungen (6) zurückzugelangen, differenziere man:

$$\frac{\partial T}{\partial q_s'} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k' \frac{\partial x_k'}{\partial q_s'} + y_k' \frac{\partial y_k'}{\partial q_s'} + z_k' \frac{\partial z_k'}{\partial q_s'} \right)$$

nach t und findet unter Benutzung der Relationen (11):

(12) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{dx_k'}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_s} + \frac{dy_k'}{dt} \frac{\partial y_k}{\partial q_s} + \frac{dz_k'}{dt} \frac{\partial z_k}{\partial q_s} \right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} m_k \left[x_k' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_s}\right) + y_k' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_k}{\partial q_s}\right) + z_k' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right) \right].$$

Um die zweite rechter Hand stehende Summe weiter zu entwickeln, benutzen wir, dass die Ableitungen $\frac{\partial x_k}{\partial q_s}$, $\frac{\partial y_k}{\partial q_s}$, $\frac{\partial z_k}{\partial q_s}$ Functionen von $q_1, \cdots, q_\nu$ allein sind; es folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_s} q_1' + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_2 \partial q_s} q_2' + \cdots + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_\nu \partial q_s} q_\nu'.$$

Aus Formel (10) aber ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_k'}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_s \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_s \partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_s \partial q_\nu} q_\nu'.$$

Der Vergleich mit der voraufgehenden Gleichung lässt uns somit die Richtigkeit der folgenden Relationen erkennen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_s}\right)=\frac{\partial x_k'}{\partial q_s},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_k}{\partial q_s}\right)=\frac{\partial y_k'}{\partial q_s},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right)=\frac{\partial z_k'}{\partial q_s}.$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite der Gleichung (12) ist demnach, wie aus Formel (8) hervorgeht, gleich der partiellen Ableitung von T nach q_s. Aus (6) und (12) entspringen somit die Gleichungen:

(13) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)=Q_s+\frac{\partial T}{\partial q_s},\qquad (s=1,2,\cdots,\nu).$$

Diese im Verein mit den Gleichungen (9) *stellen ein System von* 2ν *Differentialgleichungen erster Ordnung mit den* 2ν *abhängigen Variabelen* $q_1,\cdots,q_\nu,\ q_1',\cdots,q_\nu'$ *und der unabhängigen Variabelen* t *dar.* Wir haben hiermit die oben in Aussicht genommene neue Gestalt der Grundgleichungen der Dynamik gewonnen.

Eine mit (9) und (13) nahe verwandte, aber noch etwas brauchbarere Gestalt der Grundgleichungen erzielen wir durch Einführung gewisser neuer Variabelen $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ an Stelle der $q_1', q_2', \cdots, q_\nu'$. Wir wollen nämlich setzen:

(14) $$\frac{\partial T}{\partial q_1'}=p_1,\quad \frac{\partial T}{\partial q_2'}=p_2,\quad \cdots,\quad \frac{\partial T}{\partial q_\nu'}=p_\nu.$$

Da T eine homogene Function zweiten Grades der $q_1', \cdots, q_\nu'$ ist, so gelten ν Gleichungen:

(15) $$p_s=\alpha_{s1}q_1'+\alpha_{s2}q_2'+\cdots+\alpha_{s\nu}q_\nu',\qquad (s=1,2,\cdots,\nu).$$

Die Auflösung nach den q_s' liefere:

(16) $$q_s'=\beta_{s1}p_1+\beta_{s2}p_2+\cdots+\beta_{s\nu}p_\nu,\qquad (s=1,2,\cdots,\nu),$$

wo die Coefficienten α und also auch die β Functionen der Variabelen $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ sind. *Die lebendige Kraft* T *wird sich auch in den* $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ *als eine ganze homogene Function zweiten Grades darstellen, deren Coefficienten bekannte Functionen der* $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ *sind.* Für diesen neuen Ausdruck von T benutzen wir die Bezeichnung:

(17) $$T=\mathsf{T}(p_1, p_2, \cdots, p_\nu, q_1, q_2, \cdots, q_\nu).$$

Zur Transformation der Gleichungen (9) und (13) knüpfen wir an das totale Differential von T, welches gleichzeitigen und beliebigen Abänderungen $dp_1, \cdots, dp_\nu, dq_1, \cdots, dq_\nu$ der Argumente $p_1, \cdots, p_\nu, q_1, \cdots, q_\nu$ entspricht:

(18) $$dT=\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_s}dp_s+\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_s}dq_s.$$

Dies Differential können wir nun noch auf anderem Wege berechnen. Da T in der ursprünglichen Gestalt eine homogene Function zweiten Grades der $q_1', q_2', \cdots, q_\nu'$ ist, so gilt nach Euler's Satz von den homogenen Functionen:

$$2T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \cdots + q_\nu' \frac{\partial T}{\partial q_\nu'},$$

eine Gleichung, die wir auch so schreiben können:

$$(19) \qquad T = \sum_{s=1}^{\nu} q_s' \frac{\partial T}{\partial q_s'} - T.$$

Um aus dieser Gleichung das in (18) dargestellte Differential dT zu berechnen, müssen wir aus (16) die den dp_s, dq_s entsprechenden Differentiale dq_s' bestimmen. Gleichung (19) liefert dann:

$$dT = \sum_{s=1}^{\nu} q_s' \, d\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) + \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial q_s'} dq_s' - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial q_s'} dq_s',$$

$$dT = \sum_{s=1}^{\nu} q_s' \, d\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s.$$

Hier sind die in der ersten Summe rechter Hand stehenden totalen Differentiale zufolge (14) einfach die $dp_1, \cdots, dp_\nu$; man hat somit als neue Darstellung des Differentials dT:

$$dT = \sum_{s=1}^{\nu} q_s' \, dp_s - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s.$$

Der Vergleich dieser Darstellung von dT mit der unter (18) gegebenen liefert uns die 2ν Relationen:

$$(20) \qquad q_s' = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_s},$$

vermöge deren wir die beabsichtigte Transformation der Gleichungen (9) und (13) jetzt unmittelbar durchführen können. *In der That werden wir zu folgender neuen Gestalt der 2ν Grundgleichungen geführt:*

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_1}, & \cdots\cdots\cdots, \quad \dfrac{dq_\nu}{dt} = \dfrac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_\nu}, \\[2ex] \dfrac{dp_1}{dt} = Q_1 - \dfrac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_1}, & \cdots, \quad \dfrac{dp_\nu}{dt} = Q_\nu - \dfrac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_\nu}, \end{cases}$$

wo T eine bekannte Function der $p_1, \cdots, p_\nu$, $q_1, \cdots, q_\nu$ ist, die in den $p_1, \cdots, p_\nu$ homogen und ganz vom zweiten Grade ist, während die $Q_1, \cdots, Q_\nu$ bekannte Functionen der $q_1, \cdots, q_\nu$ allein sind. —

In dieser Gestalt sind die Grundgleichungen weiteren Folgerungen besonders leicht zugänglich. Um dies noch etwas weiter auszuführen, so wollen wir z. B. die pg. 454 ff. entworfene Multiplicatorentheorie zur Anwendung bringen. Ein Multiplicator M des Systems der simultanen Gleichungen (21) ist jede Function der $(2\nu + 1)$ Variabelen t, p_s, q_s, welche die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_s}\left(M \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_s}\right) + \frac{\partial}{\partial p_s}\left[M\left(Q_s - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_s}\right)\right]\right\} = 0$$

befriedigt (cf. pg. 459 ff.). Es folgt: *Das System der simultanen Differentialgleichungen* (21) *hat in jedem Falle den Multiplicator* $M = 1$. Setzt man nämlich in der vorstehenden Differentialgleichung M mit 1 identisch, so ist dieselbe erfüllt, da Q_s von p_s unabhängig ist.

Das Princip des letzten Multiplicators (cf. pg. 466) liefert damit unmittelbar folgendes berühmte Theorem: *Kennt man bereits* $(2\nu - 1)$ *unabhängige Integrale der simultanen Gleichungen* (21), *so kann das letzte zur vollständigen Integration noch erforderliche Integral durch Quadraturen gewonnen werden.* —

Um eine weitere Ausführung anzuschliessen, so betrachten wir den Fall, *dass die vorliegenden Kräfte ein Potential* $V(x_1, y_1, \cdots, z_n)$ *besitzen.* Es gelten dann die Gleichungen:

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad Y_1 = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad \cdots, \quad Z_n = \frac{\partial V}{\partial z_n}$$

für die nach den ursprünglichen rechtwinkligen Axen genommenen Componenten der Kräfte. Die Definitionsgleichungen (7) der Q_s liefern jetzt:

$$(22) \qquad Q_s = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial V}{\partial q_s},$$

wo wir rechter Hand V als Function der $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ ausgedrückt denken. Die Differenz $\mathsf{T} - V$ pflegt man durch H zu bezeichnen und als „*Hamilton'sche Function*" zu benennen:

$$H(p_1, \cdots, q_\nu) = \mathsf{T}(p_1, \cdots, q_\nu) - V(q_1, \cdots, q_\nu);$$

dieselbe ist wie T und V als bekannt anzusehen.

Da V von den p frei ist, so findet man mit Benutzung von (22):

$$\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad Q_s - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q_s} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}.$$

Es entspringt der Satz: *Im Falle der Existenz eines Potentials nehmen die Grundgleichungen die Gestalt an:*

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = +\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = +\dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dq_\nu}{dt} = +\dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dp_\nu}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\nu}. \end{cases}$$

Aus (23) ziehen wir noch die fortlaufende Gleichung:

$$\frac{dq_1}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)} = \frac{dq_2}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)} = \cdots = \frac{dq_\nu}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)} = \frac{-dp_1}{\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)} = \cdots = \frac{-dp_\nu}{\left(\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\right)}.$$

Dieselbe subsumiert sich genau dem Ansatze (2) pg. 504. Für die Gewinnung solcher Integrale, welche die Zeit t explicite nicht enthalten, können wir somit im Falle der Existenz eines Potentials das „Theorem von Poisson“ (cf. pg. 506) zur Verwendung bringen.



Sachregister.

33*

Ergänzungen und Berichtigungen.

Zu Seite 74. Die Tafel der Cylinderfunctionen $J_0(\vartheta)$ und $J_1(\vartheta)$ ist von Hansen berechnet. Die erwähnte Abhandlung von Bourget hat den Titel „*Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires*“; die Angaben der Tafel III sind in dieser Abhandlung zerstreut enthalten.

Zu Seite 117. In Figur 31 muss statt Z und Z_0 gesetzt werden z und z_0.

Zu Seite 128 u. f. Die Definition der Zahl g und die Convergenzbetrachtung ist so zu gestalten: Entweder ist $\lim\limits_{n=\infty}\sup. b_n = \infty$, oder es giebt eine endliche Zahl $g = \lim\limits_{n=\infty}\sup. b_n$ von folgender Beschaffenheit: Ist ε eine beliebig kleine von 0 verschiedene, positive Zahl, so wird $(g+\varepsilon)$ höchstens von *endlich* vielen b_n übertroffen, $(g-\varepsilon)$ aber stets von *unendlich* vielen. Im Falle $g=0$ kann beim letzten Teile dieser Aussage an Stelle von $(g-\varepsilon)$ offenbar g selbst treten. Es sei nun g endlich und von 0 verschieden. Um wenigstens in diesem Falle zu zeigen, dass $R = g^{-1}$ der Convergenzradius ist, wählen wir einen beliebigen Wert z in Übereinstimmung mit $|z - z_0| < R$. Zwischen den beiden Beträgen $|z - z_0|$ und R wähle man die Zahl r:

$$|z - z_0| < r < R.$$

Dann gilt auch $r^{-1} > g$; und es lässt sich eine Zahl ε obiger Art so auswählen, dass auch noch $r^{-1} > g + \varepsilon$ zutrifft. Schreibt man somit $r(g+\varepsilon) = q$, so folgt:

$$q = r(g+\varepsilon) < 1.$$

Nun gilt, von endlich vielen und deshalb nicht in Betracht kommenden Reihengliedern abgesehen, beständig $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq g + \varepsilon$. Daraus aber folgt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| < r(g+\varepsilon) = q < 1,$$

$$|a_n(z - z_0)^n| < q^n,$$

womit die Convergenz für den gewählten Wert z bewiesen ist. Hat man andererseits irgend einen Wert z mit $|z - z_0| > R$, so wähle man eine Zahl s gemäss:

$$|z - z_0| > s > R, \quad g > s^{-1}.$$

Nun lässt sich wieder ein ε in Übereinstimmung mit $g - \varepsilon > s^{-1}$ wählen. Setzen wir also $s(g-\varepsilon) = p$, so folgt:

$$p = s(g - \varepsilon) > 1.$$

Jetzt giebt es unendlich viele Reihenglieder, für welche $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq g - \varepsilon$ zutrifft. Für diese ist:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| > s(g - \varepsilon) = p > 1,$$

$$|a_n(z - z_0)^n| > p^n,$$

so dass sich Reihenglieder angeben lassen, die absolut genommen einen beliebig gross gewählten Betrag übersteigen. Es liegt also für das jetzt gemeinte z Divergenz der Reihe vor.

Zu Seite 215. Zu der Überlegung des mit den Worten „Im Innern des von den beiden beschriebenen Geraden . . .“ beginnenden Abschnitts ziehe man auch die Betrachtungen von pg. 409 heran, welche die Abbildung einer Halbebene auf die Fläche eines Kreisbogendreiecks betreffen.


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037414359